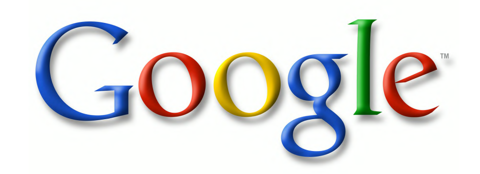



600015342L


600015342L





COURS
DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. J. JAMIN.

TROISIÈME ÉDITION

AUGMENTÉE ET ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

M. JAMIN,
Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

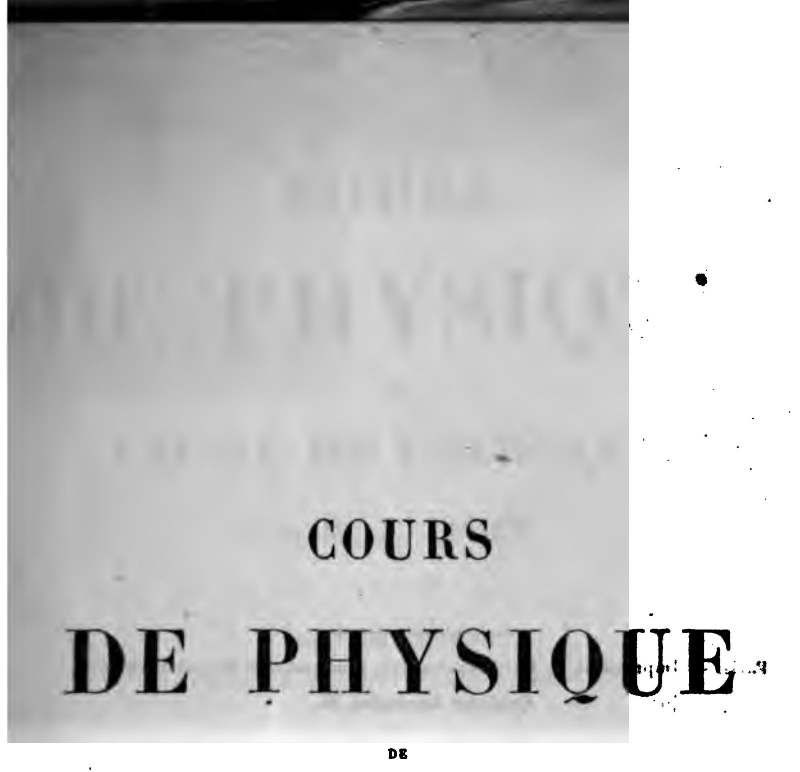
M. BOUTY,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

TOME PREMIER.

INSTRUMENTS DE MESURE. HYDROSTATIQUE.
PHYSIQUE MOLÉCULAIRE.
GRAVITATION UNIVERSELLE. ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1882



COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, successeur de Mallet-Bachelier,
Quai des Augustins, 55.

COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. J. JAMIN.

TROISIÈME ÉDITION
AUGMENTÉE ET ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

M. JAMIN,
Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

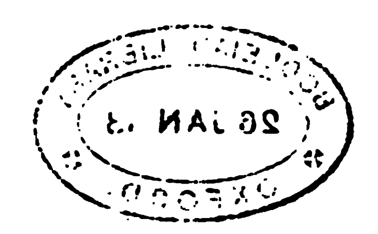
M. BOUTY,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

TOME PREMIER.

INSTRUMENTS DE MESURE. HYDROSTATIQUE.
PHYSIQUE MOLÉCULAIRE.
GRAVITATION UNIVERSELLE. ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1882



PREMIER FASCICULE.

INSTRUMENTS DE MESURE.
HYDROSTATIQUE.

[redacted]

COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

INTRODUCTION.

Caractères différents des méthodes expérimentales et des méthodes mathématiques. — Observation. — Expérience. — Lois physiques. — Utilité des lois physiques. — Théories mathématiques. — Systèmes. — But de la Physique. — Distinction de la Physique et de la Chimie.

CARACTÈRES DIFFÉRENTS DES MÉTHODES EXPÉRIMENTALES ET DES MÉTHODES MATHÉMATIQUES. — Quand on commence l'étude des sciences mathématiques, il suffit d'avoir admis quelques vérités évidentes pour être conduit, par une série de raisonnements qui s'enchaînent, à une suite continue de conclusions aussi certaines que les principes qui leur servent de base; ces sciences sont des conceptions pures et n'obéissent qu'aux lois nécessaires du raisonnement. Mais, dans l'étude que nous allons faire du monde physique, il n'y a point d'axiomes que la raison nous indique ni de principes que nous puissions tirer de notre esprit; on ne voit dans la nature que des mécanismes complexes gouvernés par des forces que l'on ne peut deviner. Le seul objet de nos recherches sera d'analyser ces mécanismes et de découvrir ces forces; le seul moyen que nous ayons pour y réussir est d'observer les effets qui se produisent devant nous. En voyant tant de phénomènes s'accomplir, nous ressemblons à ceux qui examinent pour la première fois le jeu d'une machine à vapeur : ils y trouvent des organes nombreux

obéissant à l'action d'un moteur caché, et, s'ils veulent expliquer l'appareil, ils sont conduits à le démonter pour étudier la fonction de chaque partie, jusqu'au moment où ils découvrent la vapeur qui met tout en mouvement. Vis-à-vis des phénomènes naturels, nous avons la même ignorance du mécanisme et des causes, et le même besoin de les étudier par un travail de décomposition semblable.

OBSERVATION. — Du moment que nous ne pouvons rien savoir *a priori* sur le monde physique, il nous faut renoncer d'une manière absolue à l'habitude que nous prenons trop souvent d'accepter à titre d'explications des hypothèses auxquelles nous ne demandons que d'être possibles, et nous imposer la règle invariable d'étudier les phénomènes tels que nous les voyons se produire sans chercher à rien deviner des causes qui les déterminent : c'est à ce genre particulier d'études, qui n'est rien qu'un examen attentif des faits, que nous donnons le nom d'*observation*, et c'est comme pour avouer la nécessité de nous y soumettre que nous appelons les sciences physiques *sciences d'observation*. Avant tout, il faut que l'on sache bien que l'observation n'est point un examen superficiel et vague des phénomènes: c'est, au contraire, une étude minutieuse et longtemps poursuivie de toutes leurs phases, et surtout une mesure précise de toutes leurs circonstances. Pour en faire comprendre le besoin, la marche et les conséquences, nous prendrons un exemple qui est célèbre dans l'histoire des sciences. Depuis les temps les plus reculés on avait grossièrement suivi le cours des planètes : cela suffisait pour avoir donné une idée sommaire de leur marche, mais ce n'était pas assez pour que l'on pût calculer exactement le mouvement. Sur ces données vagues, on avait imaginé des systèmes qui n'avaient point de réalité, parce qu'il leur manquait une base expérimentale, et qui disparurent aussitôt que Tycho-Brahé se fut appliqué à observer les déplacements de ces astres avec une rigoureuse exactitude. Il détermina par des mesures journalières les positions que les planètes occupent à des époques très rapprochées et les temps qu'elles emploient pour passer de l'une à l'autre de ces positions. Jusque-là, Tycho-Brahé

n'avait exécuté qu'un travail matériel de mesure et rassemblé des documents exacts, mais isolés; il fallait les discuter et les calculer, chercher une courbe continue qui reliât toutes les positions apparentes qui avaient été déterminées, c'est-à-dire l'orbite parcourue, et ensuite exprimer la variation continue des vitesses avec lesquelles l'astre s'était transporté de l'une à l'autre de ses positions : c'est ce que fit Kepler. On voit que l'observation seule ne suffit pas et qu'il faut encore en interpréter les résultats par un travail de coordination qui les résume, en les traduisant dans un énoncé mathématique qui les exprime tous à la fois. C'est ainsi que Kepler reconnut la forme de l'orbite, qui est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers, et qu'il exprima la loi des vitesses, en disant que les aires décrites sont proportionnelles aux temps. Si nous ajoutons que ce travail coûta dix-huit années de recherches et qu'il fut la base du système par lequel Newton expliqua le mécanisme du monde, nous aurons donné à la fois l'idée de la marche qu'il faut suivre dans l'étude des phénomènes, de la manière dont il faut coordonner les mesures, de la difficulté qu'on y rencontre et des bénéfices que la Science en recueille.

EXPÉRIENCE. — A l'origine des sciences physiques, elles ne pouvaient s'attaquer qu'aux actions naturelles qui se développent sous nos yeux et sans notre concours; réduites à les observer sans y exercer d'influence, elles ne devaient faire et ne firent en effet que des progrès insensibles, car, ces actions étant le plus souvent les effets superposés de forces multiples, il était trop difficile d'y démêler l'influence complexe des causes auxquelles il faut les rapporter. Mais, si les anciens en étaient là, les modernes ont inventé l'art de mettre en jeu et de diriger l'action des forces naturelles; cet art, qui a donné aux sciences physiques un si rapide essor, est celui de l'*expérimentation*. En plaçant les corps dans des circonstances qu'il règle à l'avance et qu'il varie à volonté, l'expérimentateur voit naître des phénomènes qui sont autant de sujets nouveaux d'observation. Le hasard, par exemple, fit découvrir autrefois que l'ambre jaune attire, quand il est frotté, les corps légers qui sont voisins de lui; à force de recommencer cette épreuve, on a

trouvé peu à peu les moyens d'en augmenter les effets : on a fini par construire des machines qui les développent avec une grande énergie et qui les reproduisent aussi souvent qu'on le veut : de là sont nées des multitudes de faits curieux qui ne se réalisent pas dans la nature et que nous provoquons nous-mêmes, non point en créant les forces naturelles, ce qui est au-dessus de notre puissance, mais en faisant naître des circonstances qui permettent à ces forces d'agir ; et, comme nous pouvons le plus souvent modifier nos expériences de manière à éliminer les actions étrangères qui les compliquent, les effets que nous préparons ainsi sont simples et les forces qui les développent sont plus faciles à mesurer.

C'est ce qui est arrivé pour l'aimant : trouvée d'abord parmi les minerais dont le globe est composé, cette pierre avait la propriété d'attirer le fer, propriété très inégalement distribuée sur sa surface ; on réussit ensuite à communiquer la même vertu à l'acier, et depuis lors il a été possible de préparer des aimants plus réguliers dans leurs formes, plus énergiques dans leur action, et d'étudier avec plus de fruit les propriétés qu'ils possèdent. On a fait plus : on a profité de ces propriétés pour se diriger dans les voyages, en imaginant la boussole.

Les alchimistes ont surtout contribué, sans le savoir ni le vouloir, à développer cet art de l'investigation : ils ont imaginé les premiers de soumettre les substances à toutes sortes d'actions qui les transformaient, et, s'ils n'ont pas réussi dans l'œuvre qu'ils poursuivaient avec une illusion si opiniâtre, au moins ont-ils trouvé ce qu'ils ne cherchaient pas, des corps inconnus jusque-là. Voilà comment, le hasard intervenant souvent et l'esprit de système lui venant en aide, les savants ont renoncé à leur rôle de spectateurs passifs, pour devenir des investigateurs laborieux.

Ce n'est pas seulement par la découverte des faits, c'est encore par l'invention d'appareils que les sciences d'observation se sont développées : la Chimie eut des fourneaux et des vases destinés spécialement à ses recherches ; la Physique se fit un matériel coûteux d'instruments qui lui sont propres, et chacun d'eux, venant augmenter les moyens d'action que l'on peut avoir sur les agents naturels, ouvrit, aussitôt qu'il parut, une

nouvelle mine à exploiter. Ainsi la machine pneumatique nous montra la pression de l'air et permit de reconnaître les propriétés des gaz ; on sait ce que nous valut la machine à vapeur, et, bien que la pile de Volta nous ait déjà beaucoup donné, on ne sait pas encore tout ce qu'elle réserve de découvertes à l'avenir. A côté de ces appareils actifs spécialement destinés à l'investigation, il en est d'autres dont l'utilité n'est pas moindre, bien qu'elle soit toute différente, et qui ont pour objet de mesurer les effets que l'on observe, comme le baromètre, ou le thermomètre, ou les lunettes, ou tant d'autres dont les cabinets de Physique sont aujourd'hui remplis, et qui seuls pouvaient donner aux observations l'exactitude qu'il est nécessaire d'atteindre. Les progrès de la Science sont donc de deux sortes : elle découvre des faits nouveaux d'une part, elle imagine de l'autre des appareils pour les produire ou les observer.

LOIS PHYSIQUES. LEUR UTILITÉ. — Naturellement cette collection de phénomènes découverts par l'expérimentation a commencé par être très décousue, parce qu'elle a commencé par être très incomplète; mais, les lacunes diminuant à mesure qu'elle s'agrandissait, on a pu s'occuper de la classer. Puis il a fallu chercher s'il n'y a point entre ces faits des rapports qui les lient et des lois qui expriment leur dépendance mutuelle. Nous allons choisir un exemple : aussitôt qu'un rayon de lumière vient rencontrer une surface polie interposée dans son trajet, il change brusquement sa direction primitive; c'est une action qui se produit avec toutes les substances polies, sous toutes les inclinaisons, et que l'on nomme la *réflexion de la lumière*. Pour ne point en rester à cette notion vague, on a comparé sur un cercle gradué les angles que font les deux rayons avec la normale au miroir, et on les a trouvés toujours égaux entre eux; on put alors résumer ce résultat dans un énoncé général et dire : « L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. » C'est exprimer ce que nous nommons une *loi* physique, et l'on voit qu'une loi physique est une relation constante entre des quantités variables.

On a quelque sujet de s'étonner en voyant combien est simple la loi que nous venons de citer; mais ce qui est plus

remarquable encore, c'est que tous les phénomènes qui ne sont pas le résultat de causes multipliées paraissent présenter le même caractère : les attractions de la matière, celles de l'électricité ou du magnétisme ou des courants, tous les phénomènes lumineux nous offriront des rapports aussi faciles à exprimer; c'est ce qui rend les recherches plus aisées et ce qui donne à la Physique un caractère de simplicité philosophique si remarquable. On conçoit toute l'importance que les physiciens attachent à découvrir ces lois, puisqu'elles expriment les règles générales auxquelles obéissent tous les faits particuliers. Pour mieux faire comprendre ce besoin et ses conséquences, supposons qu'après avoir trouvé la loi de la réflexion on vienne à construire un miroir dont la forme soit quelconque, mais définie géométriquement, et qu'ensuite on fasse tomber sur sa surface les rayons venus d'une bougie placée en un point déterminé. La direction que prendra chacun d'eux en se réfléchissant pourra être déterminée analytiquement; l'effet du miroir sera prévu avant même qu'il ait été construit et que l'expérience l'ait étudié. Telle est l'importance pratique des lois physiques; elles embrassent un grand nombre de faits particuliers qu'elles règlent, et, quand elles sont connues, il n'y a plus qu'à demander aux Mathématiques le développement rationnel de toutes leurs conséquences.

THÉORIES MATHÉMATIQUES. — Dans chaque branche des sciences physiques, on trouve diverses classes de phénomènes généraux qui sont réglées chacune par des lois spéciales. Dans le cas de la lumière, par exemple, un grand nombre de ces lois sont connues, et, par suite, il est facile de résoudre tous les problèmes de la propagation de la lumière à travers une succession quelconque de milieux, en acceptant ces lois comme principes et sans autre secours que le raisonnement mathématique. Or, si toutes les lois élémentaires de l'Optique et en général d'une science quelconque étaient connues, on pourrait abandonner la marche expérimentale qui a servi à les découvrir, et, en changeant de méthode, il n'y aurait plus qu'à descendre des principes à leurs conséquences. Nous sommes loin d'en être arrivés là; mais c'est un but qu'il est raisonnable de se pro-

poser, qu'il n'est pas impossible d'atteindre un jour, et auquel on est arrivé déjà pour une science au moins, qui est la Mécanique rationnelle. Elle se présentait à nous avec tous les caractères d'une science d'observation, car on ne peut deviner *a priori* les lois de l'action des forces sur un corps, et les mouvements produits dans chaque cas particulier sont des phénomènes physiques qu'il fallait d'abord observer si on voulait les connaître. Ce travail a été long et pénible; mais, à cause sans doute de leur simplicité et de leur petit nombre, les lois élémentaires de cette science ont fini par être découvertes, et, depuis qu'on les connaît, la Mécanique est devenue science rationnelle, elle est exclusivement mathématique et se passe de l'expérience.

Ce qui est arrivé dans ce cas particulier, on cherche à le réaliser pour toutes les autres sciences physiques; on y est déjà parvenu pour l'Astronomie, pour une grande partie des phénomènes de l'Optique et pour beaucoup de points assez étendus de la Physique générale. On voit donc que ces sciences observent afin de conquérir leurs principes et qu'elles cherchent à remonter des effets qui les frappent à ces principes qu'elles ignorent, uniquement afin de pouvoir un jour embrasser tous les détails dans des formules générales qui les contiendront toutes et d'où on les ferait découler par la méthode de déduction.

Cela nous amène à faire remarquer le rôle que jouent les Mathématiques dans l'étude de la Physique, et tout ce que nous venons de dire le fait déjà pressentir. Elles sont aussi indispensables que les expériences elles-mêmes, puisqu'elles les résument et les calculent, qu'elles en expriment les lois générales et qu'elles en développent toutes les conséquences : elles sont à la fois un langage et un instrument de déduction. Comme on ne peut les employer qu'au moment où une science est sortie des aperçus vagues pour arriver à des relations numériques, et des détails particuliers pour les généraliser dans des lois, on peut dire que le degré d'avancement de cette science se mesure à l'emploi qu'elle fait des Mathématiques. De plus, quand on a découvert les lois élémentaires qui embrassent une classe étendue de phénomènes, les Mathéma-

tiques cessent d'être un auxiliaire de l'observation, elles la rendent inutile et suffisent pour faire la théorie complète de tous ces phénomènes; ainsi, après que l'on eut découvert les lois des attractions électriques ou magnétiques, on a pu faire la théorie mathématique de l'électricité et des aimants.

SYSTÈMES. — Nous venons de montrer la marche logique qu'il faut suivre dans la Physique, comment il faut commencer par des expériences, comment on les résume par des lois et comment enfin ces lois commandent les détails; mais ce n'est pas toujours aux conclusions légitimes qu'on s'arrête. Nous avons ou une habitude ou une tendance instinctive de l'esprit qui nous porte à vouloir expliquer tout et à inventer l'explication quand elle nous manque. Or, s'il est évident qu'on peut logiquement descendre d'une cause connue à l'effet qu'elle détermine, il n'est pas moins clair que l'opération inverse est absolument dépourvue de règle et livrée à tous les hasards de l'interprétation. Si l'on sait que l'eau est pressée par l'atmosphère, on prévoit aussitôt qu'elle montera dans le tuyau d'une pompe où on fera le vide. Mais admettons que l'on ne connaisse pas l'existence de cette pression et que l'on voie monter l'eau : on aura le choix entre une multitude de causes que l'imagination peut suggérer, et, quand on voudra se décider entre elles, on aura toutes les chances possibles de se tromper contre une seule pour deviner juste. On sait comment avaient réussi les anciens, qui admettaient *l'horreur de la nature pour le vide*. C'est le même besoin que l'on veut satisfaire et la même opération logique que l'on fait quand on dit que *la matière attire la matière*. Tout se ressemble dans ces deux hypothèses, jusqu'à la manière dont on les exprime, et peut-être que tout se ressemble aussi dans la réalité des deux explications. Qu'il y ait une force agissant entre deux astres voisins, c'est ce que les lois de la Mécanique démontrent rigoureusement; mais, quand on dit que cette force est une attraction de la matière, on a fait une hypothèse aussi gratuite que celle des anciens, quand ils disaient que la force qui fait monter l'eau est une horreur du vide. Plus récemment, dans le but d'expliquer les phénomènes de la chaleur, de l'électri-

cité, du magnétisme et de la lumière, on imagina un fluide calorifique, deux fluides électriques, deux fluides magnétiques, un fluide éthéré. Qu'étaient-ce que ces fluides? Des êtres d'imagination, parfaitement choisis d'ailleurs pour se prêter à toutes les explications, parce qu'en les créant pour un objet déterminé on peut leur donner toutes les propriétés que l'on veut. C'est là ce qu'on nomme *imaginer des systèmes ;* le plus souvent ils ne servent qu'à dissimuler l'ignorance où l'on est des choses, à faire illusion sur cette ignorance et à fausser l'esprit, qu'ils habituent à se payer de mots. Il est rare d'ailleurs que le progrès des sciences ne vienne tôt ou tard les déjouer. Le calorique n'est plus invoqué par personne; l'hypothèse des fluides magnétiques a disparu comme inutile quand on a connu les relations du magnétisme et de l'électricité. Qui peut prévoir le sort des fluides électriques et de l'éther lumineux?

Bien que les physiciens modernes prennent pour se garantir des systèmes autant de soins qu'en mettaient les anciens à les multiplier, ils en admettent cependant quelques-uns encore, mais à une condition qui leur donne une véritable utilité : à la condition qu'ils soient renfermés dans une hypothèse générale qui puisse embrasser mathématiquement toutes les lois expérimentales d'une science tout entière, et même en faire découvrir d'autres. De ce nombre est la théorie que l'on accepte en Optique. Aussitôt que l'on a admis que la lumière est un mouvement vibratoire de l'éther, la plupart des lois expérimentales deviennent des conséquences que l'on fait découler de l'hypothèse, et l'Optique s'approche de cet état de perfection finale où l'expérience n'est plus qu'un auxiliaire qui vérifie les prévisions de la théorie, au lieu d'être l'unique moyen de rechercher les lois : c'est à ces caractères que l'on juge aujourd'hui les systèmes, c'est à cette condition qu'on les admet.

OBJET DE LA PHYSIQUE. — DISTINCTION DE LA PHYSIQUE ET DE LA CHIMIE. — Nous résumerons de ces considérations générales les deux vérités essentielles qu'elles contiennent : le premier de nos besoins dans l'étude que nous commençons est de trouver des phénomènes et d'en chercher les lois expérimentales; la

seule ressource que nous ayons pour y réussir, c'est d'observer et de mesurer. Fixons maintenant le but et les limites de la Physique.

Le monde est composé d'objets ou corps : les uns sont près de nous, nous pouvons les voir et les toucher; les autres sont placés hors de notre portée, et nous ne pouvons que les voir. Dans tous les cas, nous ne les connaissons que par les impressions qu'ils produisent sur nos sens; quant au principe même qui les constitue, on ne le connaît pas, mais on lui donne un nom : on l'appelle *matière*.

La Physique et la Chimie étudient toutes deux les propriétés de la matière, mais à des points de vue différents.

Les corps qui se présentent à nous offrant des propriétés très diverses, on admet qu'il y a plusieurs espèces de matières : la Chimie s'occupe de les reconnaître et de les classer. Elle a trouvé qu'il existe un certain nombre de matières simples, que celles-ci peuvent se combiner entre elles pour former tous les corps qui se trouvent dans la nature et un grand nombre d'autres qui ne s'y rencontrent pas; elle a donc extrait des composés les éléments qui les forment, elle a constitué ensuite une foule de combinaisons avec ces éléments qu'elle a reconnus. Le rôle de la Chimie est ainsi défini et limité; il se résume dans l'étude individuelle de chaque corps et dans celle de tous les phénomènes de combinaison et de décomposition.

La Physique laisse de côté la question de la composition chimique des corps; elle examine leurs propriétés générales sous les divers états qu'ils présentent et les modifications qu'ils éprouvent sous l'influence des actions mécaniques auxquelles ils sont soumis, ainsi que sous l'influence de la chaleur, de l'électricité, du magnétisme et de la lumière.

Toutefois, la ligne de démarcation entre la Physique et la Chimie demeure quelque peu flottante, parce qu'elle est arbitraire, et il serait aussi difficile que puéril de vouloir la tracer avec une rigueur qui n'est pas compatible avec la nature complexe des phénomènes. Par exemple, on a beaucoup discuté sur la place qu'il convient d'attribuer aux phénomènes de la dissolution et de la cristallisation. Ne pourrait-on pas au besoin revendiquer pour la Physique la notion des équivalents chimiques,

qui s'introduira dans notre étude à propos des lois des chaleurs spécifiques et de l'électrolyse, et même l'universalité des réactions que nous considérerons au point de vue des quantités de chaleur qu'elles dégagent ou qu'elles absorbent? La Physique et la Chimie se rapprochent donc et se pénètrent de plus en plus à mesure qu'elles atteignent une connaissance plus parfaite de leur objet : elles ne seront un jour l'une et l'autre que deux Chapitres de la Mécanique générale.

INSTRUMENTS DE MESURE.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE. — PESANTEUR.

Grandeurs numériques et grandeurs géométriques. — Mouvement rectiligne d'un point matériel. — Vitesse. — Accélération. — Principe de la composition des mouvements. — Mouvement curviligne d'un point matériel. — Vitesse. — Accélération.

Principe de l'inertie. — Forces. — Mesure des forces par l'équilibre. — Équilibre d'un point matériel. — Définition d'un solide rigide. — Composition des forces concourantes et parallèles. — Propriétés des couples. — Théorèmes des moments. — Équilibre d'un corps solide. — Équilibre des corps pesants. — Poids. — Centre de gravité.

Effet d'une force constante sur un corps. — Principe de l'indépendance de l'effet d'une force sur un corps et du mouvement antérieurement acquis par ce corps. — Lois de la chute des corps. — Appareil de M. Morin. — Principe de l'indépendance de l'effet des forces agissant simultanément sur un même corps. — Proportionnalité des forces aux accélérations. — Vérification au moyen de la machine d'Atwood. — Conséquence relative à la composition des forces. — Masse. — Relation entre les forces, les masses et les accélérations. — Poids spécifique. — Densité. — Travail d'une force. — Force vive. — Principe des forces vives.

Des forces naturelles. — Égalité de l'action et de la réaction. — Choc des corps.

Forces centrales. — Effets attribués à la force centrifuge.

On ne doit pas oublier que la Mécanique est, comme la Physique, une science d'observation, que les principes fondamentaux qu'elle invoque ne sont rien moins qu'évidents, que

plusieurs d'entre eux ne sont universellement admis que depuis un ou deux siècles, et qu'ils peuvent être mis au rang des conquêtes les plus précieuses comme aussi les plus péniblement acquises de la Physique moderne.

Aujourd'hui que la Mécanique rationnelle, appliquée aux mouvements visibles des corps, n'a plus rien à tirer de l'expérience, la Mécanique moléculaire, dont l'objet se confond avec celui de la Physique, se développe à son tour par l'application des mêmes méthodes et tend de plus en plus à se rapprocher des sciences exactes. Il convient donc de commencer notre étude en rappelant les origines expérimentales de la Mécanique, puisqu'elles nous appartiennent; nous ne pouvons d'ailleurs nous passer de rappeler un certain nombre de définitions ou de théorèmes sur le mouvement et les forces, dont nous aurons à faire, dans tout ce qui suivra, le plus fréquent usage.

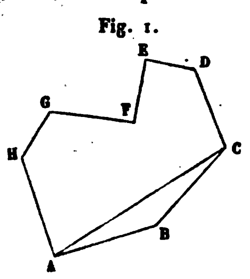
GRANDEURS NUMÉRIQUES ET GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES. — Parmi les grandeurs que nous aurons à considérer en Mécanique ou en Physique, les unes sont purement numériques, comme la durée d'un phénomène, la surface d'une figure géométrique, le volume, la masse ou la densité d'un corps; d'autres ne sont complètement définies que quand on assigne une direction dans laquelle la grandeur doit être comptée : ainsi, la vitesse ou l'accélération du mouvement d'un mobile, la force à laquelle il est soumis, etc. Les quantités déterminées à la fois en grandeur numérique et en direction peuvent être désignées sous le nom de *grandeurs géométriques*. On les représente par une droite de même direction et de longueur proportionnelle.

Pour additionner deux grandeurs géométriques AB et BC, on convient de les porter bout pour bout; la ligne AC qui ferme le triangle est, par définition, la résultante des deux grandeurs géométriques. On voit aisément d'après cela que, s'il faut ajouter un nombre quelconque de grandeurs géométriques AB, BC, CD, ..., la règle à suivre consistera à les porter bout pour bout et à fermer le polygone ouvert ainsi constitué en joignant le point A à l'extrémité H de la dernière longueur à ajouter (*fig.* 1). Si le polygone se ferme de lui-même, la résultante de toutes les grandeurs géométriques est nulle. La

somme des projections sur un axe quelconque des grandeurs AB, BC, ... est toujours égale à la projection sur le même axe de la grandeur résultante AH.

Le mode conventionnel d'addition que nous venons d'indiquer ne peut être justifié *a priori* que dans des cas très particuliers : par exemple, si les lignes AB, BC, ... représentent les déplacements *successifs* d'un mobile, sa position finale est en H, mais il n'est pas évident qu'il en sera de même si les causes qui produiraient individuellement les déplacements AB, BC, ... agissent simultanément. C'est cependant ce que l'expérience vérifie, non-seulement pour les mouvements, mais aussi pour toutes les grandeurs géométriques usitées en Mécanique et en Physique.

Fig. 1.



MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL. — VITESSE. — On appelle *point matériel* un solide assez petit pour qu'on puisse physiquement en confondre les diverses parties.

Quand un point matériel se meut en ligne droite, on dit que son mouvement est uniforme quand les espaces parcourus e sont proportionnels aux temps t employés à les parcourir :

$$e = vt; \quad (1)$$

v est l'espace parcouru dans l'unité de temps ou la *vitesse*.

En général, l'espace e est une fonction quelconque $f(t)$ du temps,

$$e = f(t), \quad (2)$$

et l'on appelle *vitesse moyenne* du mobile dans l'intervalle de t_1 à t_2 le quotient

$$V = \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1}, \quad (3)$$

et *vitesse au temps* t_1 la limite vers laquelle tend ce rapport V quand on pose $t_2 = t_1 + \alpha$ et qu'on fait tendre α vers zéro par des valeurs positives. On a donc par définition, pour la vitesse v au temps t,

$$v = f'(t). \quad (4)$$

du temps par la relation

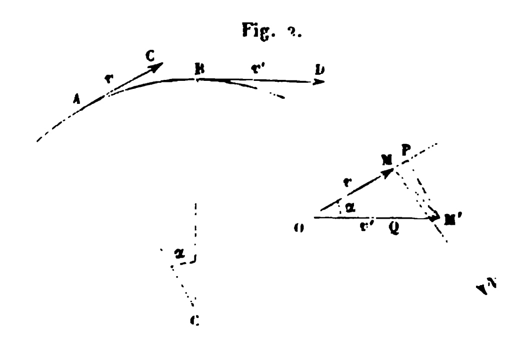
$$s = f(t);$$

la vitesse est alors

$$v = f'(t).$$

Quant à l'accélération, on la détermine en se fondant sur le principe de la composition des vitesses; si par un point O de l'espace on mène des droites OM, OM' (*fig.* 2) égales et pa-

Fig. 2.



rallèles aux vitesses v et v' du mobile aux points A et B de la trajectoire, on peut considérer la vitesse v' comme résultant de la vitesse v et d'une vitesse égale à MM' en grandeur et en direction; MM' est la variation de la vitesse de A en B. L'accélération sera, en grandeur, la limite MN vers laquelle tend le quotient de MM' par le temps θ employé à franchir l'espace AB, quand on suppose que le point B s'approche indéfiniment du point A; sa direction sera la direction limite de MM'.

On peut substituer à la vitesse MM' ses composantes MP et MQ dans la direction de la vitesse primitive, c'est-à-dire de la tangente à la trajectoire en A, et dans une direction perpendiculaire, qui est celle de la normale AC; en prenant la limite du quotient de ces vitesses par le temps θ, on obtiendra les composantes S et N de l'accélération suivant la tangente et suivant la normale à la trajectoire.

$$S = \lim \frac{MP}{\theta} = \lim \frac{v' - v}{\theta} = f''(t),$$

$$N = \lim \frac{MQ}{\theta} = \lim \frac{v\alpha}{\theta};$$

α est l'angle des vitesses v et v', égal à celui des tangentes, et par suite des normales en A et B. En désignant par ρ le rayon de courbure de la trajectoire en A, on a

$$\lim \mathrm{AB} = \lim v\theta = \lim \rho\alpha,$$

d'où

$$\lim \frac{\alpha}{\theta} = \frac{v}{\rho},$$

$$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}.$$

La limite de $\frac{\alpha}{\theta}$ est souvent désignée sous le nom de *vitesse angulaire;* la composante normale N de l'accélération (due au changement de direction de la vitesse) s'appelle *accélération centripète;* on nomme enfin *accélération tangentielle* la composante S dirigée suivant la tangente et provenant de la variation de grandeur de la vitesse.

En particulier, dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme de période égale à T et s'exécutant sur une circonférence de rayon R, l'accélération tangentielle S est nulle; la vitesse angulaire $\frac{v}{\mathrm{R}}$ est constante et égale à $\frac{2\varpi}{\mathrm{T}}$; enfin l'accélération centripète a pour valeur constante

$$\mathrm{N} = \frac{2\varpi\mathrm{R}}{\mathrm{T}}\,\frac{2\varpi}{\mathrm{T}} = \frac{4\varpi^2\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}.$$

PRINCIPE DE L'INERTIE (¹). — **FORCES.** — On sait de temps immémorial que si un corps est au repos il y reste et qu'il faut un effort pour le déplacer; il faut aussi pour l'arrêter, s'il se meut,

(¹) Le principe de l'inertie a été énoncé pour la première fois par Kepler, mais d'une manière incomplète, car il indique seulement qu'un corps en repos ne peut de lui-même se mettre en mouvement; c'est Galiléo qui a complété la notion de l'inertie de la matière en établissant qu'un corps ne peut de lui-même changer la grandeur ni la direction de sa vitesse (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 165 et 234; Leipzig, 1879).

exercer un effort de sens contraire à la direction de son mouvement. Ce fait d'observation vulgaire a été interprété en disant que la matière est inerte et que son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme ne peut être modifié que par l'effet de *forces extérieures*. Toutefois, nous ignorons en quoi consistent ces forces, dont l'idée nous vient d'une sensation, celle de l'*effort*, que nous ne pouvons raisonnablement transporter chez les êtres inanimés. L'expérience nous révèle pourtant chaque jour que les corps entrent en mouvement sans l'intervention des êtres vivants, par exemple que les corps pesants tombent sur le sol, que les corps électrisés s'attirent ou se repoussent, etc. Il faut donc voir, dans le principe de l'inertie et dans la conception des forces inanimées en tant que distinctes de la matière en mouvement), plutôt une fiction analytique commode que l'expression d'une réalité absolue. Aussi quelques mathématiciens ont-ils essayé, non sans succès, de se passer de la notion de force dans l'exposition des lois de la Mécanique rationnelle [1]. Nous la conserverons pour nous conformer à l'usage le plus répandu et aussi pour laisser à l'énoncé des lois physiques une simplicité qui leur fait souvent défaut dans le système opposé.

Nous dirons qu'un point matériel est soumis à une force chaque fois qu'il sera animé d'un mouvement autre que le mouvement rectiligne et uniforme; nous verrons plus tard comment on peut déduire la grandeur et la direction de cette force de la considération de son mouvement : c'est ce qu'on est obligé de faire pour calculer l'attraction du Soleil sur les planètes par exemple; mais il est en général plus commode de mesurer les forces dont on dispose en ayant recours à un phénomène d'équilibre.

MESURE DES FORCES PAR L'ÉQUILIBRE. — On dit que deux forces sont égales quand, appliquées en sens contraires à un même point matériel, elles ne modifient pas son état de repos ou de

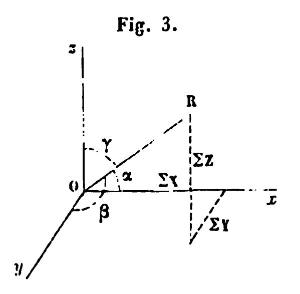
(1) Par exemple, G. Kirchhoff, dans ses *Vorlesungen über mathematische Physik*, 2e édition; Leipzig, 1877.

mouvement, c'est-à-dire qu'elles se font équilibre ; qu'une force est double, triple d'une autre quand elle peut faire équilibre à la réunion de deux, trois forces égales à la dernière appliquées en sens contraires au même point. Grâce à ces définitions, on peut arriver à comparer expérimentalement deux forces quelconques, par conséquent à les mesurer au moyen d'une unité de force arbitraire.

On représente une force en portant dans la direction où elle agit, et à partir de son point d'application, une longueur proportionnelle à la grandeur de la force.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL. — Quand plusieurs forces sont appliquées en un même point matériel, on démontre *a priori* (et nous établirons ultérieurement, en nous fondant sur la composition des accélérations) qu'on peut les composer comme des grandeurs géométriques ([1]) et les remplacer par une résultante unique. Le point matériel sera en équilibre si cette résultante est nulle.

Fig. 3.



Pour exprimer la condition analytique de cet équilibre, il suffit de projeter toutes les forces suivant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ([2]). D'après la règle de la composition des grandeurs géométriques, la projection de la résultante sur chacun de ces axes est égale à la somme des projections X, Y, Z de chacune des composantes. Soient R la résultante, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes (*fig.* 3);

([1]) Aristote (*Quæstiones mechanicæ*) indique la règle pour déterminer la résultante de deux forces rectangulaires, mais Stevin (*De Beghinselen der Weegkonst*, Leiden, 1586) est le premier qui ait enseigné à composer deux forces quelconques. Galilée a donné plus tard la démonstration rigoureuse de la règle du parallélogramme (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 235).

([2]) C'est à Maclaurin que l'on doit l'idée de ce mode de décomposition d'un usage si universel (*Traité des fluxions*). *Voir* BOSSUT, *Histoire des Mathématiques*, t. II, p. 188.

on a pour déterminer α, β, γ et R les équations

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma X}{R},$$

$$\cos\beta = \frac{\Sigma Y}{R},$$

$$\cos\gamma = \frac{\Sigma Z}{R},$$

$$R = \sqrt{\overline{\Sigma X}^2 + \overline{\Sigma Y}^2 + \overline{\Sigma Z}^2}.$$

Pour que R soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0.$$

Ce sont les trois équations de l'équilibre du point matériel.

DÉFINITION D'UN SOLIDE RIGIDE. — Jusqu'ici nous avons borné notre étude au cas du mouvement ou de l'équilibre d'un point idéal. Pour trouver les conditions de l'équilibre ou du mouvement des corps réels, il faut introduire certaines hypothèses sur leur constitution, ou plutôt il faut déterminer par l'expérience leurs propriétés mécaniques générales et exprimer celles-ci analytiquement. On se contentera au besoin d'une expression qui ne représente la réalité qu'à un certain degré connu d'approximation.

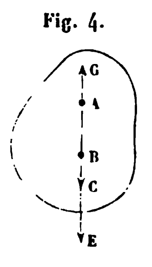
Tous les corps de la nature se déforment plus ou moins sous l'influence des forces qui leur sont appliquées, et changent de volume. Ces effets sont si faibles dans le cas de certains corps solides, comme les métaux en barres ou en plaques épaisses, qu'on peut simplifier le problème en supposant ces corps absolument incompressibles et de forme invariable. C'est dans cette hypothèse que se sont placés les mécaniciens pour faire l'étude de l'équilibre des solides, ou *Statique* proprement dite. On étudie ensuite à part, et sous le nom d'*Élasticité des solides*, les déformations et les variations de volume très faibles produites par l'action des forces sur ces corps.

Les liquides sont encore moins compressibles que les solides, mais ils se déforment avec une si extrême facilité, qu'on peut admettre, à titre de première approximation, que le glissement de leurs parties n'est accompagné d'aucune réaction élastique. Les mécaniciens ont ainsi substitué aux liquides réels plus ou moins visqueux des fluides dits *parfaits*, et ils ont étudié sous le nom d'*Hydrostatique* les conditions de leur équilibre. Les phénomènes capillaires, le frottement intérieur des liquides réels, leur compressibilité sont ensuite étudiés séparément.

Quant aux gaz, les variations de volume qu'ils éprouvent par l'effet de la pression sont si considérables, que l'étude de leur équilibre est à peu près inséparable de celle de leur élasticité. Dans ce Chapitre, nous ne nous occuperons que des solides rigides.

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES ET PARALLÈLES. — Il résulte de la définition d'un solide rigide que l'on peut transporter fictivement le point d'application réel A d'une force AC (*fig.* 4) en un point quelconque B de sa direction. On peut, en effet, sans rien changer à l'état du corps, appliquer en B deux forces BE, BG égales à AC, l'une dans la direction AB, l'autre en sens contraire, car elles se font équilibre. Le corps est alors soumis à l'action de trois forces AC, BG et BE, dont les deux premières ne pourraient avoir d'effet que pour rapprocher le point B du point A, ce qui est contraire à la définition d'un solide rigide; nous en ferons abstraction, et il ne restera que la force BE, qui se trouve substituée à AC.

Fig. 4.



Quand plusieurs forces sont concourantes, on les transporte en leur point de rencontre, et les conditions de l'équilibre du solide soumis à leur action se trouvent ramenées à celles d'un point matériel.

Quand plusieurs forces appliquées à un même corps sont parallèles, elles concourent à l'infini, et leur résultante, égale à leur somme, peut être transportée en un point quelconque de sa direction sur le corps. Parmi ces points, il en est un qui

ne change pas lorsque, sans modifier la grandeur des forces, on les fait toutes tourner d'un même angle arbitraire autour de leurs points d'application : c'est le *centre des forces parallèles*.

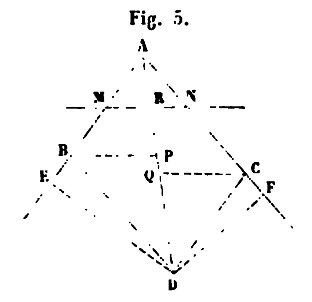


Fig. 5.

Nous allons démontrer cette importante propriété pour le cas de deux forces. Considérons d'abord deux forces concourantes AB et AC appliquées à un même corps solide; menons une sécante quelconque MNR, et transportons les forces AB en M, AC en N et la résultante AD en R. Cherchons ensuite la valeur du rapport $\frac{MR}{NR}$. Les triangles semblables AMR, ABP, ANR, AQC donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{MR}{BP} = \dfrac{AR}{AP}, \\[2ex] \dfrac{NR}{QC} = \dfrac{AR}{AQ}; \end{cases}$$

les triangles égaux ABP, DQC donnent encore

$$(2)\qquad BP = QC.$$

Des équations (1), (2) et (3) on tire

$$(3)\qquad \frac{MR}{NR} = \frac{AQ}{AP}.$$

Comme d'ailleurs on a, dans les triangles ACQ, APB,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{AQ}{\sin ACQ} = \dfrac{AC}{\sin AQC}, \\[2ex] \dfrac{AP}{\sin ABP} = \dfrac{AB}{\sin AQC}, \end{cases}$$

il vient enfin

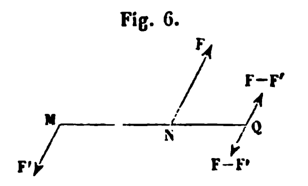
$$(5)\qquad \frac{MR}{NR} = \frac{AC}{AB}\,\frac{\sin ACQ}{\sin ABP} = \frac{AC}{AB}\,\frac{\sin ANR}{\sin AMR}.$$

Imaginons maintenant que les forces AB et AC demeurent invariables en grandeur, qu'elles soient toujours appliquées en M et N, mais que leur point de concours s'éloigne indéfiniment de la droite MN. Le théorème exprimé par l'équation (3) subsiste toujours, et le rapport $\frac{MR}{NR}$ tend vers la limite $\frac{AC}{AB}$. Le point d'application R de la résultante de deux forces parallèles divise donc la droite qui joint leurs points d'application M et N en parties inversement proportionnelles à ces forces. Ce résultat est indépendant de l'angle de leur direction AR avec la ligne MN ([1]).

On passera sans peine au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles et de même sens.

Quand il y a des forces parallèles dans deux directions opposées, on réunira, d'après ce qui précède, les forces de chaque groupe en une seule, et l'on n'aura plus affaire qu'à deux forces F et F' parallèles et de directions opposées, appliquées en deux points M et N (*fig.* 6). Soit Q le point qui divise extérieurement la distance MN en parties proportionnelles à ces forces; nous pouvons, sans modifier les conditions dans lesquelles se trouve le solide, appliquer en Q deux forces de sens contraires, parallèles à F et F', et ayant pour grandeur F — F'. Le corps est alors soumis à quatre

Fig. 6.



---

(1) L'équation

$$\frac{MR}{NR} = \frac{AC}{AB}$$

exprime la condition d'équilibre d'un levier MNR dont le point d'appui est R, quand des forces parallèles sont appliquées à ses extrémités M et N.

Du point D (*fig.* 5) abaissons sur les directions de AB et de AC les perpendiculaires DE et DF; l'égalité des triangles ABD, ADC donne

$$AB \,.\, DF = AC \,.\, DE.$$

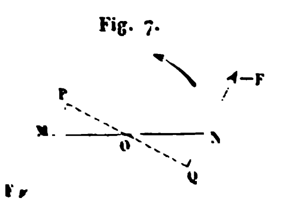
Cette équation exprime la condition de l'équilibre d'un levier coudé FDE appuyé en D, et soumis à des forces AB et AC perpendiculaires à l'extrémité de ses deux bras.

La connaissance des lois de l'équilibre du levier résume à peu près toute la Mécanique des anciens.

forces ; mais la force F′ appliquée en M, F — F′ appliquée en Q, parallèles et de même sens, donnent, d'après la règle démontrée ci-dessus, une résultante égale à F appliquée en N et directement opposée à NB. Il ne reste plus que la force F — F′ appliquée en Q et dirigée dans le sens de la force F la plus grande : c'est la résultante de F et de F′.

PROPRIÉTÉS DES COUPLES (1). — Si F = F′, le point Q se trouve rejeté à l'infini, et le système des deux forces, égales, parallèles et de sens contraires, ne peut plus être remplacé par une résultante unique. Ce système (*fig.* 7) s'appelle un *couple;* il tend à faire *tourner* le solide auquel il est appliqué dans le plan du couple, comme l'indique la flèche, et jusqu'à ce que la droite MN se trouve dans la direction des forces.

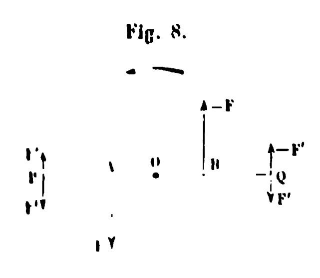
Fig. 7.



Les couples sont des grandeurs particulières qu'il convient d'étudier à part et qui sont susceptibles de transformations remarquables. On appelle *moment* d'un couple le produit de la force F par le bras de levier PQ, c'est-à-dire par la distance normale des deux forces. Deux couples de même moment sont équivalents.

En effet : 1° on peut substituer à un couple (F, — F) appliqué en AB (*fig.* 8) un couple (F′, — F′) de même moment ayant son bras de levier suivant la même droite et son centre au même point. Appliquons aux points P et Q, tels que F′PQ = FAB, quatre forces égales à F′ et opposées deux à deux. On peut composer — F′ appliquée en P et — F appliquée en Q, F′ appliquée en B et F appliquée en A : les résultantes sont égales, opposées et appliquées en O ; elles se détruisent, et il ne reste que le couple (F′, — F′) appliqué en PQ et tendant à

Fig. 8.

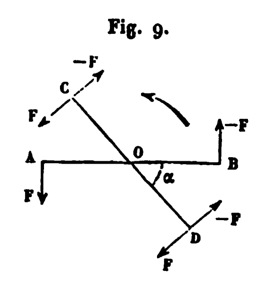


(1) La théorie des couples est due à Poinsot (*Éléments de Statique*, Paris, 1803).

produire une rotation de même sens que le couple primitif qu'il remplace.

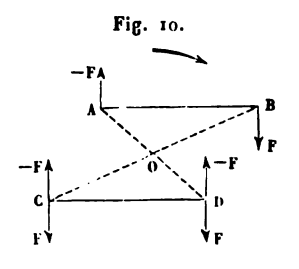
2° On peut substituer au couple (F, — F) appliqué en AB (*fig.* 9) un autre couple (F, — F) dont le bras de levier CD, ayant son centre en O, fait un angle α quelconque avec AB. Car, si l'on applique en C et D, perpendiculairement à CD, quatre forces égales à F et disposées de manière à se faire équilibre deux à deux, on reconnaît que F appliquée en A et — F appliquée en C donnent, par raison de symétrie, une résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle COA; celle-ci est équilibrée par la résultante égale et directement opposée des forces — F appliquée en B et F appliquée en D; il ne reste plus que le couple (F, — F) appliqué en CD et tendant à produire une rotation de même sens que le couple primitif.

Fig. 9.



3° On peut substituer au couple (F, — F) appliqué en AB (*fig.* 10) un autre couple (F, — F) appliqué en CD, parallèle et situé dans le plan du premier couple ou dans un plan parallèle. Joignons AD et BC, et appliquons en CD quatre forces égales à F et se faisant équilibre deux à deux; nous pouvons remplacer les forces F en A et D par leur résultante 2F appliquée en O, laquelle sera équilibrée par la résultante des forces — F appliquées en C et B; il ne reste que le couple (F, — F) en CD.

Fig. 10.



D'après ces théorèmes, on pourra toujours substituer à un couple un autre couple de même moment, situé dans son plan ou dans un plan parallèle et tendant à produire une rotation de même sens. On représente un couple par une longueur égale à son moment portée perpendiculairement à son plan et dans un sens tel qu'un observateur placé suivant l'axe [1] voie la

[1] De telle sorte que la direction de l'axe le traverse des pieds à la tête.

... effectuer dans une direction
... mouvement des aiguilles
... D'après ce qui précède,
... lemontrer que la règle
... composer ces grandeurs est
... couples.
... composer des couples
... parallèles par la
... le cas de deux
... rapport à l'autre.
... rendre leurs
... à leurs mo-
... dans son plan
... leurs forces
... de ces plans
... levier AB, AC
... cette inter-
... Nous avons alors
... appliquées en
... appli-
... B et C, que
... résultante
... intersection des
... ABGC.
... bras de levier
... par le couple
... résultant des deux
...
... levier sont AB,
... justement
... plan ABC, et
... à AB,
... figure de 90° au-
... dans le sens de la
... dans leur nouvelle position,

... corps soumis à l'action des couples
... d'un mouvement de translation.

représentent les axes des couples composants et du couple ré sultant. Ce dernier est bien la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres.

THÉORÈMES DES MOMENTS. — On appelle *moment* d'une force par rapport à un plan le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan. Ce moment est considéré comme positif ou négatif, selon que le point d'application est situé de part ou d'autre du plan p rapport auquel sont comptés les moments.

Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles est égal à la somme des moments de ces forces.

Prenons d'abord pour plan des moments un plan P parallèle aux forces. Le moment de chacune d'elles F est alors égal au moment d'un couple (F, — F) dont le plan serait perpendiculaire au plan P, et le théorème énoncé n'exprime que le théorème de la composition des couples dont les axes sont parallèles.

Prenons maintenant un plan Q faisant un angle α avec la direction des forces. Soient F l'une d'elles, L la longueur de la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan. $FL\cos\alpha$ serait le moment d'un couple de force $F\cos\alpha$, de bras de levier L et dont le plan serait perpendiculaire au plan Q. Soient de même D la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre des forces parallèles, R la résultante. Le principe de la composition des couples dont les axes sont parallèles donne

$$\Sigma FL\cos\alpha = RD\cos\alpha,$$

c'est-à-dire, en divisant par $\cos\alpha$,

$$\Sigma FL = RD.$$

Les théorèmes analogues déduits de la composition des couples quelconques sont les suivants :

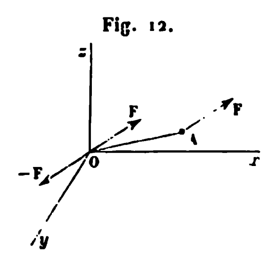
1° *Si d'un point* S *de l'espace on abaisse des perpendiculaires sur la direction d'une série de forces concourantes, la somme des produits de chaque force par la perpendiculaire correspondante est égale au produit analogue relatif à la résultante.*

2° *Si l'on projette une série de forces concourantes sur un axe, la somme des produits de la projection de chaque force sur l'axe par la distance de son point d'application à l'axe est égale au produit analogue relatif à la résultante.*

Le lecteur démontrera ces propositions sans difficulté.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE. — Grâce aux notions qui précèdent, nous sommes en mesure de fixer les conditions de l'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de forces quelconques. Prenons un point quelconque O (*fig.* 12) à l'intérieur de ce solide, et appliquons-y en sens contraires deux forces égales et parallèles à chacune des forces F auxquelles le corps est soumis. Ces forces, se faisant équilibre, ne troublent pas l'état du corps; mais on peut considérer séparément la force F appliquée en O et le couple formé par les forces (F, — F) appliquées en A et en OF. On aura ainsi réduit le système des forces F données à un système de forces concourantes en O et à un système de couples dont l'une des forces est toujours en O.

Fig. 12.



On remplacera les forces F concourantes par leur résultante R; quant aux couples, on les composera en un couple unique dont nous représenterons l'axe par C.

Si le plan du couple est parallèle à la résultante R, on composera les forces du couple et la force R en une résultante unique. Dans le cas contraire, le système des forces F données n'admet pas de résultante.

Pour que le solide soit en équilibre, il faut que la force R et le couple C soient nuls séparément. On peut décomposer R en ses composantes X, Y, Z suivant trois axes rectangulaires, et l'axe du couple en trois axes P, Q, S dirigés aussi suivant les axes de coordonnées. Comme on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$C = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2},$$

les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre sont au nombre de six, exprimées par les équations

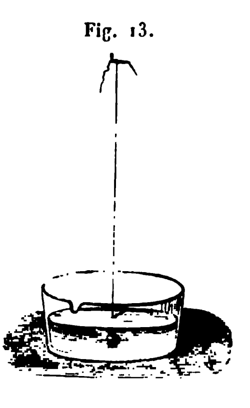
$$X = 0, \quad P = 0,$$
$$Y = 0, \quad Q = 0,$$
$$Z = 0, \quad S = 0.$$

ÉQUILIBRE DES CORPS PESANTS. — POIDS. — CENTRE DE GRAVITÉ. — Comme cas particulier, étudions l'équilibre des corps pesants. La pesanteur est la force qui fait tomber les corps non soutenus ou qui les appuie sur leurs supports. Elle est appliquée aux molécules mêmes des corps, car les plus petits fragments d'un corps obéissent à la pesanteur.

Les actions élémentaires que la pesanteur exerce sur un corps ont une résultante. En effet, on peut maintenir un corps pesant en équilibre à l'extrémité d'un fil auquel on le suspend; la tension de celui-ci est égale et de sens contraire à cette résultante, c'est-à-dire au *poids* du corps.

La direction de la pesanteur est normale à la surface d'un liquide en équilibre. Pour s'en convaincre, il suffit de plonger la balle d'un fil à plomb (*fig.* 13) dans un vase plein d'eau noircie et d'examiner à la fois le fil et son image réfléchie : ce sont deux lignes droites qui se voient dans le prolongement l'une de l'autre. On s'en assure en plaçant devant l'œil un second fil à plomb que l'on place de manière à cacher le premier; on constate qu'il couvre aussi son image, et, comme cette condition est remplie quelle que soit la position de l'observateur, il faut que le fil soit normal à la surface du liquide.

Fig. 13.



Des fils à plomb voisins sont parallèles comme normaux à un même plan : la direction de la pesanteur en un même lieu est donc invariable, et les forces individuelles auxquelles se trouvent soumises les molécules pesantes sont parallèles. Le centre de ces forces parallèles s'appelle *centre de gra-*

vité (1). On peut le définir par cette propriété physique que, si le centre de gravité est soutenu, le corps se trouve en équilibre dans toutes les positions qu'on lui donne.

Pour déterminer expérimentalement la position du centre de gravité d'un corps, il suffit de le suspendre successivement par deux points de sa surface et de prolonger à son intérieur les directions du fil de suspension. Le point d'intersection de ces deux droites est le centre de gravité.

COMPARAISON DES FORCES AUX POIDS. — On vérifie, par la flexion d'un ressort, que le poids d'un corps dans un même lieu est invariable. La pesanteur est donc une force constante.

On pourra comparer les poids entre eux à l'aide d'un appareil quelconque fondé sur les lois de la Statique, par exemple à l'aide d'un levier, d'une balance, etc. On prend pour unité de poids le *gramme :* c'est, par définition, le poids de 1^{cc} d'eau distillée prise à la température de son maximum de densité; mais pratiquement on appelle *gramme* la millième partie du poids du kilogramme étalon construit par ordre de la Convention nationale pour répondre à la définition précédente, et qui est déposé au Conservatoire des Arts et Métiers.

Toutes les forces peuvent être évaluées en poids. La comparaison des forces aux poids s'effectue par des phénomènes d'équilibre, à l'aide de *dynamomètres* appropriés, tels que ressorts, balance de torsion, balance bifilaire, etc. La forme des appareils change d'ailleurs suivant la nature et la grandeur des forces à mesurer, et devra être étudiée à part dans chaque cas.

EFFET D'UNE FORCE CONSTANTE SUR UN CORPS. PRINCIPE DE L'INDÉPENDANCE DE L'EFFET D'UNE FORCE SUR UN CORPS ET DU MOUVEMENT ANTÉRIEUREMENT ACQUIS PAR CE CORPS (2). — L'effet d'une force

---

(1) Le problème de la détermination des centres de gravité avait été résolu par les anciens dans un grand nombre de cas.

(2) Ce principe est dû à Galilée; ses recherches sur la pesanteur, qui ont fait faire de si grands progrès à la Mécanique, sont exposées dans ses *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica*, etc., publiés pour la première fois à Leyde en 1638 (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 231).

sur un corps libre de se mouvoir ne peut être que de faire varier la grandeur ou la direction de la vitesse dont il est animé, c'est-à-dire de produire une accélération. On admet que *l'effet d'une force sur un corps est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce corps*, ce qui revient à dire qu'*une force constante en grandeur et en direction produit aussi une accélération constante.*

Si le corps est sans vitesse initiale ou animé d'un mouvement de translation de même direction que la force, le mouvement sera uniformément varié. La formule générale de ce mouvement (p. 15) est

$$(1) \qquad e = f(t) = a + bt + \frac{ct^2}{2},$$

d'où

$$(2) \qquad v = f'(t) = b + ct.$$

Quand la vitesse initiale b est nulle ou de même sens que la force, le mouvement est uniformément accéléré; quand elle est de sens contraire, le mouvement sera d'abord uniformément retardé, puis, pour une valeur du temps déterminée par la relation

$$t = -\frac{b}{c},$$

la vitesse changera de signe et le mouvement deviendra uniformément accéléré. A ce moment le mobile est à une distance de l'origine égale à

$$a - \frac{b^2}{c}.$$

Quand on suppose a et b nuls, les formules (1) et (2) deviennent

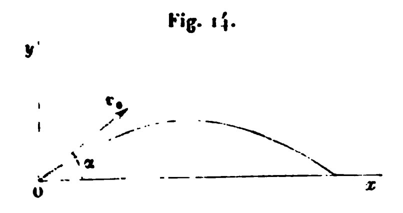
$$(3) \qquad \begin{cases} e = \dfrac{ct^2}{2}, \\ v = ct. \end{cases}$$

Éliminant t entre les équations (3), on obtient encore la relation intéressante

$$e = \frac{v^2}{2c}.$$

Considérons un point matériel soumis à une force constante dont la direction ne coïncide pas avec celle de la vitesse initiale, le mouvement produit peut être considéré comme résultant de la superposition d'un mouvement uniforme dans la direction de la vitesse initiale et d'un mouvement uniformément accéléré dans la direction de la force (¹).

Fig. 14.



Soit v_0 la vitesse initiale (*fig.* 14); la position du point matériel rapporté à deux axes rectangulaires passant par l'origine O du mouvement dépendra des équations

$$x = v_0 \cos\alpha t,$$

$$y = v_0 \sin\alpha t - \frac{ct^2}{2},$$

qui, par l'élimination de t, donnent l'équation

$$y = x \operatorname{tang}\alpha - c\frac{x^2}{2v_0\cos^2\alpha}$$

de la trajectoire. C'est une parabole ayant son axe parallèle à Oy.

La discussion de cette équation fournit la théorie élémentaire du mouvement des projectiles.

LOIS DE LA CHUTE DES CORPS. — Le principe de l'indépendance de l'effet d'une force sur un corps et du mouvement antérieurement acquis par ce corps sur lequel nous venons de nous appuyer n'est pas évident *a priori*. On peut le démontrer par l'expérience, par exemple pour le cas du mouvement des corps pesants; mais il faut alors se mettre à l'abri des effets de la résistance de l'air. Quand on fait tomber des corps dans l'air, on observe, en effet, qu'ils tombent avec des vitesses différentes, et Galilée a reconnu qu'il faut en chercher la cause dans la résistance opposée par l'air à leur mou-

(¹) Cette proposition a été énoncée par Galilée.

vement; il le démontrait par des expériences relativement grossières (1), auxquelles on substitue aujourd'hui la suivante, attribuée à Newton.

Prenons un tube (*fig.* 15), long de 2^{m} environ, muni à l'une de ses extrémités d'une simple couverture de métal qui le ferme, et à l'autre d'une douille métallique mastiquée, prolongée par un tube à robinet et terminée par un écrou qui s'accorde avec l'extrémité du conduit d'une machine pneumatique. Le tube contient des parcelles de diverses substances choisies parmi celles dont la chute libre est la plus inégale. On fait le vide, on ferme le robinet, on enlève le tube, et, le retournant brusquement, on voit tomber les corps qu'il contient. Leur chute se fait d'ensemble, sans que l'un d'eux prenne l'avance ou reste en arrière. Ensuite on ouvre le robinet pendant un temps très-court, ce qui permet la rentrée d'une petite quantité d'air et suffit pour retarder la chute de quelques-unes des parcelles. Enfin, quand on a laissé le robinet entièrement ouvert et que le tube est totalement rempli de gaz, les différences de vitesse sont devenues très-grandes. Il est donc démontré que l'air exerce une action perturbatrice, qu'il retarde inégalement les diverses substances dans leur chute, mais que, si l'on étudiait les lois de la pesanteur dans le vide, elles seraient les mêmes pour tous les corps.

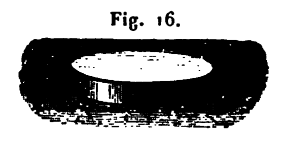
Fig. 15.

Citons encore deux expériences sur le même sujet. On prend d'abord une pièce de monnaie, et l'on taille dans une feuille de papier mince une rondelle

(1) Galilée avait été conduit à admettre que tous les corps tombent également dans le vide en observant que l'oscillation d'un pendule, qui est une véritable chute, a la même durée quelle que soit la matière dont il est formé. La célèbre expérience de la tour penchée de Pise ne fut exécutée que pour servir de vérification (Poggendorff, *Geschichte der Physik*, p. 218, 224 et suiv.). Newton répéta avec soin les expériences du pendule et en conclut que la pesanteur agit bien sur les corps proportionnellement à leur masse.

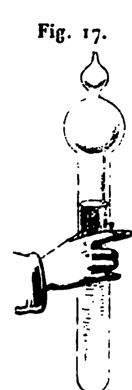
égale en diamètre (*fig.* 16). Quand on les fait tomber séparément, on voit la rondelle marcher plus lentement que la monnaie ; quand on pose le papier sur le métal et qu'on les abandonne ensemble, l'air n'agit plus sur la rondelle, qui suit le métal et prend le même mouvement que lui.

Fig. 16.



La deuxième expérience exige un appareil spécial : c'est un tube de verre (*fig.* 17) arrondi et fermé par un bout, pointu et ouvert à l'autre. On remplit la moitié de sa capacité avec de l'eau qu'on fait bouillir; il se forme des vapeurs qui balayent le tube, et, quand elles ont expulsé l'air qu'il contenait, on le ferme au chalumeau. On a préparé ainsi un vase contenant de l'eau et vide d'air, et, quand on le retourne brusquement, l'eau tombe en une seule masse, au lieu de se diviser en gouttelettes comme dans l'air, et frappe le fond avec un bruit sec, qui fait donner à l'appareil le nom de *marteau d'eau*.

Fig. 17.



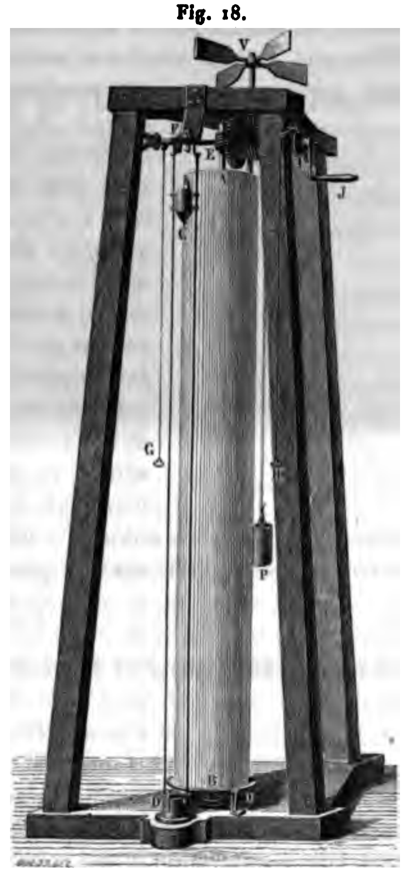
Ainsi, tous les corps tombent également dans le vide. C'est dans le vide qu'il conviendrait d'étudier leur chute, mais on rencontrerait des difficultés que l'on n'a pas cherché à surmonter. On s'est contenté, en opérant dans l'air, de choisir ceux des corps qu'il retarde le moins : ce sont les métaux. Nous allons dès lors employer l'appareil suivant.

APPAREIL DE M. MORIN ([1]). — Trois madriers de bois (*fig.* 18) réunis à leur sommet et à leur base, et qui ont 2^m à 3^m de hauteur, soutiennent toutes les pièces de l'instrument. La principale est le mobile que l'on voit en C; c'est un poids cylindroconique de fer qui glisse en tombant le long de fils métalliques tendus verticalement, afin de le diriger dans sa chute : pour le soutenir avant l'expérience, on l'accroche à la pointe re-

([1]) Décrit pour la première fois par M. Morin (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX, p. 2).

courbée d'un levier F; pour le faire tomber, on relève le crochet en tirant le fil G. Alors il parcourt toute la hauteur de l'appareil et s'enfonce à la fin de sa course dans un tube D où il reste; c'est ce mouvement qu'il faut étudier.

Fig. 18.



A cet effet, on a disposé vis-à-vis et tout près du poids un cylindre de sapin AB, qui doit recevoir un mouvement rapide de rotation; pour le lui communiquer, on a fixé sur l'axe, en E, une vis sans fin; elle engrène avec une roue dentée, et celle-ci fait partie d'un treuil horizontal FI qu'un poids P sollicite à tourner. On le remonte avec une manivelle J, et on le lâche ou on l'arrête par un crochet correspondant à la poignée G. Aussitôt qu'on tire celle-ci, le mouvement du treuil commence, et celui du cylindre se produit avec une vitesse qui s'accélère peu à peu jusqu'au moment où la résistance, développée par un moulin à ailettes V, la rende constante. On attend que cette uniformité soit atteinte avant d'opérer.

Le poids C porte en outre un crayon dont la pointe, poussée par un ressort, appuie sur la surface du cylindre que l'on a enveloppé d'une feuille de papier. Avant que la chute ait commencé, le crayon décrit sur le cylindre un cercle horizontal; aussitôt que le mobile se met en mouvement, le crayon s'abaisse avec

lui et marque une courbe qu'il n'y a plus qu'à étudier pour connaître la loi de la chute.

Traçons sur la surface du cylindre des génératrices équidistantes, en faisant passer la première par l'origine de la courbe. Elles sont venues se placer successivement dans la verticale que parcourt le crayon pendant la chute, après des temps

Fig. 19.

0, 1, 2, 3, ..., puisque la rotation est uniforme; leurs distances x à l'origine sont donc proportionnelles au temps, et l'on a $x = at$. D'un autre côté, les longueurs y de ces génératrices comprises entre le cercle décrit d'abord et la courbe tracée ensuite mesurent les espaces parcourus par le mobile, ce qui donne $y = e$. Développons maintenant la surface du cylindre en déroulant la feuille de papier, et nous aurons une courbe plane, représentée ci-contre (*fig.* 19), rapportée à deux axes horizontal et vertical. En mesurant avec soin les ordonnées de ses différents points, nous reconnaîtrons qu'elle est une parabole dont l'équation est

$$y = a'x^2;$$

en remplaçant y par e et x par at, il vient

$$e = a^2 a' t^2 = \frac{g}{2} t^2. \tag{1}$$

Cette formule exprime ([1]) que le mouvement des corps tombant en chute libre est uniformément varié, c'est-à-dire que leur accélération g est constante. Ainsi la pesanteur, qui est une force constante, produit une accélération constante, et le principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis se trouve justifié par l'expérience dans le cas des corps pesants.

([1]) La formule (1) exprime la *loi des espaces*; la loi des vitesses s'en déduit en prenant la dérivée de e par rapport au temps :

$$v = gt.$$

On pourrait déterminer la constante g au moyen de l'expérience de M. Morin, mais il vaut mieux avoir recours à un procédé plus précis, que nous indiquerons par la suite. On trouve à Paris $g = 9^{m},80896$: c'est l'accélération de la pesanteur.

PRINCIPE DE L'INDÉPENDANCE DE L'EFFET DES FORCES AGISSANT SIMULTANÉMENT SUR UN MÊME CORPS. PROPORTIONNALITÉ DES FORCES AUX ACCÉLÉRATIONS (1). — On admet que *l'effet d'une force sur un corps n'est pas modifié quand le corps est en même temps soumis à l'action d'une ou de plusieurs autres forces*. Or on peut toujours considérer une force $F = nf$ comme la réunion de n forces égales à f. Soit c l'accélération que produirait la force f seule; chacune des n forces f, d'après le principe que nous énonçons, produira une accélération égale, et l'accélération totale γ sera nc. Donc les accélérations produites sur un même point matériel par des forces différentes sont proportionnelles à ces forces. On démontre expérimentalement cette proposition à l'aide de la machine d'Atwood, en prenant comme force motrice la pesanteur.

VÉRIFICATION AU MOYEN DE LA MACHINE D'ATWOOD (2). — Sur une plate-forme élevée de 3^{m} environ et soutenue par une colonne de bois (*fig.* 20), est établie une poulie de cuivre CAD qui est aussi légère et aussi mobile que possible. Pour augmenter sa mobilité, on fait reposer l'axe A, qui est bien poli, sur deux systèmes de roues C et D, qui se croisent et qu'il entraîne avec lui pendant qu'il tourne. Par ce moyen, le frottement devient peu sensible; on admet qu'il est nul et que le poids de la poulie est négligeable.

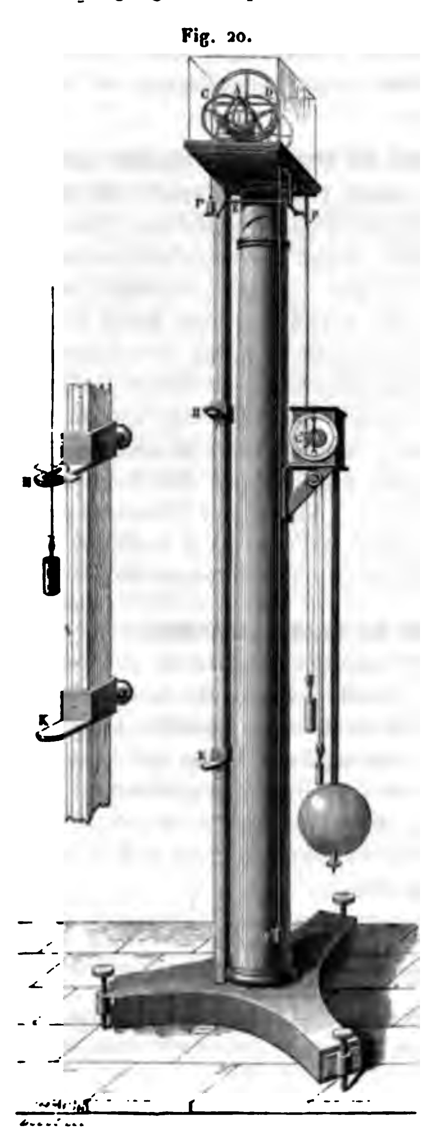
---

(1) Ce principe, comme tous ceux qui sont nécessaires pour interpréter les lois de la chute des corps, est dû à Galilée (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 234).

(2) Imaginée par Atwood, membre de la Société royale de Londres, pour vérifier les lois de la chute des corps. Galilée, qui les a découvertes, vérifiait la loi des espaces et celle de la proportionnalité des forces aux accélérations en faisant descendre une petite poulie chargée d'un poids le long d'une tige à rainure, dont il réglait à volonté l'inclinaison pour modifier le rapport de la force motrice à la masse, et par conséquent la vitesse de chute (plan incliné de Galilée).

Sur la gorge de la poulie s'enroule un fil de soie qui soutient deux poids P et P' : ils se font équilibre s'ils sont égaux ; mais, si l'un est plus fort que l'autre, il se meut de haut en bas, fait marcher le plus faible de bas en haut, et tout le système prend un mouvement commun. Dans ce cas, le poids total qui est entraîné est la somme de P et de P', et la force qui agit sur lui est égale à P — P'; par conséquent, la différence entre la chute libre et le mouvement sur cette machine consiste en ce que dans le premier cas c'est la somme P + P' qui ferait mouvoir le système, et dans le second c'est la différence P — P'. Tout se réduit ainsi à avoir diminué la force dans le rapport de P — P' à P + P', rapport qui est constant pendant la durée de l'expérience, mais que l'on peut augmenter ou diminuer à volonté.

Fig. 20.



Une horloge à balancier G, battant la seconde, est soutenue sur le même support; une aiguille marque les secondes, et l'échappement produit à toutes les oscillations un

bruit qui permet de les compter. Une bascule P est disposée en haut de l'appareil pour soutenir le poids; elle est reliée à l'horloge par un levier EFG, et, au moment où l'aiguille passe au zéro du cadran, un mécanisme convenable fait jouer la bascule et commencer la chute.

L'appareil se complète par une règle de bois HK disposée derrière la bascule et divisée en centimètres. Un curseur K, formé par une plaque horizontale de cuivre, peut être fixé par une vis de pression à une hauteur quelconque. C'est sur cette plaque K que le poids tombe et que se termine le mouvement, avec un bruit de choc que les auditeurs entendent comme le bruit de choc du balancier.

Quand on veut faire une expérience, on soutient le poids le plus lourd sur le support vis-à-vis du zéro des divisions. La bascule s'abaisse par l'effet de l'échappement au premier battement du pendule; le système commence son mouvement, et il le continue jusqu'à sa rencontre avec le curseur K, qui l'arrête. On cherche la position qu'il faut donner à celui-ci pour que le choc produit soit entendu en même temps que le second battement, et, quand on l'a trouvé, on est sûr que la chute a duré une seconde et que l'espace parcouru est marqué sur la règle vis-à-vis du curseur.

Si l'on veut, à l'aide de cet appareil, trouver la loi qui lie les espaces parcourus aux durées de chute, on recommence l'expérience en descendant le curseur et cherchant la course du mobile pendant deux, trois ou quatre secondes, et l'on vérifie la formule

$$e = \frac{G}{2} t^2.$$

G change avec la valeur de $\frac{P - P'}{P + P'}$, c'est-à-dire avec la force motrice employée. Si on laisse $P + P'$ constant, on trouve que G varie proportionnellement à $P - P'$.

A cet effet, on compose habituellement les poids égaux qui se font équilibre aux deux extrémités du fil avec un même nombre n de poids plus petits, tous égaux entre eux et à p; ensuite, on enlèvera l'un d'eux du côté A pour le placer du

côté B; le poids du corps mis en mouvement sera $2np$, et le poids moteur $2p$; si l'on enlève encore un poids p du côté A pour le porter du côté B, on aura, pour le même corps à mouvoir, une force motrice égale à $4p$, et ainsi de suite. On vérifiera que les valeurs de G croissent proportionnellement aux nombres 2, 4, 6, c'est-à-dire aux forces motrices ([1]).

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES DÉDUITE DE LA COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS. — Puisque l'accélération produite par une force est dans la direction de cette force et qu'elle est proportionnelle à son intensité, on pourra composer un nombre quelconque de forces concourantes d'après la même règle qui a été démontrée pour les accélérations dans le cas des mouvements de translation. Ainsi se trouve justifiée *a posteriori* la règle du parallélogramme des forces que nous avons admise ci-dessus sans démonstration.

MASSE. — RELATION ENTRE LES FORCES, LES MASSES ET LES ACCÉLÉRATIONS. — Quand une même force est successivement appliquée à des corps différents, elle produit des accélérations différentes; on peut s'en convaincre à l'aide de la machine d'Atwood, en employant une même force motrice P — P′ à mettre en mouvement un poids total P + P′ de plus en plus considérable. On exprime ce fait en disant que les corps diffèrent les uns des autres par leurs masses.

([1]) La machine d'Atwood permet la mesure directe des vitesses de chute. A cet effet, on prend des poids P cylindriques et un poids additionnel p de forme allongée dont on charge l'un des poids principaux. Puis, à l'aide d'un curseur annulaire que l'on place à une distance quelconque de l'origine, on enlève le poids additionnel et on détermine la vitesse acquise par le système des poids P. Il suffit pour cela de mesurer l'espace parcouru pendant la première seconde qui suit l'enlèvement du poids.

La machine d'Atwood permet aussi d'etudier le mouvement ascendant des corps pesants. Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet, non plus que sur les vérifications analogues auxquelles se prête la machine de Morin. Par exemple, à l'aide de ce dernier appareil, on aurait un tracé correspondant à la marche ascendante d'un poids projeté verticalement, en lançant, au moyen d'une arbalète, le poids cylindro-conique placé, la pointe vers le haut, le long d'une des génératrices du cylindre en mouvement.

On dit que deux corps ont des masses égales quand une même force leur imprime la même accélération, qu'une masse est double d'une autre quand elle est la réunion de deux masses égales à la première, etc. Ainsi, deux poids de 1^{gr} éprouvent de la part de la pesanteur des actions égales, et, puisqu'ils tombent dans le vide avec la même vitesse, ils ont des masses égales. La masse de 2^{gr} est double de la masse de 1^{gr}, et, plus généralement, les masses de tous les corps pesants sont proportionnelles à leurs poids. La proportionnalité des masses aux poids est justement l'interprétation de la loi de l'égalité de chute dans le vide.

On mesure conventionnellement la masse d'un corps pesant par le quotient de son poids par l'accélération que lui imprime la pesanteur.

On vérifie que, quand une force de nature quelconque peut faire équilibre à un certain poids, elle imprime à toute masse à laquelle on l'applique l'accélération même que produirait ce poids. On en conclut que, si l'on divise la valeur numérique F de la force agissant sur un corps par l'accélération γ correspondante, on obtient un quotient invariable pour un même corps et égal au quotient du poids P par l'accélération g de la pesanteur. La masse d'un corps est donc une quantité caractéristique

$$m = \frac{P}{g} = \frac{F}{\gamma}.$$

L'unité de masse est celle d'un corps qui, soumis à l'unité de force, reçoit une accélération égale à l'unité. C'est la masse de g grammes.

POIDS SPÉCIFIQUE. — DENSITÉ. — On appelle *poids spécifique* d'un corps homogène le quotient de son poids par son volume, ou le poids de l'unité de volume. La *densité* est la masse de l'unité de volume.

Ces quantités peuvent encore être définies rigoureusement dans un corps hétérogène, pourvu que l'hétérogénéité soit continue, telle par exemple qu'elle peut résulter de l'application de forces extérieures à un solide primitivement homogène.

Considérons un élément de volume comprenant un point A du corps; nous appellerons poids spécifique et densité au point A les limites vers lesquelles tendent les quotients du poids ou de la masse de l'élément par son volume, quand on fait tendre ce volume vers zéro. La densité et la masse sont alors des fonctions continues des coordonnées du point A.

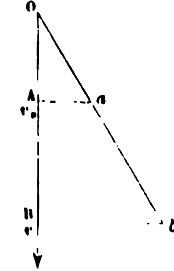
TRAVAIL. — Le travail élémentaire d'une force est le produit des valeurs numériques de la force et du déplacement évalué dans la direction suivant laquelle la force agit : c'est donc le produit de la force par le déplacement infiniment petit considéré et par le cosinus de l'angle de la force et du déplacement. Le travail total est la somme des travaux élémentaires exécutés à chaque instant. Quand un corps soumis à une force constante en grandeur et en direction a décrit une courbe fermée, le travail effectué par cette force est nul.

L'unité de travail est celui d'une force égale à l'unité dont le point d'application se déplace d'une longueur égale à l'unité dans la direction de la force.

FORCE VIVE. — PRINCIPE DES FORCES VIVES. — On appelle *force vive* d'un point matériel le produit mv^2 de sa masse par le carré de sa vitesse.

Considérons un poids p qui tombe verticalement d'une hauteur $AB = h$, et soient v_0 et v les vitesses qu'il possède en A et en B. Le travail correspondant à la chute est

Fig. 21.



$$(1) \qquad \mathfrak{T} = ph = mgh.$$

On peut considérer la vitesse v_0 comme résultant d'une chute libre à partir d'un point O de la droite AB situé à la distance x, et l'on a, en désignant par t la durée de cette chute,

$$x = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

De même

$$x + h = \frac{v^2}{2g},$$

d'où

$$(2) \qquad h = \frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2).$$

L'expression (1) du travail devient ainsi

$$(3) \qquad \mathcal{C} = mg\frac{1}{2g}(v^2 - v_0^2) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Le travail accompli est égal à la moitié de l'accroissement de la force vive (¹).

Ce théorème est applicable à la chute le long d'un plan incliné Oab. Le travail de la chute entre a et b ainsi que les vitesses v et v_0 demeurent en effet invariables quelle que soit l'inclinaison du plan.

Quand un point matériel est soumis à une force variable en grandeur et en direction, on peut encore lui appliquer le théorème des forces vives; il suffit de diviser le mouvement en éléments tels que la force puisse être considérée comme constante dans chacun des intervalles. Soient alors v_0 la vitesse initiale, v', v'', ..., v_{n-1}, v les vitesses à la fin de chaque intervalle; on a, pour les travaux élémentaires correspondants,

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

$$\frac{mv''^2}{2} - \frac{mv'^2}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2},$$

dont la somme est

$$\mathcal{C} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

On peut enfin étendre le théorème à un nombre quelconque

(¹) L'équation $ph = \frac{mv^2}{2}$ a été établie par Leibnitz, qui a donné au produit mv^2 le nom de *force vive*. Mais le principe de la conservation des forces vives n'a été énoncé et développé complètement que par Jean Bernoulli (BOSSUT, *Histoire des Mathématiques*, t. II, p. 193).

de points matériels ayant entre eux des liaisons données. Le travail total est

$$\mathfrak{T} = \sum \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \right).$$

Quand un corps se meut d'un mouvement périodique de telle sorte que les vitesses de tous ses points, et par conséquent la somme de leurs forces vives, repassent à intervalles égaux par les mêmes valeurs, le travail total effectué pendant chacun de ces intervalles par l'ensemble des forces appliquées au corps est nul. Quand le mouvement est uniforme, le travail est constamment nul et les forces appliquées au corps se font équilibre.

DES FORCES NATURELLES. — ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. Supposons deux corps occupant chacun une position déterminée, et imaginons qu'il y ait entre eux un ressort tendu et appuyant sur leurs centres de gravité : il exercera sur tous les deux des pressions égales dans des sens opposés. Si l'un d'eux devient libre, il se mettra en mouvement sous l'action de la force qui lui est appliquée : si c'est l'autre, il se mouvra en sens inverse sous l'influence d'une force égale : s'il arrive que tous les deux soient libres à la fois, tous deux obéiront en même temps à ces deux forces égales et opposées : enfin, si le ressort les tire au lieu de les pousser, il n'y aura rien de changé que le sens des effets produits. De ces deux forces, l'une est appelée l'action, l'autre est la réaction. Nous allons montrer sur divers exemples que ce mode d'action est très-général dans les phénomènes naturels et que les organes mécaniques qui [illegible] comme des ressorts.

[illegible] plein [illegible] se compri- [illegible] deux pressions égales et opposées, l'une sur [illegible] cylindre de [illegible] il se relè- [illegible] cylindre, il s'a- [illegible] était [illegible] sur les [illegible] phénomène se [illegible] inflammation de la poudre

développe rapidement une grande quantité de gaz dans l'intérieur du canon; le bouiet est chassé d'un côté : c'est l'action; l'arme est repoussée de l'autre, elle recule : c'est la réaction.

Si nous considérons ce qui se passe dans le cylindre d'une machine à feu, nous retrouvons les mêmes faits, avec cette différence que la vapeur y a remplacé le gaz. Pendant qu'elle chasse le piston d'un côté, elle presse la base du cylindre de l'autre; si le piston était fixe et le cylindre mobile, c'est celui-ci qui se mouvrait.

Au lieu d'un gaz, nous pouvons enfermer dans le cylindre creux un liquide quelconque; le piston s'y enfonce encore quand on le pousse; le liquide s'y comprime, puis il exerce une action et une réaction sur la base du cylindre et le piston. La preuve que ce liquide est comprimé, c'est qu'en ouvrant subitement un robinet on voit s'échapper un jet rapide et toute action cesser sur le piston et le cylindre.

Prenons maintenant une table chargée de poids; les pieds de la table interposés entre le sol et les poids se raccourcissent d'une quantité que l'on peut mesurer; en ce moment, ils passent à l'état de tension, et leur élasticité, comme celle d'un ressort, produit deux forces égales et opposées, l'une appuyant sur le sol, l'action, l'autre soutenant le poids, la réaction.

La même chose a lieu si l'on soutient un poids à un crochet, par l'intermédiaire d'une corde ou d'un fil de métal; ce soutien s'allonge, ses molécules s'écartent, et alors une force attractive, qui se développe entre elles, agit aux deux extrémités, d'une part pour soutenir et équilibrer le poids, de l'autre pour peser sur le crochet, comme si le corps suspendu y était directement appliqué.

Nous pouvons encore citer les actions développées par les animaux. Qu'un homme soulève un fardeau placé sur le sol, il développe une force verticale appliquée de bas en haut contre le poids qu'il soulève, mais aussi une réaction égale et dirigée en sens opposé sur le sol qui lui sert d'appui. Nous savons tous que pour déplacer un obstacle pesant, ou vaincre des résistances, ou soutenir même le poids de notre corps, il faut, comme on le dit vulgairement, prendre un *point d'appui*,

[illegible] entre l'obje
[illegible] résistant contr
[illegible]

[illegible] dans u
[illegible] l'autre, et l'o
[illegible] qui le
[illegible] élasticité qu
[illegible] agissant à se

[illegible] sans
[illegible] et les
[illegible] qu'on
[illegible] repoussés,
[illegible] oppo-
[illegible] aussi
[illegible] mouvement;
[illegible] ent, et
[illegible] qui les
[illegible] car, si
[illegible] ment un
[illegible] trouverait
[illegible] pas égale à

[illegible] sont
[illegible] réaction se
[illegible] que, soit
[illegible] penser qu'il en
[illegible] ne peut
[illegible] que, si le
[illegible] que, quand
[illegible] tombe vers
[illegible] cas possibles ce
[illegible] particuliers que l'on
[illegible]

[illegible] *une force éma-*
[illegible] *est également*
[illegible] *contraire à la pre-*

La loi admise va nous conduire immédiatement à des conséquences importantes. Prenons deux corps sphériques A et B (*fig.* 22), dont nous désignerons les masses par m et m'. Supposons qu'ils soient tous les deux libres et sollicités par deux forces constantes, égales et opposées, appliquées à leur centre et dirigées l'une suivant AB, l'autre suivant BA; tous deux vont prendre un mouvement uniformément accéléré, et les accélérations seront

Fig. 22.

$$G = \frac{F}{m}, \quad G' = \frac{F}{m'},$$

c'est-à-dire que *les vitesses* $v = Gt$ *et* $v' = G't$, *acquises au bout de temps égaux, seront en raison inverse des masses.*

Ce résultat nous explique comment il se fait que le boulet sort du canon avec une vitesse très-grande, pendant que la pièce en a pris une autre beaucoup moindre : c'est qu'elle a une masse bien plus considérable. Cela nous montre aussi comment la Terre, dont la masse est infinie, comparée à celle des corps qui sont mis en mouvement à sa surface, ne se déplace pas par l'effet des réactions qu'elle subit.

Des équations précédentes on tire $mv = m'v'$; c'est ce que l'on exprime en disant que *les quantités de mouvement sont égales pour les deux corps.*

Soit C (*fig.* 22) le centre de gravité du système des deux masses A et B à l'origine du mouvement; après un temps t, elles sont venues se placer l'une en A', l'autre en B', et l'on peut voir que le centre de gravité est resté immobile : en effet, on a

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m'}{m}.$$

Les équations du mouvement donnent

$$AA' = \frac{G}{2} t^2 = \frac{F}{2m} t^2,$$

$$BB' = \frac{G'}{2} t^2 = \frac{F}{2m'} t^2;$$

donc

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{m'}{m},$$

par conséquent

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'C}{B'C} = \frac{m'}{m};$$

donc *le point* C *est en un moment quelconque le centre de gravité des deux corps, et il reste immobile.*

Il résulte de là que, si une pièce de canon et le boulet qu'elle lance étaient libres de toute résistance, leur centre de gravité commun resterait indéfiniment le même. Cette conséquence se généralise : ainsi l'on démontre en Mécanique qu'une bombe dont le centre de gravité décrit une parabole dans le vide, éclatant pendant sa course, se divise en divers fragments, dont le centre de gravité commun continue à décrire la parabole.

CHOC DES CORPS. — Faisons maintenant l'application du principe à l'un des cas qui intéressent le plus le physicien, celui du choc des corps. Je supposerai deux masses homogènes, m, m' (*fig.* 23), ayant reçu des vitesses constantes v, v' dirigées de A vers B. Lorsque v sera plus grand que v', les corps arriveront à se rencontrer, seront pendant un temps très court pressés l'un contre l'autre, et une force réciproque F, qui dépend de leur élasticité, agira entre eux pour augmenter la vitesse de B d'une quantité x' et diminuer celle de A d'une quantité x.

Fig. 23.

Nous étudierons théoriquement deux cas : 1° celui de corps absolument dénués d'élasticité ; 2° celui de corps parfaitement élastiques. Bien entendu, aucune substance ne peut être rigoureusement classée dans l'une de ces catégories, mais

(1) Le problème du choc des corps ayant été mis au concours en 1668 par la Société Royale, trois Mémoires, l'un de Christophe Wren, les autres de Wallis et de Huygens, répondirent à cet appel. Wallis n'avait traité que le choc central de deux corps dépourvus d'élasticité, tandis que Wren et Huy-

le plomb d'une part, l'ivoire ou l'acier de l'autre, se rapprochent suffisamment des conditions théoriques pour se prêter à des vérifications approchées. Tous les corps donneront, à des degrés différents, des résultats intermédiaires à ceux que nous allons trouver.

Premier cas : Corps dénués d'élasticité. — Si les masses ne sont pas élastiques, elles resteront déformées, ne se sépareront pas et continueront à marcher avec une vitesse constante commune

$$V = v - x = v' + x'.$$

Puisque x et x' sont les vitesses résultant d'une même force appliquée pendant le même temps à des masses différentes, on a la relation

$$\frac{x}{x'} = \frac{m'}{m}.$$

Ces deux équations suffisent pour trouver x et x'; elles donnent

$$(1) \qquad x = \frac{m'(v - v')}{m + m'}, \quad x' = \frac{m(v - v')}{m + m'},$$

d'où l'on tire, pour la vitesse commune aux deux masses,

$$V = v - x = v' + x' = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

On passera du cas où les vitesses sont de même sens à celui où elles sont de direction opposée, en changeant le signe de v', ce qui donne l'expression générale

$$(2) \qquad V = v - x = x' \pm v' = \frac{mv \pm m'v'}{m + m'},$$

ou

$$(m + m')V = mv \pm m'v'.$$

Cette équation exprime que la somme des quantités de mou-

---

gens n'avaient considéré que le choc de corps parfaitement élastiques. Ces savants donnèrent les formules que l'on emploie encore aujourd'hui.

Plus tard, Huygens développa complétement la théorie du choc dans un Mémoire publié en 1703, sous le titre *De motu corporum ex percussione* (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 630-634).

vement n'a pas été altérée par le choc; mais la somme des forces vives a diminué. On a, en effet,

$$(m + m')V^2 - mv^2 - m'v'^2 = \pm 2mm'vv',$$

quantité toujours positive, puisque le signe — devant le second membre correspond au cas où v et v' sont de signes contraires.

On voit, d'après cela, que le principe des forces vives ne s'appliquerait au choc des corps non élastiques qu'en admettant la production d'un travail négatif égal à $\mp 2mm'vv'$. Nous verrons plus tard que ce travail a été absorbé par suite de l'écrasement et transformé en chaleur (*voir* t. II, 2ᵉ fasc., au Chapitre *De l'équivalence*).

Second cas : Corps parfaitement élastiques. — Nous avons supposé les corps A et B dépourvus de toute élasticité; s'ils sont au contraire parfaitement élastiques, ils se comprimeront au moment du choc, mais reprendront aussitôt après leur forme primitive. La masse m aura d'abord perdu la même vitesse x que si elle était dénuée d'élasticité [1], puis elle recevra par suite de la réaction une autre vitesse égale à x en sens inverse; elle aura donc une vitesse $v - 2x$. La masse m' aura gagné une vitesse x' au moment du choc et une autre vitesse x' par la réaction; ces deux corps auront donc des vitesses définitives $V = v - 2x$ et $V' = v' + 2x'$, ce qui donne

$$(3)\quad \begin{cases} V = v - 2x = v - 2\dfrac{m'(v - v')}{m + m'} = \dfrac{2m'v' + v(m - m')}{m + m'}, \\[2ex] V' = v' + 2x' = v' + 2\dfrac{m(v - v')}{m + m'} = \dfrac{2mv + v'(m' - m)}{m + m'}, \end{cases}$$

formules dans lesquelles il faudra changer le signe de v' si les vitesses sont de sens contraires.

On vérifiera aisément dans ce cas : 1° que la somme des quantités de mouvement n'a pas été altérée par le choc; 2° que la somme des forces vives est demeurée constante [2] :

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

---

(1) En d'autres termes, on admet qu'à la fin de la première phase du choc les deux corps possèdent pendant un instant infiniment court la même vitesse de translation, d'où $v - x = v' + x'$, comme dans le cas précédent.

(2) Cette relation a été trouvée dès 1668 par Huygens. Toutefois le principe

On peut donc appliquer sans restriction le principe des forces vives au cas d'un système de corps parfaitement élastiques, alors même que ces corps viennent à se choquer.

Admettons que $m = m'$; les formules (3) se réduisent à

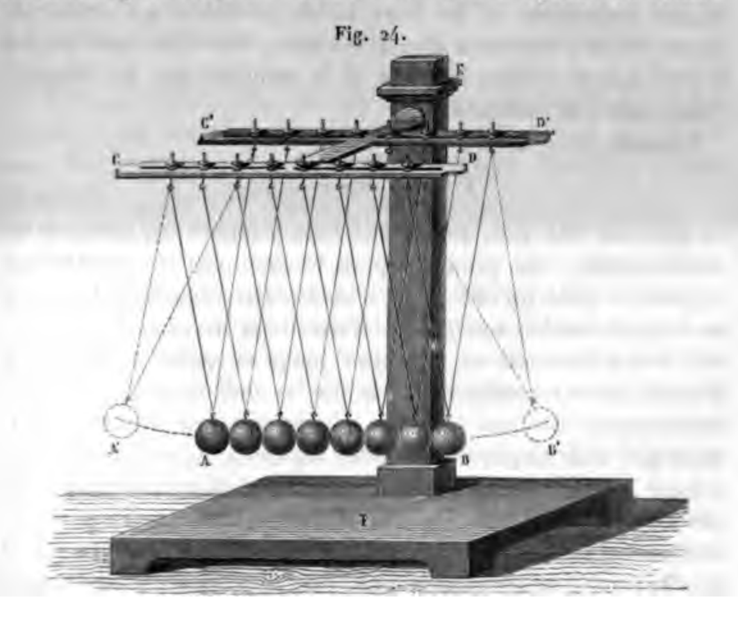
$$V = v - 2x = v', \quad V' = v' + 2x' = v;$$

les deux corps ont échangé leurs vitesses, et, si v' est égal à o, c'est-à-dire si la sphère choquée est primitivement en repos,

$$V = v - 2x = 0, \quad V' = v' + 2x' = v,$$

c'est-à-dire que la bille choquante reste en repos et qu'elle communique toute sa vitesse à la bille choquée. Ce remar-

Fig. 24.



quable résultat se vérifie aisément par l'expérience suivante, due à Mariotte ([1]). On suspend à un support commun (*fig.* 24) plu-

de la conservation des forces vives n'a été développé d'une manière générale que beaucoup plus tard, par Jean Bernoulli (*voir* p. 44).

([1]) MARIOTTE, *Œuvres*, t. I, p. 1 (édition de la Haye). L'appareil a été perfectionné par Nollet (*Leçons de Physique expérimentale*, t. I, p. 360).

sieurs billes d'ivoire égales, en contact, et dont les centres se trouvent sur une ligne droite. On écarte la première d'un angle quelconque et on l'abandonne à l'action de la pesanteur; elle décrit un arc de cercle comme un pendule et vient choquer la sphère suivante avec une vitesse $v = \sqrt{2gh}$. Après le choc, elle est en repos, mais elle donne toute sa vitesse à la deuxième bille, qui la transmet de même à la troisième, et, l'action se continuant dans toute la série des sphères d'ivoire jusqu'à la dernière B, celle-ci acquiert la vitesse qu'avait A, et on la voit se soulever jusqu'en B'; ensuite elle retombe avec la même vitesse que celle qu'elle avait reçue, elle la communique inversement de B en A, et l'on a ainsi un pendule formé de parties intermédiaires immobiles et de deux billes extrêmes qui seules se soulèvent et s'abaissent alternativement. On vérifie par là avec la plus grande évidence le fait de la transmission des vitesses d'une bille à la suivante.

Lorsque $m' = \infty$ et $v = 0$,

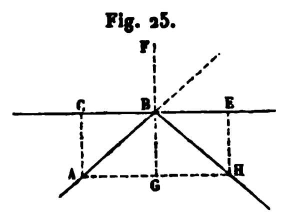
$$V = v - 2x = -v,$$

ce qui veut dire que, quand une bille frappera un obstacle de masse infinie, elle prendra après le choc une vitesse égale et opposée à celle qu'elle avait d'abord. Par conséquent, quand on laissera tomber une sphère d'ivoire sur un plan de marbre, elle devra rebondir et remonter jusqu'au point d'où elle est tombée, pour recommencer ensuite et indéfiniment le même mouvement. On sait que ces oscillations ont lieu en effet, mais que leur amplitude diminue rapidement, ce qu'il faut attribuer à trois causes : 1° à ce que la résistance du plan n'est pas infinie, parce que, vu la rapidité du choc, la force ne se transmet qu'à une portion seulement de la masse et non à sa totalité; 2° à la résistance que l'air oppose au mouvement; 3° à ce que l'élasticité n'est jamais parfaite. Enfin, si la bille vient frapper obliquement le plan résistant dans la direction AB (*fig.* 25), sa vitesse se décompose en deux autres, l'une tangentielle BE, l'autre normale BF; celle-ci seulement change de signe après le choc et devient BG, d'où résulte une vitesse unique BH par la composition de BE et de BH; et il est évident que le mouvement incident se réfléchit avec un angle de ré-

flexion égal à celui d'incidence. Tout le monde sait que l'expérience vérifie cette conclusion.

La discussion que nous venons de faire résume les cas les plus simples du choc, c'est-à-dire ceux où l'on suppose des billes sphériques animées d'un mouvement de translation, mais ne tournant pas sur elles-mêmes. Il ne faut pas croire que les formules précédentes suffisent pour expliquer les effets que l'on produit sur un billard : là, en effet, les billes tournent sur elles-mêmes, et, suivant que le joueur les frappe en haut ou en bas, à droite ou à gauche, il imprime, outre une vitesse de translation, un mouvement de rotation très-complexe que le frottement sur le tapis ou le choc sur les bandes transforme à chaque instant. Cette complication fait de la théorie du jeu de billard une des questions les plus difficiles que l'analyse puisse aborder.

Fig. 25.



FORCES CENTRALES. — Quand deux points matériels agissent ou paraissent agir à distance, leur attraction ou leur répulsion est généralement dirigée suivant la ligne qui les joint, et agit proportionnellement à leurs masses et à une certaine fonction de leur distance. Les forces de cette espèce sont très-répandues dans la nature : on les désigne sous le nom de *forces centrales*. Le plus habituellement, elles varient en raison inverse du carré de la distance.

Le mouvement produit par les forces centrales sur deux points matériels A et B libres de se mouvoir ne peut être rectiligne que s'ils sont sans vitesse initiale, et alors il est dirigé suivant la ligne qui les joint. En général, le mouvement des deux points est curviligne, et l'accélération totale, qui est le plus souvent oblique par rapport à la trajectoire, est dirigée à chaque instant suivant la ligne AB.

Un cas particulièrement intéressant est celui où, le point matériel A étant fixe, le point B décrit d'un mouvement uniforme une circonférence dont A occupe le centre. L'accélération du

mouvement est alors égale à $\frac{v^2}{AB}$ (p. 18); elle est numériquement égale à la force attractive qui s'exerce entre les deux points par unité de masse du point mobile. Si cette attraction est en raison inverse du carré de la distance, la vitesse initiale v que doit posséder le mobile normalement à AB pour que son mouvement soit circulaire doit être en raison inverse de la racine carrée de AB.

EFFETS ATTRIBUÉS A LA FORCE CENTRIFUGE (¹). — Quand un point matériel décrit un cercle d'un mouvement uniforme ou varié, la composante normale de la force à laquelle il est soumis s'appelle la *force centripète*. Elle n'a d'autre effet que de changer à chaque instant la direction du mouvement sans modifier la grandeur de sa vitesse; par suite, on peut en faire abstraction et chercher la vitesse du mouvement rectiligne que posséderait le corps si cette force n'existait pas. Pour cela, il suffit d'ajouter aux forces agissantes une force fictive égale et directement opposée à la force centripète : c'est la *force centrifuge*. Ainsi, veut-on savoir de quelle quantité le poids apparent d'un corps, c'est-à-dire la pression exercée par celui-ci sur un ressort, se trouve diminuée par l'effet de la rotation de la Terre, on peut supposer la Terre et le corps immobiles et appliquer fictivement au corps, dans la direction prolongée du rayon du parallèle décrit, une force égale au produit de sa masse par l'accélération centripète de son mouvement autour de la ligne des pôles. Alors on décomposera le poids P en deux composantes Q et R, dont l'une Q est le poids apparent, tandis que l'autre R fait équilibre à la force centrifuge, c'est-à-dire constitue la force centripète employée à chaque instant à changer la direction du mouvement.

(¹) La considération de la force centrifuge, son expression dans le cas du mouvement circulaire, sont dues à Huygens (*De motu et vi centrifuga*, paru seulement en 1703, après la mort de l'auteur; mais Huygens était déjà en possession de ces résultats principaux en 1673, lors de la publication de son *Horologium oscillatorium*).

La généralisation de cette notion, son application au mouvement elliptique des planètes, sont dues à Newton (*Philosophiæ naturalis principia mathematica* 1687). (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 621.)

Le mouvement circulaire donne lieu à un certain nombre d'expériences classiques qui mettent en évidence l'existence de l'accélération centripète et permettent au besoin de la mesurer.

Un petit seau, soutenu à un fil par son anse, peut être rempli d'eau; si on le fait rapidement tourner dans un plan vertical, il ne laissera tomber aucune portion du liquide, car l'accélération du mouvement circulaire peut être assez grande pour que sa composante verticale demeure toujours supérieure à l'accélération de la pesanteur, et alors, au lieu de tomber, le liquide pressera sur le fond du vase, en vertu de la différence des deux accélérations.

L'expérience suivante met bien en évidence la légitimité de

Fig. 26.



l'artifice par lequel nous avons introduit la force centrifuge. Un axe métallique vertical EF ([1]) (*fig.* 26), établi sur une table,

---

([1]) Cette disposition, imaginée par Desaguliers (*Cours de Physique*, t. I, p. 330), a été perfectionnée à diverses époques, notamment par Nairne (*Gehler's physikalisches Wörterbuch*, article CENTRIFUGAL MASCHINE).

peut recevoir un mouvement de rotation au moyen d'une manivelle M, qui engrène avec lui. Sur l'axe est placé un rectangle UBAT, dont les trois côtés AT, AB et BU sont solidaires, pendant que le quatrième TU est composé d'une tige cylindrique de laiton que l'on enlève à volonté. On peut enfiler cette tige dans une sphère percée S, dont le poids est P, placer entre elle et l'arrêt N un dynamomètre R avec un index, et faire tourner le tout rapidement. Au premier moment, la sphère décrit une spirale; mais bientôt la pression qu'elle reçoit du ressort atteint une valeur fixe, et alors le mouvement de la sphère est circulaire et la force centripète qui agit sur elle est mesurée par la tension du ressort.

On remarquera qu'à ce moment le déplacement relatif de la sphère sur la tige TU est nul. On peut donc faire abstraction du mouvement de rotation de l'appareil et considérer la sphère comme maintenue dans la position qu'elle occupe par une force centrifuge dirigée suivant ST, qui fait équilibre à la pression F du ressort.

Soient v la vitesse de rotation de la sphère, R sa distance à l'axe, m sa masse, P son poids; on doit avoir théoriquement

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{P}{g}\frac{v^2}{R}.$$

On voit que la force centrifuge est proportionnelle au poids P du corps qui tourne : c'est ce qui donne lieu à une expérience curieuse. On remplace, dans l'appareil précédent, la tige TU par un tube de verre fermé contenant de l'air, de l'eau, des morceaux de liége et de la grenaille de plomb. Il est clair que l'on doit voir pendant la rotation de l'appareil l'air rester au centre, l'eau se réunir en deux colonnes aux extrémités du tube, puis le liége se placer à la surface de l'eau, et enfin le plomb s'éloigner jusqu'aux deux bouts.

CHAPITRE II.

MESURE DES QUANTITÉS PHYSIQUES; INSTRUMENTS GÉNÉRAUX DE MESURE.

Unités fondamentales. — Unités dérivées. — Systèmes d'unités. — Homogénéité des formules de la Mécanique et de la Physique.
Mesure des longueurs. — Comparateur. — Machine à diviser. — Vérification de la vis micrométrique. — Vernier. — Sphéromètre. — Mesure d'une différence de niveau. — Niveau d'eau. — Niveau à bulle d'air. — Cathétomètre.
Mesure des poids. — Balance. — Conditions de son établissement. — Sensibilité. — Description d'une balance précise. — Méthode des doubles pesées. — Précautions nécessaires pour obtenir une pesée exacte. — Manière de faire des poids.
Mesure de l'accélération de la pesanteur. — Pendule. — Isochronisme des petites oscillations. — Lois du pendule simple. — Formule générale. — Pendule composé. — Détermination de g par la méthode des coïncidences. — Mesure des forces au moyen du pendule.
Mesure des temps. — Application du pendule aux horloges.

UNITÉS FONDAMENTALES. UNITÉS DÉRIVÉES. — Le nombre des quantités distinctes que l'on définit en Physique et que l'on peut avoir à mesurer est extrêmement grand. Pour nous en tenir aux quantités d'origine géométrique ou mécanique, nous citerons les longueurs, les surfaces, les volumes, les angles, les temps, les vitesses, les accélérations, les forces, les travaux, les masses, les densités, les forces vives, les quantités de mouvement, etc. Chacune de ces quantités est évaluée au moyen d'une unité de même espèce dont on peut fixer la grandeur arbitrairement. Ainsi on prendra pour unité de longueur le mètre, le centimètre, le kilomètre, le pied, la longueur du tuyau d'orgue qui rend comme son fondamental le *la* du diapason, la vitesse du son dans l'air, ou de la lumière dans le

vide; pour unité de temps, la seconde, le jour, le siècle, la durée d'oscillation d'un pendule simple de longueur déterminée, le temps que met la lumière à nous venir du Soleil, etc. Les conventions adoptées à cet égard pourront différer d'un pays ou d'une époque à une autre et même changer suivant la nature des longueurs, des intervalles de temps, etc., à mesurer.

Désignons en général par a l'unité d'une certaine espèce, par A la grandeur à mesurer, par m le nombre de fois que a est contenu dans A ou sa mesure. On a, par définition,

$$(1)\qquad A = ma.$$

Si l'on avait pris une autre unité a' plus grande ou plus petite que a, on aurait de même

$$(2)\qquad A = m'a',$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{m'}{m} = \frac{a}{a'},$$

c'est-à-dire que *le nombre abstrait qui mesure une quantité varie en raison inverse de la grandeur assignée à l'unité de même espèce.*

Il arrive souvent que l'on évalue une quantité au moyen d'unités d'espèces différentes, à la faveur de relations établies entre les deux sortes de quantités. Ainsi l'on convient, en Géométrie, de prendre pour unité de surface le carré dont le côté est égal à l'unité; puis on démontre que la valeur numérique d'une surface quelconque s'obtient en faisant le produit de deux longueurs convenablement choisies, que la surface d'un carré, par exemple, est exprimée par le carré de son côté, celle d'un rectangle par le produit de sa base par sa hauteur, d'un cercle par le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, etc. A ce point de vue, purement numérique, on peut dire que l'unité de surface est une unité dérivée de l'unité de longueur considérée comme unité fondamentale et qu'elle est du degré 2 par rapport à cette unité.

Soit toujours A la quantité à mesurer, mais supposons que

l'unité a dérive d'une unité α d'espèce différente par rapport à laquelle son degré est n, ce qui signifie que l'on a entre les quantités a et α une relation numérique telle que

$$(4) \qquad a = \alpha^n.$$

Nous aurons, d'après la relation (1),

$$A = m\alpha^n,$$

et, de même si l'on change d'unité α,

$$A = m'\alpha'^n,$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{m'}{m} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^n,$$

c'est-à-dire que la mesure de la quantité A, considérée comme dérivée, varie en raison inverse d'une puissance de la grandeur unité égale à son degré.

Ainsi la mesure d'une surface devient 100 fois plus grande quand on exprime les longueurs à l'aide d'une unité 10 fois plus petite.

On reconnaîtra de même que, si une quantité A dépend de plusieurs unités fondamentales α, β, γ, c'est-à-dire si l'on a entre les unités a, α, β, γ la relation numérique

$$(6) \qquad a = \alpha^n \beta^p \gamma^q,$$

la mesure de A varie en raison inverse de la puissance n de la grandeur assignée à α, des puissances p et q des grandeurs β et γ.

Par exemple, la formule du mouvement uniforme étant

$$e = vt,$$

d'où

$$v = \frac{e}{t},$$

une vitesse s'exprime par le quotient d'un espace par un temps, et l'unité de vitesse dérive à la fois de l'unité de longueur, par rapport à laquelle elle est du degré 1, et de l'unité de temps, par rapport à laquelle elle est du degré -1. Si l'on rend l'unité de longueur 10 fois plus grande, l'unité de temps 10 fois plus

[illegible] représentée par un nombre [illegible] unités primitives.

[illegible] les unités fondamentales [illegible] quantités physiques et méca- [illegible] arbitraire, car toute relation [illegible] peut être indifféremment [illegible] quantités qu'elle renferme, et [illegible] autres. Mais les relations [illegible] complexes suivant le choix des [illegible] se décide par des motifs de [illegible].

[illegible] comme unités fondamentales les [illegible] définies par le *système mé-* [illegible]

[illegible] originelle, est la quarante- [illegible]. Pratiquement, c'est [illegible] possède à 0° une règle [illegible] construite en 1799 par la [illegible] déposée au Conservatoire [illegible] mesurer les longueurs en [illegible] quelconque de ses mul- [illegible]

[illegible] a été rattachée à l'u- [illegible] qui permet de re- [illegible] possède l'autre, mais qui [illegible] certain nombre de rela- [illegible] comme le poids que pos- [illegible] de la mer 1^cc d'eau distillée, [illegible] maximum de densité. Pratique- [illegible] poids du *kilogramme étalon* [illegible] le mètre et conservé avec lui.

[illegible], le décimètre et le kilogramme, [illegible] sont des unités *correspondantes*. Si [illegible], le poids d'une quantité d'eau quel- [illegible] même nombre que son volume à 4°, [illegible] est le produit des nombres qui expriment [illegible] son poids spécifique relatif à l'eau.

La simplicité des unités métriques les a fait successivement adopter par la plupart des nations; seules l'Allemagne et l'Angleterre sont jusqu'ici demeurées officiellement étrangères à tout accord. Mais les savants des deux pays inclinent à employer exclusivement les unités françaises dans toutes leurs recherches. C'est même d'Angleterre qu'est partie récemment l'idée d'unifier les mesures physiques à l'aide d'un système qui fait usage du mètre et du gramme, et sur lequel nous reviendrons bientôt.

L'unité de temps est empruntée aux phénomènes astronomiques et n'a pas été rattachée aux unités de longueur et de force. La division décimale du temps proposée dans le système métrique primitif n'a même pas prévalu. L'unité la plus employée, la seconde, est contenue 60 fois dans la minute, 3600 fois dans l'heure et 86 400 fois dans le jour de vingt-quatre heures.

Le Tableau suivant indique le degré des diverses unités dérivées que nous connaissons déjà par rapport à la longueur, au temps et à la force, considérés comme unités fondamentales :

Système français.

UNITÉS DÉRIVÉES.	UNITÉS FONDAMENTALES.		
	Longueur l.	Temps t.	Force f.
Surface	2	0	0
Volume	3	0	0
Angle	0	0	0
Vitesse	1	—1	0
Vitesse angulaire	0	—1	0
Accélération	1	—2	0
Masse	—1	2	1
Poids spécifique	—3	0	1
Densité	—4	2	1
Quantité de mouvement	0	1	1
Travail	1	0	1
Force motrice	1	0	1
Puissance motrice (travail par unité de temps)	1	—2	1

Le système d'unités proposé par l'Association britannique diffère du système français, en ce que la masse est substituée à la force comme unité fondamentale. La masse d'un corps offre la propriété d'être invariable, tandis que son poids change avec l'altitude et la latitude; cependant l'avantage pratique de ce nouveau choix est loin d'être évident.

Les conditions que l'on doit demander aux unités fondamentales sont en effet les suivantes : 1° de pouvoir être aisément retrouvées; 2° d'être autant que possible susceptibles de détermination directe. Or la seconde condition n'est pas remplie par les masses; car, pour mesurer la masse d'un corps, on commence par déterminer son poids à la balance, on divise ensuite par le nombre qui exprime l'accélération de la pesanteur à la latitude de 45° et au niveau de la mer.

Supposons, au contraire, qu'il s'agisse de mesurer une force; on l'évalue directement au moyen de poids au lieu de l'expérience, puis on effectue sur ces poids les corrections relatives à la latitude et à l'altitude pour avoir l'expression de la force en fonction du gramme normal. Remarquons qu'on n'éviterait pas ces corrections en prenant comme unité fondamentale la masse, puisque ce sont toujours des poids que l'on mesure et que la marche suivie dans les expériences est imposée par la nature des choses.

Les grandeurs assignées aux unités fondamentales par l'Association britannique sont le centimètre, la seconde et la masse de 1^{cc} d'eau distillée à 4°. Cette dernière unité a été désignée à tort sous le nom de *gramme*, ce qui peut entraîner une confusion fâcheuse. L'unité britannique de masse est la masse que possède un corps pesant 1^{gr} normal au niveau de la mer et à la latitude de 45°.

Le système de l'Association britannique, ou système C. G. S., commence à être très-répandu, et il importe de connaître les degrés des diverses unités dérivées par rapport à la longueur, au temps et à la masse.

Il suffit pour cela de remarquer que, la masse étant du degré 1 par rapport à la force, 2 par rapport au temps, — 1 par rapport à la longueur, la force est à son tour du degré 1 par rapport à la masse, — 2 par rapport au temps et 1 par rapport

à la longueur. Toutes les unités dérivées de la force conservent leur degré quant à la masse, mais leur degré diminue de deux unités par rapport au temps et augmente d'une par rapport à la longueur.

Système de l'Association britannique.

UNITÉS DÉRIVÉES.	UNITÉS FONDAMENTALES.		
	Longueur *l*.	Temps *t*.	Masse *m*.
Surface	2	0	0
Volume	3	0	0
Angle	0	0	0
Vitesse	1	—1	0
Vitesse angulaire	0	—1	0
Accélération	1	—2	0
Force	1	—2	1
Poids spécifique	—2	—2	1
Densité	—3	0	1
Quantité de mouvement	1	—1	1
Travail	2	—2	1
Force vive	2	—2	1
Puissance motrice	2	—3	1

L'unité de force du système britannique a reçu le nom de *dyne*. C'est la force qui, agissant sur la masse de 1^{gr}, produit une accélération de $0^{m},01$ par seconde. Or, le poids de 1^{gr} imprime, à la latitude de 45° et au niveau de la mer, une accélération de $980^{cm},896$ à la masse de 1^{gr}. Le gramme vaut donc $980^{dynes},896$.

Dans le même système, l'unité de travail a reçu le nom d'*erg*. C'est le travail effectué par 1^{dyne} dont le point d'application se déplace de $0^{m},01$. Le kilogrammètre vaut $98\,089\,600^{ergs}$ [1].

[1] Pour éviter d'écrire de trop grands ou de trop petits nombres, qui ne représentent rien à l'esprit, on peut, comme le propose l'Association britannique, placer la virgule immédiatement après le premier chiffre significatif et mettre en vedette la puissance de 10 par laquelle le nombre ainsi exprimé doit être multiplié. Ainsi le kilogrammètre vaut approximativement $9,809.10^{7}$ ergs. *Voir*, au sujet du système C. G. S. : 1° *Reports of the committee on electrical*

HOMOGÉNÉITÉ DES FORMULES DE LA MÉCANIQUE ET DE LA PHYSIQUE. — Les lois de la Mécanique et de la Physique sont de deux espèces : les unes ne sont que des relations démontrées *a priori* d'après la définition des quantités entre lesquelles elles subsistent, et elles doivent se réduire à des identités, quand on y remplace chacune de ces quantités par son expression en fonction des unités fondamentales; les autres sont des lois naturelles dont la raison théorique peut nous échapper, mais qui sont vraies indépendamment des grandeurs qu'il nous plaît d'assigner à nos unités de mesure; par suite, si l'on fait disparaître des équations toutes les quantités dérivées, de manière à n'y laisser subsister que les quantités fondamentales, le changement d'unités ne pourra avoir d'autre effet que de multiplier les deux membres de l'égalité par un facteur arbitraire. Il en résulte que chacune des quantités fondamentales entre au même degré dans les deux termes de ces équations.

Comme exemple du premier cas, nous considérerons l'équation dite des *forces vives* : elle égale des forces vives et des travaux, et ces deux sortes de quantités sont, d'après leur définition (1), du degré 1 par rapport à l'unité de longueur, des degrés 0 et 1 par rapport aux unités de temps et de force; signalons encore la formule des oscillations du pendule simple

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

dont les deux membres sont du degré 0 par rapport aux unités de longueur et de force, du degré 1 par rapport à l'unité de temps. Ces équations sont donc homogènes.

Considérons maintenant une loi naturelle, la loi de Mariotte; elle consiste en ce que le produit du volume que possède une masse gazeuse donnée à température fixe par la pression

---

[illegible] publiés par F. Jenkin, Londres, 1878; 2° *Illustrations of the centimetre gramme second system of units*, par le Pr. Everett, publié par la Société Royale de Londres, 1873. Une nouvelle édition de ce dernier Ouvrage, augmentée de nouveaux exemples, a paru en 1880.

(1) Voir le tableau de la p. 63.

qu'elle exerce est constante. Or le volume d'un corps est du degré 3 par rapport à l'unité de longueur; la pression, c'est-à-dire la force appliquée à l'unité de surface, est du degré 1 par rapport à la force, du degré — 2 par rapport à la longueur. Le produit de ces deux quantités a pour degrés 0 par rapport à l'unité de temps, 1 par rapport à l'unité de force et à l'unité de longueur. La loi de Mariotte n'égale dans ses deux membres que des quantités de même degré, et constitue par conséquent une loi possible *a priori*; si elle s'écarte de l'exactitude, la loi réelle ne pourra en différer que par l'addition au second membre d'une quantité dont les degrés par rapport au temps, à la force et à la longueur seront toujours 0, 1 et 1. M. Regnault a proposé la formule

$$PV = P'V'\left[1 + \alpha\frac{P'}{P} + \beta\left(\frac{P'}{P}\right)^2 + \ldots\right],$$

où α, β, ... sont des constantes. Le facteur ajouté au second membre est du degré 0 par rapport à toutes les unités, et la formule indique encore une loi possible *a priori*.

DE LA MESURE DES LONGUEURS.

Pour obtenir des mesures exactes, la condition indispensable est d'abord de savoir reproduire, autant de fois qu'on le désire, et avec une exactitude extrême, l'unité que l'on doit employer.

On peut comparer une règle métallique au mètre étalon, à l'aide d'un appareil nommé *comparateur*, et qui a été construit par Fortin.

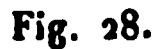
Une large plaque en fonte rabotée sert de base à tout l'ap-

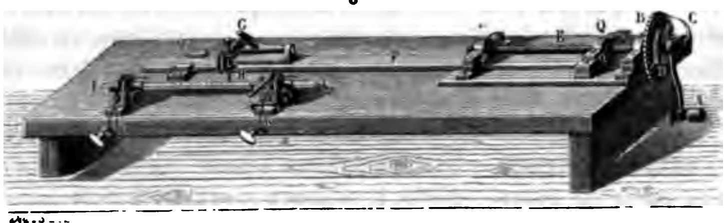
Fig. 27.



pareil (*fig.* 27); elle porte à une extrémité un talon en acier C, fixé invariablement par des vis : c'est une pièce en saillie qui

avancera d'un pas de vis, c'est-à-dire de $0^m,001$; si elle décrit un dixième, un centième, un millième de tour, il marchera d'un dixième, d'un centième ou d'un millième de millimètre : il suffit donc de mesurer la fraction de tour parcourue par la manivelle


Fig. 28.



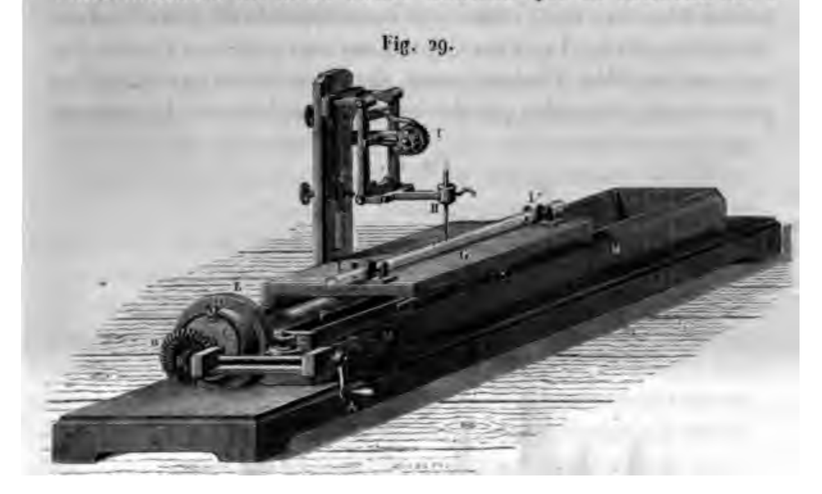
pour avoir la fraction de millimètre franchie longitudinalement par le burin. A cet effet, la partie antérieure de la vis est munie d'un cercle D qui tourne avec elle et qui est divisé en 100 parties égales ; puis un index immobile C, fixé à la base de l'appareil, indique le déplacement du cercle.

Veut-on maintenant tracer des divisions équidistantes sur un tube de verre par exemple, on le dispose, comme la figure le montre, dans des coussinets où il est appuyé par deux cordes à boyau L, K, et dans lesquels il peut tourner sans avancer ou reculer ; on prend un burin de diamant, et on l'amène à l'un des bouts du tube où l'on trace la division initiale en tournant le tube d'une main et appuyant sur le burin de l'autre. Ensuite on décrit avec la manivelle un arc de n divisions, ce qui fait marcher le burin de $\frac{n}{100}$ de millimètre, et l'on trace un second trait ; on répète ensuite la même opération jusqu'à la fin du tube.

Telle était la machine à diviser dans sa simplicité primitive, complète théoriquement, mais laissant beaucoup à désirer sous le rapport de la commodité dans l'emploi qu'on en faisait. On verra dans la *fig.* 29 un appareil plus perfectionné. La base M est en fonte et constitue un chemin de fer dont les rails supérieurs sont bien rabotés ; la vis se voit en F, et l'écrou qu'elle met en mouvement est lié à la plaque G, qui avance avec lui en glissant sur les rails. Sur cette plaque on fixe l'objet LL' que

l'on veut diviser. Quant au burin, il est placé en H et demeure fixe ; c'est l'objet qui se déplace et présente successivement ses divers points à l'action du traçoir. Pour plus de commodité, la manivelle placée en A imprime le mouvement à la vis par l'intermédiaire de deux roues dentées qui se rencontrent à

Fig. 29.



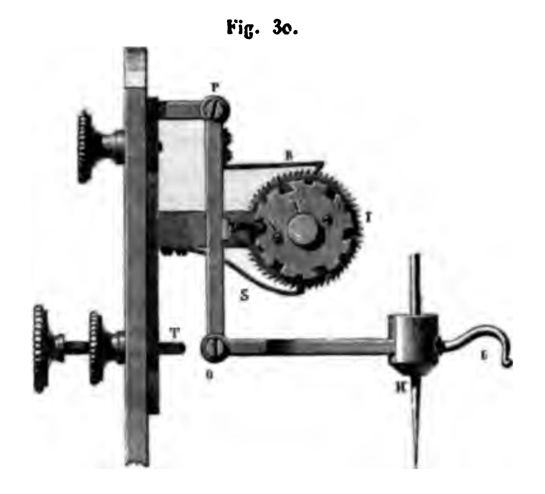
angle droit. Telle que nous la décrivons, la nouvelle machine se comprend aisément; mais il y a deux points particuliers sur lesquels nous allons insister : c'est la disposition du burin d'abord, et la mesure de la rotation de la vis ensuite.

On ne trace pas sur une règle que l'on divise de traits également allongés : le premier est long, les quatre suivants sont courts, le cinquième est intermédiaire entre le premier et les suivants; puis viennent quatre divisions courtes et une dixième qui est égale à la première. Or, dans l'ancienne machine, c'était à la main de l'opérateur qu'on laissait le soin d'aligner convenablement les traits : cela exigeait de l'habileté et une attention continuelle, sans produire toute la régularité désirable pour la commodité des lectures. La nouvelle disposition du burin, représentée en perspective dans la *fig.* 29 et en profil *fig.* 30, charge un mécanisme spécial de ce soin. On tient à la main le petit crochet U, on le tire d'abord vers soi en le soulevant; ensuite on le pousse en appuyant légèrement, et le tra-

celet H pénètre dans la plaque à diviser où il marque le trait : pour donner à ce trait la longueur convenable, il suffit donc de limiter par des butoirs la course des pièces qui portent le burin.

Il y a au-dessus du burin une roue IVX qui peut tourner autour d'un axe fixe ; cette roue est composée de deux plaques circulaires, l'une I qui est dentée sur son contour, l'autre VX qui est entaillée d'échancrures alternativement profondes et peu creuses, séparées par des espaces qui forment le contour

Fig. 30.



circulaire de la roue. A chaque échancrure correspond une dent de la roue dentée, et quatre dents à chaque partie pleine. Au moment où l'on tire le crochet U, une pièce saillante X avance vers la roue, pénètre dans une échancrure et, arrivée au fond, termine le mouvement du burin. Quand après cela on pousse le tracelet, il marche jusqu'à ce que l'on rencontre un butoir T qui ne permet pas d'aller plus loin.

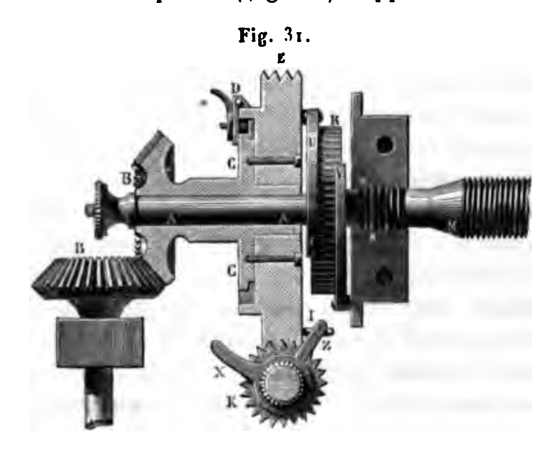
Mais, pendant que ce mouvement se fait, un crochet R, qui engrène dans la roue extérieure, la fait tourner d'une dent, déplace les échancrures de la roue voisine V, et, quand ensuite on tire de nouveau le burin, la pièce X rencontre, non l'échancrure qui s'est abaissée, mais le contour extérieur qui a pris

sa place; la course est donc moins longue et le t court que précédemment. A chaque mouvement, la m tation des roues directrices se produit, et, quand arriv quième division, la saillie X pénètre dans une second crure qui allonge le trait, mais qui, étant moins p fon la première, le fait moins long. En résumé, l'opér pas à s'occuper de la longueur de ces traits ; ils alignés, et toutes les divisions multiples de 5 ou connaîtront par des longueurs spéciales.

Le deuxième mécanisme que nous allon timé par le même besoin de simplifier la manœu fiant tout entière à l'appareil. Quand on opérait av machine, il fallait entre le tracé de chaque division la vis du même angle; cela exigeait à chaque fois opération d'Arithmétique. On tournait, par exemple, de vision o à la division 12, ensuite de 12 à 24, puis de tout cela exigeait du travail d'esprit, et il fallait à chaque fois se préoccuper d'arrêter la roue divisée à la division voulue, sans la dépasser tout en l'atteignant. C'est toute cette peine et toutes ces causes d'inexactitude que nous allons éviter.

La vis micrométrique M (*fig.* 31) s'appuie sur le collet NN,

Fig. 31.



que l'on a figuré démonté ; c'est là qu'elle tourne sans déplacement. Elle se prolonge ensuite par une roue à rochet R et se termine par un axe rodé AA.

Autour de cet axe AA est une pièce CCDE que la figure montre en coupe ; elle reçoit le mouvement de la manivelle par les roues d'angle B, B' ; elle porte un plateau circulaire E large et épais, sur le contour extérieur duquel est taillée une vis dont nous verrons bientôt l'usage. Cette pièce, étant folle sur l'axe AA, peut tourner autour de lui sans faire mouvoir la vis.

Mais il y a un ressort UF, fixé d'une part sur le contour du cercle E et venant appuyer de l'autre sur les dents de la roue à rochet. Si par la manivelle on fait tourner le cercle de F vers U, le ressort glisse sur les dents sans entraîner la roue, et la vis demeure immobile; mais, quand le mouvement se fait de U vers F, le ressort s'engage dans les dents, les chasse devant lui et imprime à la vis une rotation égale à celle qu'il a reçue. Par ce mécanisme, la vis micrométrique cesse de pouvoir marcher dans les deux sens; tout mouvement qui va de U vers F lui est transmis; tout mouvement qui est dirigé de F vers U la laisse en repos. On peut tourner la manivelle dans un sens sans produire aucune action; mais dans le sens inverse elle communique sa rotation à la vis M.

Cela posé, nous ferons remarquer un pignon denté K placé près du cercle E et qui engrène avec la vis tracée sur ce cercle. Quand celui-ci fait un tour, le pignon marche d'une dent, dans un sens ou dans l'autre. Or il y a sur le cercle un butoir I et sur le pignon un arrêt Z, et le mouvement des deux pièces que nous examinons s'arrête quand le butoir I et cet arrêt Z se rencontrent; c'est là un point de départ fixe, et, arrivés à ce moment, nous traçons une division. Nous faisons alors mouvoir le cercle E de U vers F; la vis marche, le pignon denté se déplace angulairement de X vers Z, et il arrive bientôt qu'un second arrêt X du pignon rencontre un deuxième butoir D du cercle; alors le mouvement s'arrête, et la vis a marché d'une quantité déterminée par les positions respectives des deux systèmes d'arrêt : on marque un deuxième trait. Ensuite on tourne la manivelle en sens contraire, ce qui ne déplace pas la vis, mais ramène en contact les deux butoirs I et Z, comme ils y étaient au point de départ, et l'on peut recommencer indéfiniment sans avoir à se préoccuper de me-

surer la rotation. Disons, pour terminer, que les arrêts I et Z sont fixes et les deux autres X et D mobiles; c'est en plaçant convenablement ceux-ci, au moyen d'une graduation faite sur le contour CC du cercle, qu'on règle la fraction de tour que l'on fait d'un arrêt à l'autre.

Sans insister sur les nombreux usages de la machine à diviser, revenons à la question qui nous a amenés à la décrire. Nous avons une règle de métal qui a la longueur du mètre, et nous voulons la diviser en millimètres. Si la machine à diviser que nous possédons était parfaite, cette opération serait bien simple : on réglerait la course des butoirs de manière à faire tourner la vis d'une circonférence complète à chaque fois, les divisions tracées seraient égales à $0^{m},001$, et, la première étant à l'un des bouts du mètre, la millième arriverait nécessairement à l'autre extrémité; mais dans la pratique cela n'arrive pas, et il faut commencer par étudier la machine avant de l'employer. On fixe le mètre sur la plaque mobile parallèlement à la vis, on place au-dessus un microscope portant des fils croisés, et l'on vise l'extrémité, puis on fait marcher la machine; le mètre se déplace, et l'on compte le nombre de tours qu'il faut faire pour amener l'autre extrémité sous la croisée des fils du microscope. Cette opération ne peut se faire en une seule fois, parce que la vis micrométrique n'a pas 1^{m} de longueur; mais on fractionne le mètre en parties successives sur lesquelles on fait séparément cette opération. On trouvera généralement que le nombre total des pas de vis contenus dans la longueur du mètre ne sera pas égal à 1000; par exemple, il sera égal à 998. Cela voudra dire qu'un pas de vis est égal en moyenne à $\frac{1000}{998}$ de millimètre ou $1^{mm},002$, et, par suite, si l'on veut tracer 1000 divisions sur la règle, il faudra les espacer d'une fraction de pas de vis représentée par 0,998 et faire tourner la vis de cette fraction de tour entre deux divisions consécutives; dans ce cas, on est sûr que la millième division tombera exactement au second bout du mètre, si la division initiale coïncide avec le premier.

VÉRIFICATION DE LA VIS MICROMÉTRIQUE. — La machine à di-

viser ne sert pas exclusivement à diviser des règles; on l'emploie aussi à mesurer des longueurs, par exemple la distance de deux traits tracés sur un tube de verre, etc. C'est précisément à des mesures de ce genre que l'on a recours pour vérifier la vis micrométrique de la machine à diviser : à cet effet, on détermine le nombre de tours et la fraction de tour qu'il faut faire effectuer à la vis pour transporter la croisée de fils d'un microscope, placé à poste fixe sur le chariot de l'appareil, d'une longueur égale à la longueur à mesurer; puis on répète successivement cette opération en utilisant des portions de plus en plus éloignées de la vis, de manière à reconnaître les endroits défectueux. Au reste, il n'est pas nécessaire, et il serait à peu près impossible d'amener la vis à un degré de perfection tel que toutes les mesures fournissent des nombres identiques : il suffit que ces nombres varient très-peu et d'une manière continue. Quand ce résultat est atteint, on utilise les mesures précédentes pour dresser une Table de correction indiquant en regard de chaque nombre de tours exact la longueur correspondante que fournirait la lecture de l'appareil s'il était parfait. On aura recours à cette Table pour corriger toutes les mesures ultérieures.

VERNIER (1). — Grâce à la machine à diviser, nous savons maintenant diviser les règles en millimètres et adapter ces règles à tous les appareils qui devront mesurer les longueurs; mais cela ne suffit pas encore : il faut pouvoir pousser plus loin la division du mètre et apprécier des fractions de millimètre. Il y a pour atteindre ce but un appareil fort simple : c'est le vernier.

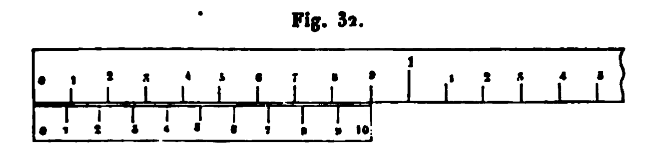
Prenons une règle de cuivre d'une longueur totale de $0^m,009$; divisons-la en 10 parties égales au moyen de la machine précédente. Puis disposons cette règle le long du mètre de manière à pouvoir aisément la faire glisser contre son arête divisée :

(1) Cet appareil porte le nom de son inventeur Pierre Vernier, qui l'a décrit en 1631 (*La construction, l'usage et les propriétés du quadrant*, Bruxelles). On l'attribue quelquefois à tort à Pedro Nunez, professeur de Mathématiques à Coïmbre, d'où le nom de nonius par lequel cet instrument est encore désigné en Allemagne (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 265.)

cette règle sera un vernier. Puisque sa longueur totale est de $0^{m},009$, et qu'elle est divisée en 10 parties, chaque division vaut $\frac{9}{10}$ de millimètre, pendant que la valeur des divisions du mètre est de $0^{m},001$ ou $\frac{10}{10}$; la différence est donc $\frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ de millimètre.

Il suit de là que, si les deux traits 0 (*fig.* 32) coïncident, les

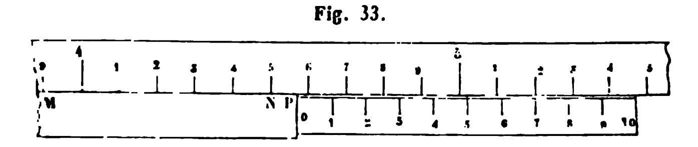
Fig. 32.



deux traits 1 différeront de $0^{mm},1$, les traits 2 de $0^{mm},2$, et ainsi de suite; et, si ce sont deux autres divisions quelconques qui coïncident, les retards des divisions du vernier sur celles de la règle sont encore 0,1, 0,2, 0,3, ..., à partir des traits qui se confondent.

Supposons maintenant que l'on veuille mesurer un objet MNP (*fig.* 33), c'est-à-dire le comparer au mètre; on trouvera, par

Fig. 33.



exemple, qu'il contient $0^{m},04$ et $0^{m},005$, plus une fraction, qui est la distance NP comprise entre le cinquième millimètre et l'autre bout P de l'objet; c'est cette fraction qu'il faut mesurer. A cet effet, on amène le vernier contre l'extrémité P de l'objet, et l'on cherche quel est celui de ses traits qui coïncide avec un des traits de la règle; dans la figure, c'est le septième. Alors en partant de là nous trouvons les divisions 6, 5, 4, 3, ..., 0 du vernier, qui sont en retard sur les traits de la règle de $0^{mm},1$, $0^{mm},2$, ..., $0^{mm},7$; donc la fraction NP qu'il fallait apprécier est égale à $0^{mm},7$. Sa valeur est donnée en dixièmes de millimètre par le numéro d'ordre de la division qui coïncide.

Appliquons cela au cas où l'on voudrait mesurer la hauteur d'une colonne barométrique. Le sommet du mercure se voit en A (*fig.* 34) entre les divisions 760 et 761 de la règle. On descend le vernier au moyen d'un pignon C jusqu'à placer le trait o vis-à-vis du sommet du mercure; la longueur à mesurer est la distance du trait o à la division 760. Or, en parcourant l'échelle du vernier, on voit la septième division en coïncidence avec un trait de la règle; la fraction de millimètre que l'on cherche est $0^{mm},7$.

Fig. 34.



Nous avons pris comme exemple le cas où l'on donne au vernier une longueur de $0^{m},009$ pour le diviser en 10 parties; nous pourrions le prendre égal à $0^{m},019$, $0^{m},029$, $0^{m},039$ et y tracer 20, 30, 40 divisions, ce qui nous permettrait de mesurer des vingtièmes, trentièmes et quarantièmes de millimètre. Toutefois, quand on multiplie beaucoup les traits, il arrive un moment où, à droite et à gauche des deux divisions qui coïncident exactement, il y en a un grand nombre qui diffèrent si peu dans leur position, qu'elles semblent encore se confondre, et l'on est dans l'impossibilité de distinguer celles qui se superposent le mieux. En diminuant la largeur des traits et en les regardant avec une loupe qui les grossit, on peut aller jusqu'aux centièmes de millimètre; mais il y a toujours une limite qu'on ne peut dépasser.

Le vernier s'applique à toutes les règles divisées; il s'applique également aux arcs de cercle, et se trace sur les alidades. Si le cercle marque les degrés, un vernier au soixantième mesure les minutes.

SPHÉROMÈTRE. — La vis micrométrique ne sert pas seulement à diviser des longueurs : elle est encore employée toutes les fois qu'il faut apprécier des distances très-petites, et on la retrouve dans tous les appareils micrométriques. Nous allons

décrire celui qui sert à mesurer l'épaisseur des lames minces à faces parallèles.

Un trépied (*fig.* 35) à pointes d'acier bien trempé est percé en son milieu d'un trou façonné en écrou dans lequel s'engage une vis d'un pas régulier et égal à $\frac{1}{2}$ millimètre. Le trépied repose sur un plan de verre douci à l'émeri; il est fixe. Quant à la vis, elle s'élève ou s'abaisse si on la tourne, et son extrémité, terminée en pointe mousse, peut d'abord se mettre en contact avec le plan de base, puis se relever peu à peu et d'une quantité qui est proportionnelle au nombre fractionnaire de tours que l'on a faits. Il ne s'agit que de le mesurer.

Fig. 35.



A cet effet, on a vissé sur un des pieds de l'écrou une règle verticale tranchante BC, qui est divisée en demi-millimètres : c'est l'index; et sur le sommet de la vis on a placé un cercle horizontal mince A; il porte 500 divisions égales qui défilent devant l'index au moment où la vis marche. Enfin, pour manœuvrer commodément l'appareil, on l'a surmonté d'un bouton fileté D que l'on fait tourner d'une main, pendant que de l'autre on saisit un des pieds pour maintenir l'écrou dans une position fixe.

Faisons d'abord descendre la vis jusqu'au moment où le bord du cercle horizontal A soit au niveau de la division 0 de l'index et où la division 0 tracée sur le cercle soit en face du tranchant de cet index : cette position est le point de départ de la graduation. Si nous faisons ensuite remonter la vis, nous voyons passer successivement les divisions 1, 2, 3, ... devant l'index, et, comme il y en a 500 dans un tour, chacune d'elles correspond à un mouvement ascensionnel égal à $\frac{1}{500}$ de pas de vis ou à $\frac{1}{1000}$ de millimètre. Quand on a fait un tour entier, la division 0 est revenue à son point de départ, mais le bord du

cercle a monté ; il se trouve au niveau de la division 1 de l'index, et l'élévation est de $\frac{1}{2}$ millimètre. En continuant ainsi, nous arrivons, par exemple, à placer le bord du cercle à une hauteur comprise entre 3 et 4, et à mettre la division 25 vis-à-vis de l'index; à ce moment, la hauteur de la vis au-dessus du point de départ sera égale à 3 demi-millimètres augmentés de $\frac{25}{1000}$, ou $\frac{3}{2} + 0,025$, ou $1^{mm},525$. Pour apprécier la hauteur de la vis au-dessus du zéro il faudra donc : 1° observer le nombre de divisions que le bord du cercle a parcourues sur la règle verticale et le diviser par 2 ; 2° lire le numéro d'ordre de la division du cercle qui est en regard du tranchant, le diviser par 1000 et faire la somme de ces deux nombres.

Indiquons maintenant comment on doit s'y prendre quand on veut mesurer l'épaisseur d'une glace mince à faces parallèles. Nous commencerons par abaisser l'extrémité de la vis au-dessous du plan des pointes du trépied, et nous poserons ensuite l'instrument sur son plan de verre; il s'y tiendra sur trois pointes; la quatrième restant soulevée, il ne sera pas calé, et, si on l'agite à la main, il oscillera avec un bruit de trépidation particulier. Mais, quand on relève la vis, ce mouvement et ce bruit diminuent peu à peu et cessent quand les quatre pieds reposent sur la base; l'habileté de l'expérimentateur consiste à saisir ce moment précis sans le dépasser. On y arrivera plus aisément encore en modifiant l'opération comme nous allons le dire. Au moment où la vis est trop abaissée, on peut avec le doigt donner à l'un des supports une légère impulsion horizontale; sous cette influence, l'appareil se met à tourner autour de la pointe de la vis, pendant que celles du trépied décrivent des arcs de cercle en traînant sur la base avec un bruit de frottement; mais, en relevant la vis peu à peu, on arrive à un moment où ce mouvement devient progressivement plus dur et enfin cesse d'être possible : c'est ce moment que l'on saisit; mais, quelque habitude que l'on ait de l'opération, il y a toujours une latitude d'une ou deux divisions entre deux mesures consécutives.

Cela fait, on lit les divisions et l'on calcule la hauteur de cette station initiale, soit par exemple $1^{mm},525$. Alors on sou-

leve le sphéromètre et l'on place sous la vis la glace que l'on veut mesurer pendant que les pointes du trépied continuent de poser sur le plan de verre; on relève peu à peu la vis et l'on opère en tout point comme dans le cas précédent. La nouvelle station mesurée se trouvera, par exemple, à une hauteur de $3^{mm},826$, et l'épaisseur de la glace sera la différence entre 3,826 et 1,525.

On peut, au moyen du sphéromètre, mesurer le rayon d'une sphère. A cet effet, on place les trois pieds de l'instrument en ABC sur cette sphère (*fig.* 36), et l'on relève la vis jusqu'à ce

Fig. 36.

Fig. 37.

qu'elle touche au pôle du petit cercle qui passe par les trois pieds A, B, C. Soient e la quantité dont il a fallu la soulever, d la distance commune de deux pieds consécutifs de l'instrument.

Le rayon du petit cercle ABC est AO, et, dans le triangle AOP, on a

$$\frac{d}{2} = \text{AO}\sin 60^\circ = \text{AO}\frac{\sqrt{3}}{2};$$

donc

$$\text{AO} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

On voit maintenant (*fig.* 37) le contour AEF de la sphère; la pointe est en E, les pieds sont sur le cercle AOF, et l'on a

$$\text{AO}^2 = \text{EO}(2\text{R} - \text{EO}),$$

$$\frac{d^2}{3} = e(2\text{R} - e),$$

dont on tirera R. Il est bien évident que, la valeur de R étant

déduite de la mesure de la quantité e, beaucoup plus petite, l'erreur commise dans la mesure de celle-ci se trouve multipliée par le rapport $\frac{R}{e}$; que, si par exemple e est connu à $\frac{1}{500}$ de millimètre près et si $\frac{R}{e} = 10$, l'incertitude sur la valeur de R sera au moins égale à $\frac{1}{50}$ de millimètre.

Si l'on voulait mesurer l'épaisseur d'un cheveu ou en général d'un corps qui ne pourrait directement se placer sous la vis, on prendrait pour première station la position de la pointe posant sur une glace parallèle, et pour deuxième celle où l'on aurait interposé le cheveu entre le plan de base et la glace (¹).

MESURE D'UNE DIFFÉRENCE DE NIVEAU. NIVEAU D'EAU. — A chaque instant on a besoin de connaître la différence de niveau de deux points; on peut la déterminer à l'aide de divers appareils, dont le plus simple et le moins précis est le niveau d'eau (*fig.* 38); il se compose d'un tube de métal, laiton ou fer-blanc, que l'on fixe à peu près horizontalement sur un pied à trois branches; il se recourbe à ses deux extrémités et se termine par deux tubes de verre cylindriques A et B; on l'emplit avec de l'eau ordinaire au moment même où l'on veut employer l'appareil, et les niveaux dans les tubes extrêmes se placent à la même hauteur. Ordinairement ces tubes sont terminés par des gou-

(¹) La plupart des instruments de mesure sont des machines telles qu'un déplacement d'un de leurs organes égal à 1^{mm} produit un déplacement d'un autre organe égal à n^{mm}. D'après le principe des vitesses virtuelles, deux forces égales respectivement à 1 et à $\frac{1}{n}$ appliquées à ces organes dans le sens du déplacement se feraient équilibre par l'intermédiaire de la machine. Réciproquement tout instrument propre à diminuer l'effort peut être transformé en un appareil de mesure. Ainsi le levier est l'organe sensible du comparateur; la vis celui de la machine à diviser et du sphéromètre. De même, M. Schönemann (*Ann. de Pogg.*, t. CXLVI, p. 612; *Journal de Physique de M. d'Almeida*, t. I, p. 408; 1872) a proposé l'usage du plan incliné (*Coin micrométrique*); M. Marcel Deprez (*Journal de Physique*, t. III, p. 52; 1874) celui d'un véritable diminutif de la presse hydraulique. La disposition des instruments de mesure est donc susceptible de varier à l'infini; mais ce qui donne à un instrument déterminé sa valeur micrométrique, c'est le degré de précision que l'on sait atteindre dans sa construction.

lots semblables à ceux qui forment l'orifice des flacons, et on les ferme avec des bouchons percés qui suffisent pour empêcher l'eau de s'écouler par les oscillations qu'elle éprouve pendant les transports, sans cependant empêcher la pression atmosphérique de s'exercer sur les surfaces intérieures. Cet appareil sert surtout aux nivellements, et voici comment on y procède. Pendant qu'une personne placée au loin maintient verticalement en F une mire divisée, un observateur dirige un

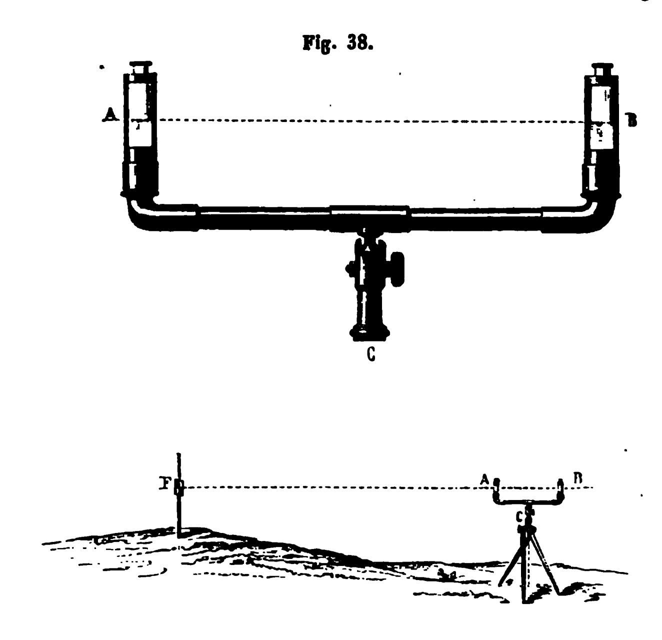


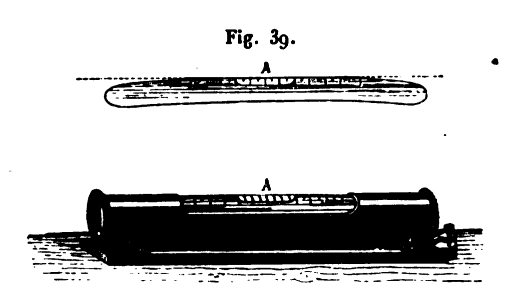
Fig. 38.

rayon visuel par les deux surfaces liquides du niveau et fait de la main le signe d'élever ou d'abaisser le voyant de la mire. Quand ce voyant a été placé sur le prolongement du rayon visuel, on mesure sur la mire sa distance au sol. Laissant le niveau au même lieu, on transporte alors la mire en un autre point, on répète la même opération, et la différence des hauteurs du voyant aux deux stations qu'il a occupées mesure la différence de leurs niveaux. On peut continuer l'opération de station en station et l'on finit par avoir les hauteurs relatives de deux points extrêmes très-éloignés. Cet appareil

est d'autant plus commode, qu'il se règle de lui-même sans l'intervention de l'opérateur; mais il n'a que très-peu de précision, à cause de l'imperfection de la visée. Dans les nivellements prolongés, il est indispensable d'opérer avec plus de délicatesse, et l'on emploie le niveau à bulle d'air.

NIVEAU A BULLE D'AIR. — Cet instrument est formé par un tube de verre courbé (*fig.* 39). On cherche autant que possible

Fig. 39.

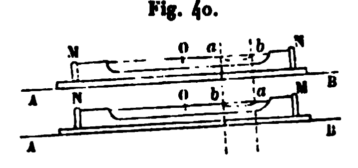


à lui donner la forme d'un tore de révolution; comme il est difficile de réaliser cette condition, nous supposerons la courbure quelconque, mais symétrique par rapport à un plan mené normalement au tube par le point A. L'appareil est rempli d'eau, sauf un très-petit espace occupé par une bulle d'air. Il est évident qu'elle viendra se placer symétriquement par rapport au point A si le plan tangent en ce point est horizontal. Si ensuite on incline le tube, la bulle se déplace et son milieu se fixe à chaque fois au point du tube pour lequel le plan tangent est horizontal. Plus le rayon de courbure sera grand, plus la bulle cheminera pour une inclinaison donnée du niveau. On trace sur le verre des divisions symétriques par rapport au point A; elles servent à fixer les limites de la bulle et à reconnaître si son milieu est en A ou s'il en est éloigné à droite ou à gauche. On enferme ensuite ce tube dans un étui de laiton dont la disposition varie avec les usages auxquels on destine l'appareil.

Si l'on veut employer le niveau à reconnaître l'horizontalité d'un plan, on le fait reposer sur une règle de cuivre parallèle au plan tangent en A, et si, l'ayant appliqué dans deux di-

rections rectangulaires sur la surface que l'on veut étudier, on voit toujours la bulle s'arrêter en son milieu, on en conclut que la surface qui le porte est horizontale. Mais les indications du niveau ne mériteront confiance que lorsqu'il aura été bien réglé. C'est une opération qu'il faut faire soi-même et répéter de temps en temps; voici comment on l'exécute. On place l'instrument sur un plan fixe à peu près horizontal, dans une direction MN (*fig.* 40), et l'on note la position *ab* de la bulle, puis on le retourne bout à bout, et on le replace dans la même direction. Rien n'est changé s'il est réglé, et la bulle prend en *ba* la même position par rapport à l'extrémité M que celle qu'elle avait d'abord par rapport à N. Si, au contraire, l'appareil n'est pas réglé, la bulle n'est pas symétriquement placée dans les deux cas; alors on fait jouer l'une des vis qui fixent le niveau à son support, de manière à donner à la bulle une position moyenne entre celles qu'on a observées, et le niveau est devenu juste; on s'en assure par un deuxième retournement, et l'on achève de l'ajuster s'il reste encore quelque inexactitude.

Fig. 40.



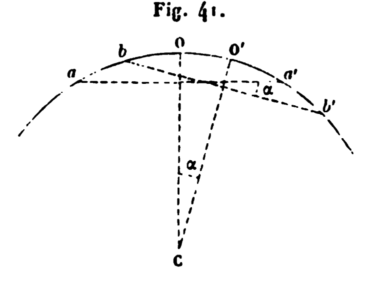
Le plus fréquent usage que nous ferons du niveau à bulle d'air sera de l'adapter à des instruments de Physique, afin de rendre vertical un axe de rotation; la description du cathétomètre va nous en fournir le plus bel exemple [1].

---

(1) Le niveau est aussi quelquefois employé à la mesure de l'inclinaison d'une droite presque horizontale; la courbure doit alors être absolument régulière.

Figurons la circonférence *aba'b'* à laquelle appartient le niveau (*fig.* 41). Quand il repose sur un plan horizontal, le milieu de la bulle est en O et les extrémités du niveau en *aa'*. Faisons tourner autour du point C la droite sur laquelle s'applique le niveau jusqu'à amener les extrémités de celui-ci en *bb'*. Son milieu vient en O'; mais la bulle reste en O au point le plus élevé. Sa course apparente OO' sous-

Fig. 41.



CATHÉTOMÈTRE. — Cet appareil est employé le plus souvent pour mesurer la différence de niveau de deux colonnes liquides en équilibre; il a été imaginé par Dulong et Petit [1] à l'occasion de leurs recherches sur la dilatation des liquides. Pouillet en a depuis signalé l'utilité générale; il l'a agrandi et lui a donné le nom de *cathétomètre*. Enfin Regnault en a fait le plus fréquent usage. Nous allons le décrire avec détail [2].

Il se compose d'une règle divisée, verticale, sur laquelle glisse une lunette horizontale (*fig.* 42). On vise les deux sommets que l'on veut comparer, et la course de la lunette entre les deux stations mesure la différence de leurs hauteurs. Il n'y a pas d'appareil plus commode quand il est bien gouverné, mais il n'y en a pas de plus trompeur quand il est mal conduit. Aussi son réglage doit-il être effectué avec un soin extrême et vérifié avant chaque mesure à laquelle on l'emploie.

Le cathétomètre repose sur un pied de fonte à niveaux rectangulaires HH et à vis calantes, sur lequel s'élève verticalement une tige solide de fer forgé, ayant au plus $1^m,30$ de longueur. Avant d'être fixée, cette tige a été travaillée au tour; on a taillé à sa base un tourillon conique et à son sommet un ombilic. L'axe de l'instrument est celui du tourillon, et il passe par le sommet de l'ombilic.

A cette tige on a superposé un tube creux de laiton formant manchon; on a travaillé sa base sur le tour, de manière à embrasser le tourillon du noyau sur lequel il repose, et l'on a disposé au sommet une vis G qui entre dans l'ombilic, où elle s'appuie. Ce manchon peut donc tourner régulièrement autour

---

tend au centre C du niveau un angle α égal à l'inclinaison de la droite bb'. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les droites CO, CO' qui joignent le centre au milieu des arcs $aa'bb'$ sont perpendiculaires aux cordes correspondantes.

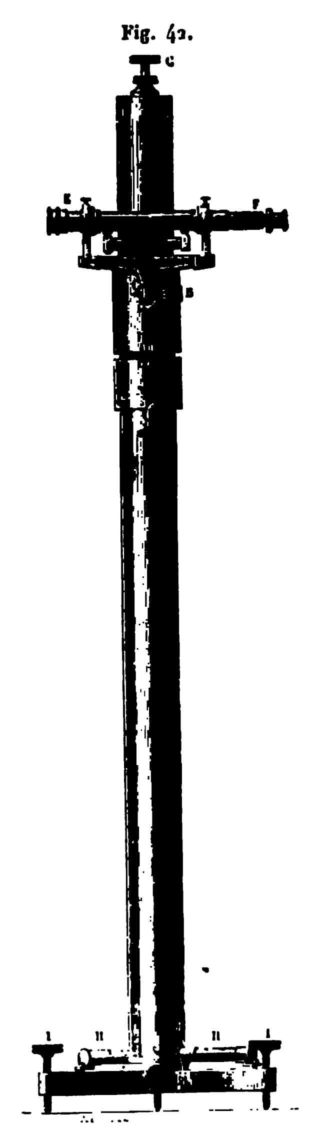
Pour avoir la valeur de l'angle α, il suffira d'observer la position de la bulle pour une inclinaison connue, ou mieux d'étudier le niveau, qui ne sera jamais d'une régularité parfaite, à l'aide d'un plan mobile à charnière dont on détermine l'inclinaison sur un cercle gradué.

(1) Dulong et Petit, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. VII.

(2) On construit aujourd'hui des cathétomètres de divers modèles. Celui que nous décrivons ici est le plus répandu; c'est celui que Regnault avait adopté.

de l'axe de la tige de fer, et une vis de pression permet au besoin de le fixer invariablement. A sa partie extérieure, le manchon offre deux règles JJ, LL; elles sont rabotées ensemble; leurs bords, taillés en biseau, sont parallèles entre eux et à l'axe, et l'une d'elles est, comme on le voit *fig.* 43, divisée en millimètres dans toute sa longueur.

Fig. 42.



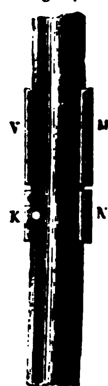
Sur cette double règle glisse un équipage mobile portant la lunette et ses accessoires : c'est un curseur composé de deux pièces qui embrassent la règle; on les voit en A et D à la face antérieure (*fig.* 42), en VM et KN à la face opposée (*fig.* 43). Elles glissent à frottement contre les bords, et leur mouvement, facilité par l'interposition d'un corps gras, se fait régulièrement et sans oscillations si l'appareil est bien construit; on les arrête au moyen d'une vis de pression K qui serre contre la règle, et l'on mesure les déplacements par un vernier V qui donne le cinquantième de millimètre.

Ces deux pièces sont distinctes, mais on les réunit l'une à l'autre par une vis de rappel AD qui les rapproche ou les éloigne. Quand le système a été fixé par le bouton K, on peut, au moyen de la vis, faire monter ou descendre le curseur supérieur qui porte la lunette et achever de préciser la visée par un mouvement micrométrique très-lent. Au besoin,

la vis est munie d'un tambour divisé qui mesure les deux-centièmes de millimètre.

La lunette EF porte un niveau qui sert à reconnaître si elle est horizontale ; elle repose sur les bras d'une fourchette, et une vis horizontale BC, par laquelle on incline la fourchette, sert à placer la lunette horizontalement.

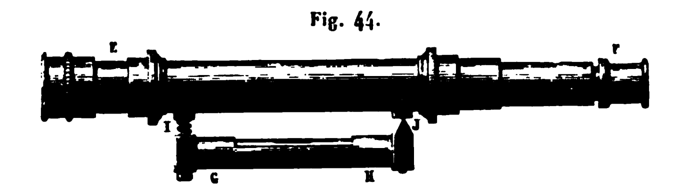
Fig. 43.



Telle est la forme générale de l'instrument; voyons maintenant comment on arrive à le rendre précis et à le régler. La lunette est un appareil optique que nous ne décrirons que dans la suite, mais dont les propriétés doivent être expliquées dès aujourd'hui. Elle porte dans son intérieur un système de deux fils d'araignée tendus et croisés à angle droit, et, en même temps que l'on voit l'image des objets, on voit aussi celle de ces fils, qui sont très-fins, et que l'on peut faire coïncider avec le point que l'on veut relever. Or il y a dans toute lunette une ligne bien définie que l'on nomme l'*axe optique*, qui passe par la croisée des fils et le centre de l'objectif, ou verre antérieur, et, quand on voit l'image d'un point coïncider avec le croisement des fils, on est assuré que ce point se trouve sur le prolongement de l'axe optique. C'est de tous les moyens de visée celui qui est le plus parfait.

Tout le système optique de la lunette est enfermé dans un tube de laiton qui n'en est que l'enveloppe. Sur ce tube on place deux colliers K et L (*fig.* 44) qui ont été travaillés en-

Fig. 44.



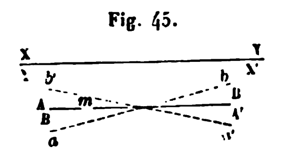
semble, et qui ne sont que des parties d'un même cylindre parfait que l'on a coupé en deux; leur axe est commun : c'est l'axe de l'enveloppe de la lunette ou son axe géométrique. On

voit que, si, la lunette étant posée sur la fourchette, on la fait tourner sur elle-même, on ne déplace pas l'axe géométrique, pas plus qu'en la retournant bout à bout; mais on voit aussi que les axes optique et géométrique sont distincts, et la première opération à faire, c'est de les rendre parallèles : il n'y a pour cela qu'à régler les fils croisés. On s'assurera que cette condition est remplie si, en tournant la lunette sur elle-même autour des colliers, ce qui ne change pas l'axe géométrique, et dirigeant la lunette sur un objet éloigné, on vise toujours au même point, et, quand on voudra ensuite régler l'axe optique, on n'aura plus qu'à régler l'axe géométrique, puisque tous deux sont confondus.

Après avoir satisfait à cette condition, il faut, avant d'employer le cathétomètre, en réaliser trois autres : 1° fixer la lunette parallèlement à son niveau; 2° la placer perpendiculairement aux arêtes de la règle sur laquelle elle glisse; 3° diriger dans la verticale l'axe de rotation du cathétomètre.

I. Soient XY (*fig.* 45) l'axe de la lunette, AB le niveau, *m* la position de la bulle; si XY et AB sont parallèles, et que l'on retourne la lunette bout à bout, XY se replacera en X'Y', le niveau ne fera que se retourner en se superposant, il se retrouvera en B'A', et la bulle, sans avoir changé de place par rapport au spectateur, se trouvera sous le même numéro de division *m*, de l'autre côté du zéro, c'est-à-dire du côté de B'. Si, au contraire, le niveau était d'abord en *ab*, il se retrouverait en *a' b'* après le retournement, et la bulle aurait changé de place. On pourra donc, en agissant sur la vis dont le niveau est muni, satisfaire à cette condition d'immobilité de la bulle, et le niveau sera réglé.

Fig. 45.

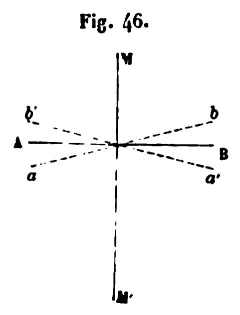


II. Cette première condition réalisée, on veut placer la lunette perpendiculairement à l'axe MM' (*fig.* 46); il faut alors faire décrire à l'instrument une demi-révolution autour de la tige fixe. Si la lunette AB est perpendiculaire à l'axe, elle se retrouvera parallèle à elle-même après la rotation; si elle était oblique en *ab*, elle se replacera en *a' b'*, et la bulle aura changé

de place. On pourra donc faire mouvoir la vis qui gouverne la fourchette jusqu'à ce qu'on voie la bulle au même point dans les deux positions de l'appareil.

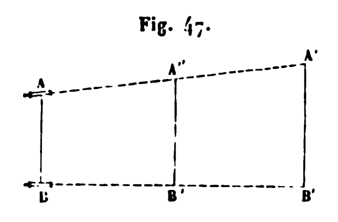
III. Il faut placer verticalement l'axe MM'. A cet effet, on dirigera la lunette parallèlement à la ligne qui joint les pieds de deux vis calantes, et l'on fera mouvoir l'une de ces vis jusqu'à placer la bulle au zéro; puis on fera tourner de 90° le plan azimutal de la lunette, et, en déplaçant la troisième vis, on amènera une seconde fois le niveau au zéro; et, quand il est ainsi réglé dans deux azimuts rectangulaires, il l'est dans tous les autres.

Fig. 46.



Telle est la série des opérations qu'il faut effectuer pour mettre un cathétomètre en état de donner des mesures précises. Le réglage de l'axe optique et celui du niveau peuvent être faits une fois pour toutes; mais les deux dernières opérations doivent être effectuées chaque fois que l'on change l'appareil de place, c'est-à-dire généralement presque à chaque mesure. Bien entendu, il faut encore compter avec les imperfections auxquelles aucun appareil n'échappe. Ainsi, toutes les fois que l'on transportera le curseur du haut en bas de l'échelle, on verra la bulle du niveau subir de légères oscillations; or, si la lunette n'est pas parallèle à une même direction aux stations A et B (*fig.* 47), les différences de hauteur A'B', A''B'' des points que l'on vise ne sont pas égales à la distance AB, qui représente sur l'instrument la course de la lunette, et l'erreur commise est d'autant plus grande que la distance des points observés est plus considérable. Il est donc nécessaire de faire mouvoir légèrement la fourchette au moment de chaque mesure, afin de ramener le niveau à son zéro. C'est à cause de cette nécessité de déplacer la fourchette à chaque moment qu'il est utile de disposer sur le pied de l'instrument deux ni-

Fig. 47.

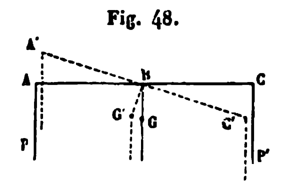


veaux fixes que l'on règle une fois pour toutes et qui servent à placer l'axe dans la position verticale.

DE LA MESURE DES POIDS.

BALANCE. — Peser un corps, c'est comparer son poids à ceux d'autres corps étalonnés. Nous employons à cet usage la balance que tout le monde connaît; mais la balance des physiciens est très-délicate et doit satisfaire à de nombreuses conditions que nous allons déterminer. Elle est constituée par un fléau métallique AC qui est mobile autour d'un axe horizontal B (*fig.* 48) et qui supporte à ses deux extrémités deux plateaux dans lesquels on place les corps que l'on veut comparer.

Fig. 48.



Examinons d'abord un cas tout à fait théorique. Supposons : 1° que les trois points de suspension A, B, C soient en ligne droite; 2° que les deux bras du fléau AB et BC aient le même poids, la même longueur et une forme symétrique par rapport au plan BG; 3° que les bassins aient le même poids. Il est clair que, lorsque les plateaux seront vides, le fléau se mettra en équilibre horizontalement quand son centre de gravité G sera dans le plan vertical passant par l'axe de suspension. Cet équilibre persistera ou sera rompu si l'on charge les bassins de poids égaux ou inégaux, et, réciproquement, on conclura l'égalité ou l'inégalité de ces poids si cet équilibre se maintient ou se détruit.

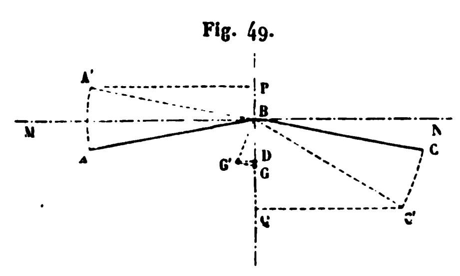
Il faut que le centre de gravité G du fléau soit au-dessous du point de suspension : c'est là une condition essentielle. Quand elle est satisfaite, la balance est bonne, car, étant vide ou également chargée à ses deux extrémités, elle se met en équilibre stable quand le centre de gravité est placé dans la verticale du point de suspension, et, si on la dévie, le fléau revient à sa position première par une suite d'oscillations isochrones et décroissantes. Ensuite, quand on place des poids inégaux dans les bassins, leur différence agit pour incliner AC en A'C' et relever le centre de gravité en G' jusqu'au moment où le poids du fléau qui agit en G' fait équilibre à cette différence des

poids. On voit que, pour ce nouveau cas, la balance arrive toujours à se mettre en équilibre dans une position horizontale si elle est chargée de poids égaux et dans une position de plus en plus inclinée quand les charges diffèrent de plus en plus. On conçoit donc la possibilité de reconnaître l'égalité ou l'inégalité des poids par l'horizontalité ou l'inclinaison du fléau.

SENSIBILITÉ (¹). — Il faut que ces conditions soient réalisées pour que la balance soit exacte; mais elles ne suffisent pas pour qu'elle soit sensible, c'est-à-dire pour qu'elle puisse accuser, par une grande inclinaison du fléau, des différences très-légères entre les poids que l'on veut comparer. Or il est évident que, toutes choses égales d'ailleurs, l'inclinaison croîtra quand le bras de levier BG à l'extrémité duquel agit le poids du fléau diminuera; par conséquent, la sensibilité est d'autant plus grande que le centre de gravité G est plus rapproché de l'axe de suspension B.

Nous avons admis jusqu'à présent que les trois points A, B, C sont en ligne droite : c'est, en effet, le cas que l'on cherche à réaliser quand on construit une balance. Mais, lors même qu'on pourrait atteindre cet alignement parfait, il serait impossible de le maintenir pendant les pesées, attendu que le fléau

Fig. 49.



fléchit sous l'influence des charges qu'il porte. Il convient donc d'examiner le cas plus général où les deux points d'attache A et C, tout en restant symétriques par rapport à BG, seraient placés au-dessous de l'axe de suspension B.

Soient AB et BC (*fig.* 49) les distances du couteau d'appui au

(¹) La théorie de la balance a été exposée pour la première fois par Euler (*Commentaria Petropolitana*, t. X).

...posons-les égales entre elles et ...ppelons β l'angle que chacune ... Supposons le centre de gra... ...nce l' du point B. Dési... ...en A et C deux poids ...le α et se placera ... que la somme ... nulle ; on

$$\ldots(\alpha+\beta),$$

$$\ldots \sin\alpha$$

$$\ldots\alpha \sin\beta);$$

$$\frac{1}{\frac{2P+p}{p}\operatorname{tang}\beta+\frac{\varpi l'}{pl}\operatorname{séc}\beta}.$$

...que reçoit le fléau quand il y ...ès de poids p, et, comme cette ...petite, $\operatorname{tang}\alpha$ peut être considéré ...bilité de l'appareil. Or on voit d'abord ... dépend de P, c'est-à-dire que la sen... ...charge commune des deux plateaux et ...and cette charge augmente. La balance ...partie de sa sensibilité, à mesure qu'on la ...rge (¹).

...trois points A, B, C sont en ligne droite, l'angle β ... formule précédente se réduit à

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{pl}{\varpi l'}.$$

(¹) Si les deux points A et C, au lieu d'être au-dessous de B, étaient situés au-dessus, rien ne serait changé au calcul précédent, si ce n'est le signe de β. On aurait donc

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{pl\cos\beta}{-(2P+p)l\sin\beta+\varpi l'}.$$

Le dénominateur diminue, et la sensibilité croît avec la charge.

La sensibilité est indépendante des poids communs P *qui chargent les plateaux.*

C'est cette condition que l'on cherche à réaliser, et alors la sensibilité de la balance est : 1° proportionnelle à la longueur l de chaque bras de levier; 2° inversement proportionnelle au poids ϖ du fléau; 3° inversement proportionnelle à la distance l' du centre de gravité au point de suspension.

Voici dès lors quelles sont les règles théoriques qui doivent diriger le constructeur dans la fabrication des balances. S'il veut les rendre sensibles et justes, il doit :

1° Faire les deux bras du levier sensiblement égaux;

2° Établir en ligne droite les axes de suspension du fléau et des plateaux;

3° Donner une grande longueur au fléau;

4° Réduire le poids de ce fléau autant que cela est possible;

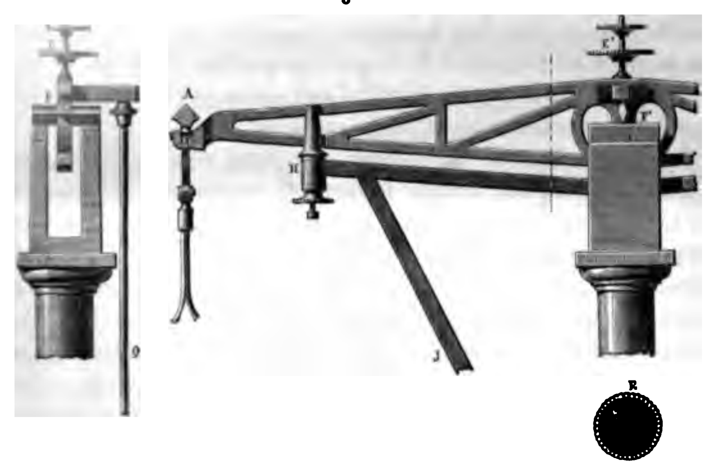
5° Placer le centre de gravité au-dessous du point de suspension et très-près de lui.

DESCRIPTION D'UNE BALANCE PRÉCISE. — Pour réaliser ces conditions multiples et délicates, on taille le fléau dans une règle plate de bronze ou d'acier (*fig.* 50). On lui donne une longueur de $0^m,60$ environ et une épaisseur qui ne dépasse pas $0^m,005$; il a sensiblement la forme d'un losange allongé, et, pour en diminuer le poids, on y pratique de larges entailles qui ne laissent subsister que les côtés du losange soutenus par des supports transverses. On satisfait ainsi à ce double besoin d'avoir un fléau long et léger, tout en lui conservant une grande résistance à la flexion.

Avant de songer à régler les axes de suspension, il fallait d'abord se préoccuper de les réaliser mécaniquement, c'est-à-dire de construire des supports linéaires, perpendiculaires au plan d'oscillation du fléau, capables de résister aux charges qu'ils doivent supporter, ne se déplaçant pas pendant les oscillations, et rendre les suspensions assez mobiles pour ne pas empêcher les mouvements par des résistances passives dues à leur frottement. Fortin imagina d'encastrer dans le fléau un prisme d'acier trempé FF', dont l'arête inférieure, bien rectiligne, pose sur un plan poli d'acier ou d'agate. Il est clair que

ʰ souhait l'axe mathématique dont on avait
's du fléau deux autres prismes U, dont
' placées vers le haut, servent à sup-
·les A auxquels sont suspendus les
·pension sont donc représentés par
· ismes. Ce sont elles qu'il faut aligner
: ·ite les points de suspension, et ce sont
··tes extrêmes à celle du milieu qu'il faut
·u obtenir deux bras de levier égaux.

Fig. 50.



Le plus souvent le constructeur se charge une fois pour toutes de régler les trois prismes : c'est le cas de la balance dont nous donnons la figure. Quelquefois on laisse à l'expérimentateur le soin de le faire lui-même, ce qui vaut bien autant. Alors deux des couteaux sont fixes et le troisième se déplace au moyen d'un double système de vis qui peut, ou l'élever et l'abaisser pour l'aligner avec les deux autres, ou le transporter horizontalement pour égaliser les bras de levier.

Il ne reste plus qu'à placer le centre de gravité du fléau au-dessous du point de suspension et tout près de lui : c'est la plus importante de toutes les conditions, car c'est elle qui détermine la stabilité et la sensibilité de la balance. Voici le mé-

canisme simple qui a été adopté. Sur l'arête supérieure du fléau et au-dessus du point de suspension, on a planté verticalement une vis à pas très-serrés. Deux boutons filetés E, E', taillés en écrous, se meuvent sur elle : l'inférieur est gros et lourd, le supérieur est petit et léger, et, quand on abaisse ou qu'on monte ces boutons, le centre de gravité descend ou s'élève, beaucoup si c'est le bouton lourd qui marche, lentement si l'on déplace le contre-poids plus léger. Le centre de gravité devenant mobile au moyen de cet artifice, il est possible de donner à la balance autant ou aussi peu de sensibilité qu'on le désire. On a même perfectionné ce dispositif en perçant un trou excentrique T dans l'un des boutons, ce qui fait qu'en le tournant on déplace latéralement le centre de gravité et qu'on le met exactement dans le plan vertical qui passe par l'arête de suspension au moment où le fléau est horizontal.

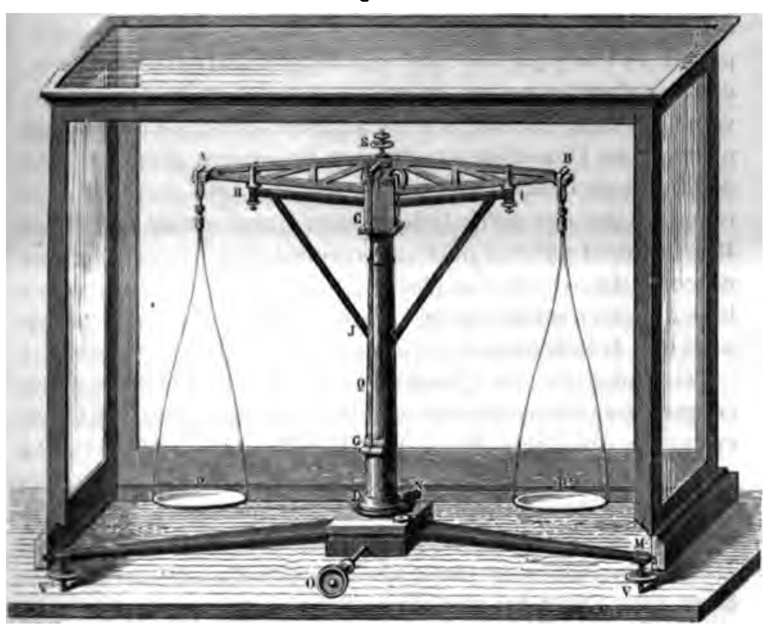
Si elle se réduisait aux pièces que nous venons de décrire, la balance n'offrirait aucun moyen de reconnaître le moment où le fléau est horizontal. Il faut un indicateur de ses mouvements, et c'est une aiguille d'acier Q (*fig.* 51) qui descend du milieu du levier jusqu'à la base du support, où elle oscille vis-à-vis une lame d'ivoire G, divisée en parties égales. Quand la balance est vide, on règle les vis calantes, de manière à placer l'extrémité de l'aiguille indicatrice au zéro de la division : c'est le point de départ, et, pour peu que le fléau s'incline sur sa position primitive, l'aiguille se meut sur le limbe; étant très-longue, elle accuse évidemment les moindres déplacements.

Il nous reste à dire comment on soutient toute la balance. Elle repose sur un pied en fonte LMN (*fig.* 51), à vis calantes V, V'. Du centre de ce pied s'élève une colonne en laiton DC, et sur le sommet de celle-ci se trouve le plan d'acier qui supporte le couteau central F. S'il était toujours soutenu ainsi, il serait bientôt émoussé, et la balance, outre qu'elle s'altérerait très-vite, ne pourrait être transportée; aussi l'on voit dans la figure une fourchette HIJ dont les bras embrassent le fléau : elle peut se soulever et s'abaisser par le moyen d'une crémaillère cachée dans la colonne, et avec laquelle engrène un pignon denté qu'on manœuvre par un bouton extérieur O. En tournant celui-ci, on soulève la fourchette, qui saisit le fléau et le

soutient fixement entre ses bras H et I; en le tournant en sens inverse, on descend la fourchette, qui dépose doucement le couteau sur le plan d'acier et abandonne le fléau à l'action des poids qui le sollicitent. De plus, comme une pesée est toujours une opération délicate, et qu'il faut éviter toutes les causes d'erreur, on enferme la balance dans une cage de verre qui repose sur le pied de l'instrument; on ne l'ouvre que pour



Fig. 51.



mettre ou enlever les poids; on la ferme pendant que l'on mesure. Ainsi l'on évite les courants d'air, l'action de l'humidité sur les corps que l'on pèse, en même temps que l'on soustrait à toute cause de détérioration l'instrument délicat, qui doit toujours être prêt à servir. Dans la figure on a enlevé le devant et le plancher de la caisse pour laisser voir toutes les pièces de l'appareil.

MÉTHODE DES DOUBLES PESÉES. — On voit avec quelle fidélité

... mes aux prescriptions de la
... de détails mécaniques ingé-
... rsuader que ces précautions ne
... ecessaires, et que l'expérimenta-
... par la manière dont il conduit ses
... ions qui existent ou peuvent exister
... nploie. Or l'une des conditions les
... es il faille satisfaire, celle qui rend la
... alité des bras de levier; mais, comme il
... à réaliser rigoureusement, il faut savoir s'en
... arvient par une méthode inventée par Borda,
... *pesées*, et qui se pratique de la manière sui-
... dans l'un des plateaux le corps que l'on veut
... quilibre exactement en versant de la grenaille
... autre côté; ensuite on retire le corps et on le
... par des poids notés, jusqu'à reproduire l'équilibre.
... vident que ces poids, qui prennent exactement la place
... ps dans le même plateau, lui sont équivalents, que les
... le levier soient égaux ou non. Il n'est donc plus néces-
... que la balance soit juste : il suffit qu'elle soit sensible.

Cela nous ramène à compléter, par quelques observations, ce que nous avons dit des conditions qui ont pour but d'accroître la sensibilité de l'appareil. Nous avons vu que pour y parvenir on augmente la longueur du levier pendant qu'on l'évide pour en diminuer le poids. Quand on exagère ces précautions, qui sont bonnes en elles-mêmes, on tombe dans le grave inconvénient de diminuer la rigidité du fléau; il éprouve alors, sous l'effet des charges qu'il supporte, des flexions qu'il est difficile de mesurer et impossible d'empêcher. Dès lors les couteaux extrêmes s'abaissent, les points de suspension cessent d'être alignés, le centre de gravité descend et la sensibilité de la balance décroît avec la charge. Ce sont là des effets que l'on remarque dans tous les instruments et auxquels il faut remédier : cela est heureusement facile.

Que l'on veuille d'abord peser des corps très-petits : on commencera par relever les deux boutons jusqu'à rendre la balance folle, puis on abaissera progressivement l'un d'eux, jusqu'au moment où elle commencera à redevenir stable, et on

lui donnera de cette manière le maximum de sensibilité qu'elle peut atteindre dans ce cas. Si ensuite on veut peser 2^{kg}, par exemple, on chargera approximativement la balance de ce poids, ce qui la rendra très-paresseuse, parce qu'elle fléchira; mais on lui rendra toute sa sensibilité première en relevant les boutons jusqu'au moment où elle va cesser de rester stable pour devenir folle. On voit donc qu'avant d'exécuter une pesée il faut approximativement savoir quel poids on veut apprécier, et régler à l'avance la sensibilité de l'appareil pour ce poids spécial.

DÉTAILS DES PRÉCAUTIONS NÉCESSAIRES POUR OBTENIR UNE PESÉE EXACTE. — L'exécution d'une pesée étant une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Physique, nous croyons devoir donner quelques détails sur la manière de la bien faire. On commence par fixer invariablement la balance sur une table épaisse et immobile, loin des rues agitées; on s'assied en face, puis, abaissant doucement le fléau par le moyen du bouton extérieur, on s'assure que l'aiguille se fixe au zéro, et, si elle n'y vient pas, on l'y amène en faisant jouer les vis calantes. La balance étant ainsi réglée, on place le corps d'un côté, de la grenaille de l'autre, et l'on établit grossièrement l'équilibre, ce qui n'est jamais difficile à faire. Pour l'obtenir ensuite exactement, il faut relever la fourchette pour fixer le fléau, éteindre avec la main les oscillations des plateaux, fermer la cage, abaisser de nouveau et très-lentement le fléau, et examiner l'aiguille qui oscille lentement à droite et à gauche du zéro des divisions. On observe quatre ou cinq oscillations successives : si elles sont symétriques, la pesée est bonne; si elles ne le sont pas, il faut ajouter ou retirer délicatement un grain de plomb avec des pinces et recommencer l'observation. L'opérateur arrive bientôt à reconnaître qu'en ajoutant un grain de plus à une tare trop faible elle devient trop forte. Il doit alors employer ou de la grenaille plus fine, ou de petits morceaux coupés dans un fil de cuivre très-fin, ou même des grains de sable, répéter la même opération avec ces grains de plus en plus menus, et s'arrêter enfin quand les oscillations sont devenues rigoureusement symétriques.

Alors il faut enlever le corps, le remplacer par des poids notés, et recommencer avec ces poids l'opération que l'on a faite avec les grains de la tare. On trouve aisément que la pesée est comprise entre n et $n+1$ grammes ; il n'y a plus dès lors qu'à ajouter une fraction de gramme. Or les boîtes de poids contiennent $0^{gr},9$ en quatre poids différents qui valent, le premier $0^{gr},5$, le second $0^{gr},2$, et les deux derniers $0^{gr},1$ [1], et il est clair qu'en les combinant ensemble de diverses manières, on peut former $0^{gr},9$, $0^{gr},8$, $0^{gr},7$, $0^{gr},6$, $0^{gr},5$, $0^{gr},4$, $0^{gr},3$, $0^{gr},2$, $0^{gr},1$. On essaye successivement ces divers poids en commençant par le plus élevé, et l'on reconnaît que la pesée est comprise entre deux nombres de décigrammes consécutifs, par exemple entre 9 et 8; la pesée est alors exacte à $0^{gr},1$ près. On passe ensuite aux centigrammes, qui sont disposés de la même manière et avec lesquels on opère de la même façon. Enfin on arrive aux milligrammes en augmentant les précautions à mesure que les fractions que l'on veut apprécier deviennent plus petites.

Manière de faire des poids. — On ne doit pas ajouter une confiance complète aux fractions de gramme que l'on trouve dans le commerce, et, comme il est toujours facile de les préparer, il vaut mieux ne se fier qu'à soi-même. Voici comment on peut faire des poids. On choisit un fil de platine fin, passé plusieurs fois dans la même filière et pesant environ 1^{gr} pour une longueur de 1^{m}; après en avoir coupé un poids quelque peu supérieur à 1^{gr}, on lime son extrémité jusqu'à la réduire à 1^{gr} exactement; on l'étend ensuite dans une rainure rectiligne pour mesurer sa longueur précise, et, comme chaque dixième de la longueur totale doit peser $0^{gr},1$, on le coupe pour former $0^{gr},5$, $0^{gr},2$, $0^{gr},1$, en prenant $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$ de la longueur. Il reste un dernier dixième, pesant $0^{gr},1$, que l'on étend dans une autre filière jusqu'à l'amener à une plus grande longueur égale à 1^{m} environ. On répète, pour obtenir les centigrammes, l'opération que l'on vient de faire pour les décigrammes, et on la continue pour les milligrammes. Cette méthode est aussi exacte qu'elle est simple. On peut ensuite replier les petits cylindres

---

[1] D'autres fois c'est le poids de $0^{gr},2$ qui est double.

que l'on vient d'obtenir et leur donner une forme qui rappelle leur poids.

Rappelons, pour terminer, que ces poids sont faits pour être exacts dans le vide. Pour certaines opérations délicates, comme celles auxquelles se livre le Bureau international du Mètre, on a construit des balances entièrement closes, dans lesquelles les poids sont déplacés mécaniquement à distance, sans être jamais en contact avec la main de l'opérateur, et dans lesquelles on peut, au besoin, faire le vide [1]. Mais, dans la pratique courante, les physiciens n'ont pas recours à ces appareils coûteux et compliqués, qui, tels qu'ils sont, ne pourraient même, dans la plupart des cas, leur être d'aucun usage. Il est donc nécessaire de corriger les pesées de l'effet de la poussée de l'air. C'est ce que nous apprendrons à faire plus tard, quand nous nous serons familiarisés avec les lois de la dilatation des corps par la chaleur.

MESURE DE L'ACCÉLÉRATION DE LA PESANTEUR.

PENDULE. — Pour déterminer les masses au moyen des poids, il est nécessaire de connaître l'accélération de la pesanteur. On la mesure avec toute l'exactitude désirable par l'observation des oscillations d'un pendule.

On désigne sous le nom de *pendule* tout corps pesant mobile autour d'un axe horizontal. Soient O la projection de cet axe, G le centre de gravité du corps. Il y a équilibre quand le point G se trouve dans un plan vertical passant par l'axe; mais, si l'on dérange le corps et que l'on amène son centre de gravité en G', de telle sorte que l'angle G'OG = A, la composante P sin A du poids du corps agit tangentiellement à l'arc G'G pour ramener le centre de gravité en G. Or, pendant le mouvement, le travail de la pesanteur engendre une force vive déterminée qui ne peut être perdue que par suite d'un

Fig. 52.

[1] H. Sainte-Claire Deville et Mascart, *Construction de la règle géodésique internationale, et détermination de ses poids de contrôle* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIX, p. 558).

Al[illegible] [illegible]ntraire : le centre de gravité
not[illegible] [illegible]ne G'OG = G'OG, et le corps
fait[illegible] [illegible]scillations d'amplitude G'OG″ si
est [illegible] [illegible]sistance de l'air n'agissaient sans
qu[illegible] [illegible] vive, et par conséquent aussi
lie[illegible] [illegible]. Le pendule ne tardera donc pas à

[illegible] PETITES OSCILLATIONS. — Il est facile d'ob[illegible] [illegible]e d'une oscillation. On se sert à cet effet [illegible] marque le quart de seconde, et dont l'ai[illegible] [illegible]ouvement ou au repos quand on pousse un [illegible] sens ou dans l'autre. On écarte le pendule [illegible] moment où il part, on met le chronomètre [illegible] compte ensuite 100 oscillations, et à la fin de [illegible] arrête les aiguilles. Cela donne le temps de [illegible] [illegible]nt les amplitudes ont progressivement di[illegible] [illegible] A jusqu'à A', et, en divisant ce temps par 100, [illegible] la durée d'une seule oscillation, dont l'é[illegible] [illegible] serait $\frac{A + A'}{2}$. Sans arrêter le pendule, on mesure [illegible] des 100 oscillations suivantes, qui sont com[illegible] [illegible] des écarts plus petits, A' et A″, et l'on continue de [illegible] manière jusqu'au moment où, les amplitudes étant [illegible] insensibles, les oscillations cessent de pouvoir être [illegible]. En comparant ensuite les temps successifs que l'on [illegible], on reconnaît qu'ils diminuent avec les amplitudes [illegible] elles sont grandes, mais qu'ils atteignent une limite [illegible] quand elles deviennent petites et ne dépassent pas [illegible]. A partir de là, les temps ne varient plus avec [l'an]gle d'écart, et l'on peut dire que les petites oscillations sont [is]ochrones. La loi de l'isochronisme des petites oscillations a été découverte expérimentalement par Galilée.

Puisque tous les corps tombent également dans le vide, il est facile de prévoir que la durée de l'oscillation d'un pendule ne peut dépendre de la matière qui le constitue. Pour s'en convaincre, il suffit de suspendre à un même support et à des distances égales des sphères égales formées de différents corps

choisis parmi ceux dont les poids, sous le même volume, diffèrent le plus. La première, par exemple, sera un globe de verre plein d'eau, la deuxième sera en fer, la troisième en platine. On écartera ces trois pendules, on les abandonnera au même instant, et l'on verra que les mouvements commencés ensemble seront indéfiniment concordants : la durée d'une oscillation est donc indépendante de la nature du corps oscillant [1].

PENDULE SIMPLE. — Le plus simple de tous les pendules se réduit à une seule molécule matérielle B, mobile autour d'un point O (*fig.* 53). On approche autant que possible de ces conditions théoriques, dans la construction d'un pendule matériel, en le formant d'une sphère très-petite et de matière très-dense, comme le platine, suspendue à l'extrémité d'un fil de soie.

Fig. 53.

Quand plusieurs pendules ainsi constitués ont des longueurs différentes, on vérifie expérimentalement que leurs durées d'oscillation sont proportionnelles aux racines carrées des longueurs OB [2].

La Mécanique rationnelle fournit l'expression exacte de la durée d'oscillation d'un pendule simple. Nous nous bornerons à démontrer une formule approchée.

Le pendule part du point C (*fig.* 53), arrive en E, et a acquis une vitesse égale à $\sqrt{2g\,\mathrm{DF}}$. Admettons que l'angle d'écart soit assez petit pour que les arcs CB, que nous désignerons par a, et EB, que nous appellerons x, puissent se confondre avec leurs cordes. On aura

$$\mathrm{BD} = \frac{\overline{\mathrm{CB}}^2}{2\,\mathrm{OB}} = \frac{a^2}{2l}, \quad \mathrm{BF} = \frac{\overline{\mathrm{EB}}^2}{2\,\mathrm{OB}} = \frac{x^2}{2l}$$

(1) Cette observation est due à Galilée.

(2) Cette loi est due à Galilée.

et

$$DF = BD - BF = \frac{a^2 - x^2}{2l};$$

par conséquent, la vitesse au point E sera

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}.$$

Développons CBC′ (*fig.* 54) en une ligne droite, et imaginons un mobile oscillant sur elle avec les mêmes vitesses que le pendule sur l'arc qu'il décrit : le temps que mettra ce mobile pour aller de C en C′ sera celui d'une oscillation du pendule.

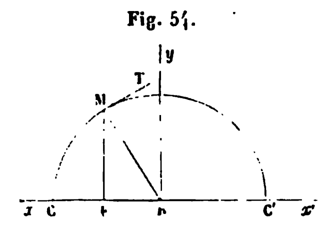


Fig. 54.

Pour trouver ce temps, décrivons la demi-circonférence CMC′ et supposons un second mobile la parcourant avec une vitesse constante $a\sqrt{\frac{g}{l}}$; le temps qu'il mettra à passer de C en C′ sera $\frac{\pi a}{a\sqrt{\frac{g}{l}}}$ ou $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Mais la vitesse horizontale de ce mobile sera toujours égale à la vitesse du premier, comme il est facile de s'en convaincre, en projetant sur l'horizon la vitesse en M ; cette projection ou composante horizontale est

$$a\sqrt{\frac{g}{l}}\sin EMB = a\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{EB}^2}}{MB} = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}.$$

Les deux mobiles, ayant toujours la même vitesse horizontale, resteront donc constamment sur la même verticale s'ils partent en même temps du point C, et ils arriveront ensemble en C′ après un temps $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Ce temps est donc celui d'une oscillation du pendule.

Ce résultat a été obtenu en supposant que les arcs décrits par le pendule sont assez petits pour se confondre avec leur corde; il s'applique donc exclusivement aux amplitudes très-petites, et il est justifié par les expériences que nous avons faites, car il montre : 1° que le temps des oscillations est indépendant de l'amplitude, pourvu qu'elle soit très-petite; 2° qu'il reste constant, quels que soient la nature et le poids de la sphère oscillante, puisque ces quantités n'entrent pas dans la formule; 3° qu'il est proportionnel à la racine carrée des longueurs. La formule nous montre de plus que t est en raison inverse de la racine carrée de g, et, par conséquent, si nous avons mesuré la longueur l du pendule et la durée t d'une oscillation, nous pourrons calculer l'accélération de la pesanteur en résolvant par rapport à g [1] l'équation du pendule simple

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2}.$$

Mais, avant d'en venir là, essayons de montrer par l'expérience que le temps t est en raison inverse de la racine carrée de l'accélération.

VÉRIFICATION DE LA FORMULE. – A cet effet, nous allons chercher à constituer un pendule qui soit sollicité, non plus par son poids, qui produit une accélération g, mais par une force différente qui donnerait une accélération g', et nous aurons à vérifier la relation

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Fixons aux extrémités d'une règle de sapin (*fig.* 55), dont le poids soit assez petit pour être négligé, deux fortes masses de plomb, l'une en A, pesant P, l'autre en B et pesant P + p. Supportons cette règle sur un plan par un couteau d'acier fixé

---

(1) La détermination de g, au moyen du pendule, a été proposée et essayée pour la première fois par Huyghens. Il trouva pour Paris environ 30 pieds et 2 pouces, soit en mètres $9^m,7893$. Cette valeur ne diffère que de $9^{mm},6$ du nombre actuellement adopté.

en O, au milieu de AB, et nous aurons un pendule complexe dont il est facile de calculer le mouvement.

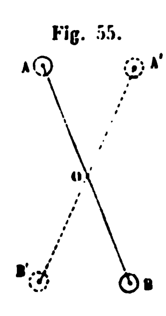


Fig. 55.

Les deux poids P, ayant une résultante unique qui passe par le centre O, se détruisent, et le système n'est sollicité que par le poids p qui agit sur la masse inférieure B, mais qui est employé à imprimer le même mouvement à deux pendules égaux en longueur OA et OB formés par deux poids P et P + p. C'est comme si une force unique p était appliquée à un pendule unique de même longueur et de poids 2 P + p. Par conséquent, l'accélération sera diminuée, comme dans la machine d'Atwood, dans le rapport de p à 2 P + p, et l'on aura

$$g' = g \frac{p}{2P + p},$$

et pour la durée des oscillations

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Supposons P constant et égal à 1^kg, et donnons successivement à p les valeurs

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{8}, \quad \frac{2}{15};$$

g' sera

$$\frac{1}{4}g, \quad \frac{1}{9}g, \quad \frac{1}{16}g,$$

et le temps des oscillations devra être égal à

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire que ces temps devront être 2, 3, 4 fois celui qui correspond au pendule simple de même longueur. Les expériences réussissent très-facilement avec des appareils que chacun peut construire soi-même; elles démontrent donc que, si

l'accélération change, les temps varient en raison inverse de la racine carrée de cette accélération.

Formule générale du pendule simple. — Nous arrivons maintenant à l'application que nous avons annoncée, celle qui a pour objet la mesure exacte de g. C'est là une opération d'une grande précision, et qui exige des soins fort minutieux. Il faut avant tout remarquer que la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

n'est rigoureusement vraie que si les oscillations sont infiniment petites. Mais la Mécanique rationnelle fournit la valeur suivante du temps d'une oscillation, d'amplitude quelconque :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \ldots \right].$$

h représente la hauteur DB à laquelle s'élève le pendule dans chaque oscillation (*fig.* 53). On voit que le temps t s'exprime au moyen d'une série qui est d'autant plus convergente que h est plus petit, et qui se réduit à l'unité quand il est négligeable ; dans ce cas, la formule générale reproduit celle que nous avons démontrée. Nous admettrons que, dans les expériences que nous allons faire, les amplitudes soient assez petites pour qu'on puisse négliger tous les termes de la série, à l'exception des deux premiers, et nous écrirons

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{h}{2l} \right).$$

Nous pouvons remarquer que

$$h = l - \mathrm{OD} = l(1 - \cos A) = 2l \sin^2 \frac{A}{2},$$

et alors nous avons

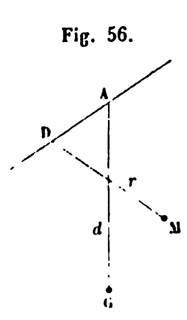
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} \right).$$

PENDULE COMPOSÉ [1]. — Telle est la formule qui permettrait de calculer la durée des oscillations d'un pendule simple; mais il est évident d'une part qu'un tel pendule ne peut être réalisé et de l'autre que la formule ne peut être appliquée à des corps oscillants constitués comme ceux que nous avons employés jusqu'ici. On les nomme *pendules composés*, composés en effet de points matériels distribués à des distances inégales du point de suspension, qui oscilleraient très-inégalement s'ils étaient libres, et qui, étant liés solidairement entre eux, prennent un mouvement commun complexe et dépendant de la forme du pendule. On est donc encore une fois obligé de recourir au calcul, et l'on démontre que tout corps oscille, quelle que soit sa forme, suivant les mêmes lois qu'un pendule simple d'une longueur déterminée. Il n'y a plus qu'une difficulté : c'est de trouver cette longueur.

Voici comment on peut démontrer ce théorème.

Soit un corps de forme quelconque pouvant tourner autour d'un axe AD qu'on appelle l'*axe de suspension* (*fig.* 56). Considérons dans le corps un point quelconque M de masse m et situé à la distance r de l'axe; soit ω la vitesse angulaire de rotation du système à l'instant considéré : la force vive du point M est $m\omega^2 r^2$. Si nous transportons le point M à l'unité de distance de l'axe, il faudra lui supposer la masse mr^2 pour que sa force vive ne soit pas changée. En répétant le même raisonnement pour tous les points tels que M, on pourra remplacer le corps tout entier par un seul point matériel placé à l'unité de distance et dont la masse serait Σmr^2. Cette expression Σmr^2 est appelée en Mécanique le *moment d'inertie* du corps considéré; désignons-le par Ω.

Fig. 56.



D'un autre côté, toutes les forces appliquées aux divers points du système se composent en une résultante unique F

---

[1] La théorie des oscillations du pendule composé, ainsi que la considération des moments d'inertie, est due à Huygens (*Horologium oscillatorium*; Paris, 1673).

appliquée au point G, qui, dans le cas de la pesanteur, est le centre de gravité, et qui est à une distance d de l'axe AD. En vertu du théorème des moments, on peut la remplacer par Fd appliquée à l'unité de distance. De sorte que le pendule composé est remplacé par un pendule simple; sa longueur est égale à l'unité; le point matériel oscillant a pour masse Ω, et la force qui lui est appliquée est Fd. L'accélération du mouvement est alors $\frac{Fd}{\Omega}$, et, en appliquant la formule du pendule simple, on trouve pour la durée de l'oscillation

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{Fd}}{\Omega}}, \quad t = \pi \sqrt{\frac{\Omega}{Fd}}.$$

On voit que la durée des oscillations est la même que celle d'un pendule simple qui aurait une longueur l donnée par la relation

$$l = g \frac{\Omega}{Fd}.$$

On appelle *centre d'oscillation* le point du pendule composé qui oscille comme le ferait le pendule simple équivalent, et l'on démontre en Mécanique que, si le pendule composé était suspendu par ce centre d'oscillation, son point de suspension primitif deviendrait le centre d'oscillation dans cette nouvelle position [1] : de là la construction de pendules *réversibles* qui ont deux couteaux, l'un en haut qui est fixe, l'autre en bas qui est mobile, et qu'on place par tâtonnement dans une position telle que les durées d'oscillation soient invariables quand l'appareil est soutenu par l'un ou par l'autre. On obtient ainsi la quantité l, et il suffit d'observer t avec précision pour en déduire g.

Cette solution, proposée par Bohnenberger [2], a été appliquée pour la première fois par le capitaine Kater [3] à l'occa-

---

(1) Cette loi a été démontrée par Huygens (*Horologium oscillatorium*).

(2) BOHNENBERGER, *Lehrbuch der Astronomie*, 1811.

(3) *Philosophical Transactions*, 1818. Il est à noter que l'idée d'employer

sion de la révision du système anglais des poids et mesures. Voici maintenant la solution adoptée par Borda en 1792, lors des opérations géodésiques entreprises pour la fixation de l'unité de longueur.

PENDULE DE BORDA [1]. — Borda construisit son appareil de manière à réaliser autant que possible le pendule simple. Il le composa d'une sphère de rayon connu et égal à a. Pour la rendre très-lourde, on la fait en platine, et on la suspend par un fil très-fin, long de 1^m environ, dont le poids n'est qu'une fraction négligeable de celui de la sphère, et que l'on peut considérer comme nul. Tout se réduit donc à une sphère de rayon a, suspendue par un fil sans poids, et dont le centre est à une distance l du point de suspension; le calcul donne, pour exprimer la longueur l_1 du pendule simple synchrone, la formule

$$l_1 = l + \frac{2a^2}{5l}.$$

On voit donc que, pour ramener l'appareil de Borda au pendule simple, il suffit d'ajouter à sa longueur la quantité $\frac{2a^2}{5l}$, qui est fort petite, et qui ne dépasse pas $\frac{25}{100}$ de millimètre quand a et l sont égaux à $0^m,025$ et 1^m; la correction qu'il faut faire est donc faible et facile à exécuter. En résumé, la durée des oscillations sera donnée par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2a^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A}{2}\right).$$

Quand on veut dans ces mesures atteindre la dernière limite de la précision, il faut encore tenir compte de la résistance opposée par l'air au mouvement du pendule. La Mécanique permet d'apprécier cette cause de variation, que nous nous contentons d'indiquer [2].

---

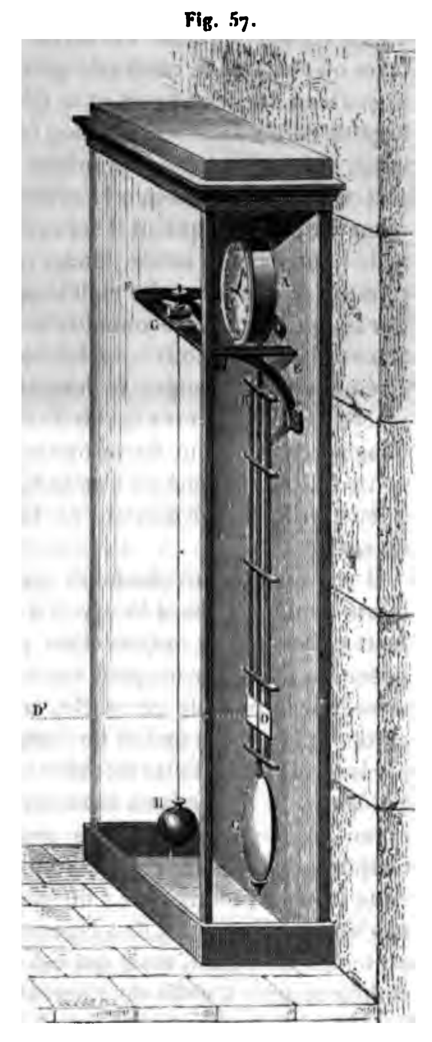
comme unité de longueur celle du pendule simple qui bat la seconde est due à Huygens.

(1) *Base du système métrique*, t. III.

(2) *Voir* F.-W. BESSEL, *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels* (*Abhandl. der Berliner Akademie*, 1826).

Borda installait son pendule sur un appareil que nous allons maintenant décrire et qui se compose : 1° d'une horloge astronomique bien réglée A (*fig.* 57); 2° d'un support de fer EGF; 3° du pendule GH, qui est placé en avant et en face de l'horloge; 4° d'une cage de verre qui enveloppe le tout et le met à l'abri des mouvements de l'air extérieur.

Fig. 57.



Il faut avant tout que le support du pendule soit invariable et ne reçoive ni l'effet des trépidations extérieures ni celui de la réaction provenant des oscillations du pendule. On fait choix à cet effet d'un mur solide de pierre, construit loin des rues agitées, et l'on y scelle un arc de fer forgé EGF que l'on soutient par des jambes de force également scellées dans la pierre. Sur le milieu de l'arc se voit un plan d'acier trempé et poli G, sur lequel se place l'axe de suspension et qui est percé d'un trou pour laisser passer le fil suspenseur.

Pour soutenir le pendule, on emploie un couteau d'acier G dont l'arête pose sur le plan et auquel est attaché le fil. Ce couteau devant osciller lui-même et n'ayant pas un poids négligeable, on pourrait craindre qu'il

n'altérât la durée des oscillations; mais cette cause d'erreur, toute petite qu'elle est, s'élimine par une précaution bien simple. On fixe au-dessous du couteau une tige qui abaisse son centre de gravité au-dessous de l'arête, et on le surmonte d'une vis sur laquelle un écrou monte ou descend, pour relever ou abaisser le centre de gravité. On commence par placer le couteau sur le support et le faire osciller seul, puis on fixe le petit écrou dans une position telle, que le temps d'une oscillation soit sensiblement le même que celui du pendule complet. On est sûr alors que le couteau n'altérera pas le mouvement du pendule quand il sera réuni avec lui, puisqu'il oscille isolément dans le même temps que lui. Quant à la sphère qui termine le pendule, elle était le plus souvent de platine; mais Borda, qui voulait reconnaître si la valeur de g est rigoureusement la même pour tous les corps, avait besoin de l'enlever aisément sans changer la longueur du pendule et de la remplacer par des sphères égales de substances différentes. Il avait imaginé dans ce but de terminer le fil par une calotte mince, concave, où les sphères s'emboîtaient exactement et dans laquelle on les faisait adhérer en interposant une couche mince de suif.

Il y a maintenant plusieurs mesures préliminaires à faire : il faut trouver d'abord le rayon a de la sphère suspendue. On peut y parvenir au moyen d'un petit sphéromètre, en faisant poser les pieds sur un petit cercle de la sphère et la pointe de la vis sur le pôle de ce cercle, ce qui permet de calculer le rayon de la sphère quand on connaît celui du cercle qui passe par les trois pieds. Cette méthode suffit; mais, comme elle laisse à désirer, il vaut mieux mesurer le volume, et par suite le rayon de la sphère, par des procédés dont il sera parlé au Chapitre des densités. Ce rayon a étant connu, il faudra ensuite trouver la longueur l du pendule depuis le centre de la sphère jusqu'au point de suspension, mesure qui était difficile au temps de Borda, mais qui est devenue très-simple avec le cathétomètre : il suffit de viser avec cet instrument l'arête du couteau d'une part, le contour inférieur de la sphère ensuite, et cela donne la longueur cherchée l augmentée du rayon a.

Il ne faut pas se contenter de faire cette mesure une fois

et de considérer le résultat comme invariable, car la longueur du pendule change avec la température; on est donc obligé d'observer cette température toutes les fois que l'on opère et de calculer les valeurs exactes qu'ont les quantités a et l au moment de l'observation : ce calcul se fait au moyen des formules dont nous parlerons à l'article de la *Dilatation*.

Méthode des coïncidences ([1]). — Nous connaissons maintenant la relation générale qui lie l'accélération à la durée d'une oscillation; nous avons mesuré les constantes a et l; l'appareil est décrit dans tous ses détails; il n'y a plus qu'à le faire marcher pour trouver le temps t. A cet effet, on ouvre la boîte pour donner l'impulsion au pendule; on la referme ensuite, et l'on observe les mouvements avec une lunette fixée en face de l'appareil dans la direction DD', à une distance de 8^{m} à 10^{m}. On voit passer séparément, dans le champ de vision, le balancier sur lequel on a tracé d'avance un trait vertical D et le fil de suspension du pendule. Comme l'un des deux appareils, le pendule par exemple, va toujours un peu plus vite que l'autre, il y a toujours un moment où tous les deux se voient superposés et marchant dans le même sens ([1]). Pour saisir ce moment avec toute la précision possible, on commence à observer attentivement avant que la superposition ait lieu exactement. On voit les deux lignes se rapprocher, se confondre et se séparer; l'instant où elles se confondent est celui d'une *coïncidence*; on le lit sur le cadran de l'horloge et on le note comme temps initial. Après cela, le pendule reprend l'avance et arrive peu à peu à repasser dans la verticale en même temps que le balancier, mais avec une vitesse inverse, et à ce moment il a

([1]) La première idée de cette méthode est due à de Mairan (*Gehler's Physikalisches Wörterbuch*, article Pendel).

([1]) Cette circonstance ne se présente pas nécessairement sur la verticale; elle peut avoir lieu lorsque les deux pendules font un même angle α quelconque avec leur position d'équilibre; mais, si les durées d'oscillation diffèrent extrêmement peu, les pendules continuant leur oscillation passent par la verticale à des époques fort rapprochées, et la coïncidence qui n'existe pas parfois mathématiquement est réalisée d'une manière physique à cet instant. Il arrive que les deux pendules paraissent coïncider pendant toute la durée de plusieurs oscillations.

n'altérât la durée des oscillations; ma... ..., la différence
toute petite qu'elle est, s'élimine ... ...ncidence dont
simple. On fixe au-dessous du co... ... le pendule a fait
son centre de gravité au-dessous ... ... l'horloge exécu-
d'une vis sur laquelle un écrou ... ...it autant entre deux
lever ou abaisser le centre de g... ...ues sur le cadran;
le couteau sur le support et l... ...ulées, $n - 2$ exprime
le petit écrou dans une posi... ... par le pendule, et le
lation soit sensiblement l... ... $\frac{n}{n-2}$; il serait égal à
plet. On est sûr alors que ...
ment du pendule quan... ... vite que l'horloge. En
isolément dans le mê... ...
termine le pendule, ...vements, on en mesure les
Borda, qui voulait ... ... est joint à l'appareil, et, A,
sement la même ... ...male de l'écart au moment des
aisément sans ...
placer par des ...
imaginé dans ...
concave, où ...
quelle on ...
de suif.

Il y ...
il fau...
peu...
po...
la ...
r...

... ...ment rigoureux. Soit $1 + \frac{p}{q}$ le rapport ... ...e le plus lent à celle du plus rapide et ... ...réductible. Entre deux coïncidences ma... ...écuté chacun un nombre pair d'oscilla... ...s du plus lent, le plus rapide en a exécuté ... entier pair. Puisque p est premier avec ... ...érence $n\frac{p}{q}$ du nombre d'oscillations des deux ... deux coïncidences successives, elle est $2p$. ... se produisant sur la verticale, il y a eu, dans ... vraies successives, $p - 1$ fausses coïncidences ... ...ulaires variables de la verticale et au moment ... d'oscillations des deux pendules différaient ... Alors les pendules ne coïncident plus mathéma... ... à la verticale, mais ils paraissent coïncider ... ...en soient très-voisines; l'erreur que l'on com... ... les deux coïncidences *apparentes* le pendule le plus ... oscillations de plus que l'autre entraîne une erreur ... la durée d'une oscillation; mais celle-ci est né... ... d'oscillations du pendule le plus lent, séparant ... ...rentes, est extrêmement considérable. C'est précisé... ... dans les expériences de Borda, comme dans celles qui ... par Biot. BRUNT, *Discussion de la méthode des coïn-* ... t. III, p. 369; 1874).

… on prend pour A la moyenne de A_1 et de A'_1.
… ode dite des *coïncidences;* il est clair qu'elle … x avantages. Premièrement, elle observe un … d'oscillations pour obtenir la durée d'une seule, … ise par ce nombre l'erreur commise dans la mesure … s; deuxièmement, elle permet, grâce au grossissement … ette et à la ténuité des lignes que l'on vise, d'obtenir … ande erreur le moment des coïncidences; troisième- …, et c'est là son principal avantage, elle dispense de compter les oscillations, puisque l'horloge marque les siennes et qu'on en déduit celles du pendule. C'est sans contredit une des meilleures méthodes que l'on possède.

VALEUR DE LA CONSTANTE g. — Puisque l'on a pu donner tant de précision à la mesure des diverses quantités qui entrent dans la formule, on en déduit la valeur de g avec plus d'approximation que par toute autre méthode. Mais cette valeur de g n'est pas celle que l'on trouverait si l'on faisait osciller le pendule dans le vide. On verra en effet dans la suite que les corps perdent dans l'air un poids égal à celui du gaz qu'ils déplacent. Par conséquent, si le poids de la sphère dans le vide est P, il diminuera dans l'air du poids p du gaz qu'elle déplace, et il deviendra $P - p$.

Si le principe d'Archimède était applicable aux corps en mouvement comme il l'est aux corps en repos, on pourrait donc raisonner de la manière suivante. Soient g' l'accélération dans le vide, g l'accélération observée; on aurait, d'après le principe de la proportionnalité des forces aux accélérations,

$$g = \frac{g'}{1 - \frac{p}{P}}.$$

Mais Bessel a fait voir que la perte apparente de poids est plus grande dans le cas du mouvement que de l'équilibre, dans un rapport qui, d'après Poisson ([1]), serait égal à $\frac{3}{2}$, indépendam-

---

([1]) POISSON, *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, t. XI).

valeur de g, car, comme on a

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

on en tire pour la longueur du pendule à secondes

$$t = 1, \quad l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Cette longueur étant proportionnelle à g, il a suffi de la mesurer à diverses latitudes et au niveau de la mer pour connaître la loi de variation de g; la discussion des observations a donné :

Latitude.	Longueur du pendule à secondes.	Valeur de l'accélération.
0°	0m,99103	9m,78103
45°	0m,99356	9m,80606
90°	0m,99610	9m,83109

Ces nombres et tous ceux que l'on a déterminés en divers lieux sont liés entre eux par des relations de la forme $a + b\sin^2\lambda$. On a d'abord

$$l = 0^m,991026 + 0^m,005072\sin^2\lambda.$$

En remplaçant $\sin^2\lambda$ par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\lambda$, on obtient

$$l = 0^m,993562 - 0^m,002536\cos 2\lambda,$$

et, si l'on multiplie cette équation par π^2, il vient

$$\pi^2 l = g = 9^m,806059 - 0^m,025028\cos 2\lambda.$$

On peut remarquer ensuite que les premiers termes de ces formules représentent les valeurs de l et de g pour la latitude de 45°, car les seconds termes s'évanouissent pour $\lambda = 45°$ ou pour $2\lambda = 90°$.

En faisant $0^m,993552 = l'$ et $9^m,806056 = g'$, on peut écrire

$$l = l'(1 - 0,002552\cos 2\lambda)$$

et

$$g = g'(1 - 0,002552\cos 2\lambda).$$

Pour Paris, nous avons $\lambda = 48^\circ 50' 14''$; par conséquent,

$$l = 0^{m},99390, \quad g = 9^{m},8094.$$

Puisque ce fait reconnu de la variation de g aux diverses latitudes dépend en partie de l'aplatissement, il peut servir à le mesurer. C'est ce que l'on a fait en se fondant sur la connaissance de formules établies par la théorie, et l'aplatissement ainsi calculé a été trouvé égal à $\frac{1}{320}$, nombre peu différent de celui qui a été obtenu par la mesure directe des arcs du méridien, et qui est $\frac{1}{300}$ d'après Bessel.

* **VARIATION DE g AVEC L'ALTITUDE.** — Il y a encore une cause qui change la valeur de g : c'est la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer; c'est ce que l'on nomme l'*altitude*. Il est en effet évident que, si la pesanteur est le résultat de l'attraction, et si celle-ci varie en raison inverse des carrés des distances, comme nous le démontrerons plus tard, on peut dire qu'en s'élevant au-dessus de la mer on s'éloigne du centre de la Terre et qu'alors la pesanteur décroît suivant la loi de l'attraction. Si R est le rayon terrestre, h l'altitude, les valeurs de g et de g_1 seront dans le rapport suivant

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

ou approximativement

$$g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

C'est au moyen de cette relation que l'on trouve g au niveau de la mer, quand on a mesuré g_1 à une altitude connue.

EMPLOI DU PENDULE A LA MESURE DES FORCES. — Nous trouverons dans le cours de notre étude des forces très-diverses quant à leur origine, mais qui se manifestent par des attractions ou des répulsions. Il y aura deux moyens de les mesurer : le premier sera de leur opposer un ressort ou un poids qui les équilibre; le second, de les faire agir sur un pendule. S'il arrive que ces forces soient parallèles à une direction fixe ou

que, partant d'un centre d'action unique, elles agissent d'assez loin pour qu'il soit permis de les regarder comme parallèles, le pendule oscillera d'après les lois que nous venons d'étudier : on mesurera la durée t des oscillations, et la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Omega}{Fd}}$$

du pendule composé fera connaître la force F qui lui est appliquée. Quand ces forces changeront avec la distance, on rapprochera ou l'on éloignera le pendule, afin d'obtenir d'autres valeurs de la force F et de chercher la loi suivant laquelle elle varie. Dans l'étude de l'électricité et du magnétisme nous aurons l'occasion de faire de fréquentes applications de cette méthode de mesure.

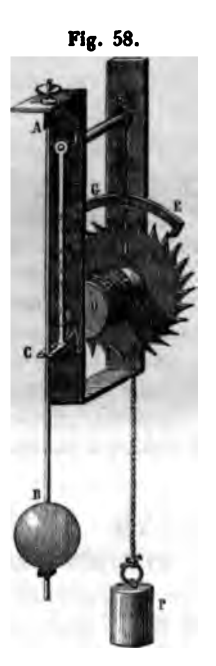
MESURE DU TEMPS.

APPLICATION DU PENDULE AUX HORLOGES. — Puisque les durées des oscillations d'un pendule dont la longueur est constante restent invariables, on peut les faire servir à la mesure du temps. Depuis Huygens [1], la construction de toutes les horloges est fondée là-dessus, et elles emploient un mécanisme analogue à celui qui est figuré ci-après. Un treuil porte une corde enroulée, à laquelle est attaché un poids P qui tend à faire tourner l'appareil. D'autre part, un pendule suspendu en A (*fig.* 58) par une lame flexible entraîne dans ses oscillations une tige BC et aussi un arc de cercle GE; cet arc est terminé par des pointes recourbées qui s'engagent dans une roue à dents inclinées fixée au treuil. Quand le pendule marche et que la pointe E se relève, elle abandonne la roue dentée qui tourne : mais aussitôt la pointe opposée s'abaisse, s'engage dans les dents et arrête la roue ; à l'oscillation suivante elle se relève à son tour, mais E descend vers la roue et s'engage, non point dans la même échancrure, mais dans

[1] C'est en 1658 que Huygens proposa d'adapter le pendule aux horloges (*Horologium*). En 1673, il publia, sous le nom d'*Horologium oscillatorium*, un Traité beaucoup plus étendu où se trouvent les lois du pendule composé, etc.

la suivante, et pour chaque oscillation double la roue tourne d'une dent. Dès lors le treuil marche d'un angle égal pendant chaque oscillation, et, s'il porte une aiguille, elle décrit sur un cadran des espaces égaux en des temps égaux; il suffit donc de combiner les rouages avec les dimensions du pendule pour mesurer le temps en secondes. On remarquera de plus que la disposition des dents et de la pointe E est telle que celle-ci reçoit une impulsion de la roue dentée à chaque fois qu'elle quitte une dent; cette impulsion se transmet au pendule et l'empêche de s'arrêter.

Fig. 58.



Quand il s'agit d'appareils qui doivent diviser la seconde en un grand nombre de parties égales, on peut avoir recours à d'autres dispositions, par exemple à une roue dentée tournant d'un mouvement uniforme; et alors on prendra pour unité de durée le temps que cette roue, animée d'un mouvement très-rapide, mettra à tourner d'une dent: la difficulté sera ramenée à mesurer avec exactitude la vitesse angulaire de la roue. On peut, pour cet objet, avoir recours à des appareils automatiques fonctionnant à l'aide de l'électricité et dont la description serait ici prématurée.

CHAPITRE III.

HYDROSTATIQUE.

Hypothèse sur la constitution des liquides. — Équilibre des liquides soustraits à la pesanteur. — Principe de Pascal. — Presse hydraulique.
Pressions au sein des liquides pesants. — Équilibre d'un filet liquide cylindrique limité par deux bases planes. — Cas des fluides incompressibles. — Pressions sur les parois des vases : 1° pression sur le fond d'un vase; 2° sur une paroi plane; 3° résultante des pressions exercées par un liquide sur les parois du vase qui le contient.
Principe d'Archimède. — Corps flottants. — Conditions de stabilité. — Liquides superposés. — Vases communicants. — Cas de deux liquides.
Équilibre d'un liquide incompressible soumis à des forces quelconques.

HYPOTHÈSE SUR LA CONSTITUTION DES LIQUIDES. — Les liquides sont compressibles et élastiques; mais leur compressibilité est si faible, leur élasticité si grande, qu'ils diminuent à peine de volume sous l'influence des pressions les plus considérables; celles-ci sont aussitôt équilibrées par les réactions élastiques qu'elles développent.

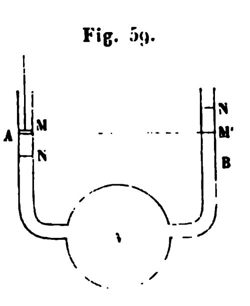
On admet comme une conséquence naturelle de la mobilité des fluides que, si un liquide est enfermé dans un vase et qu'il ne soit soumis ni à l'action de la pesanteur ni à aucune force venant des parois, il doit être constitué d'une manière identique dans toutes ses parties; par exemple, si on le considère comme formé de molécules, celles-ci doivent être distribuées de la même manière dans toute la masse et tenues à des distances moyennes égales dans toutes les directions autour de tous les points : de là résulte nécessairement que les propriétés du liquide sont les mêmes dans toutes les parties du vase et dans toutes les directions autour de chaque point, quelle que soit la position de ce point.

D'autre part, nous admettons que les molécules exercent les unes sur les autres des actions réciproques. Si, par une cause quelconque, on parvient à les rapprocher ou à les éloigner, elles se repoussent ou s'attirent et tendent à reprendre leurs premières distances, et, à cause de la symétrie qui existe dans tous les sens, ces forces élastiques doivent être égales en tous les points et dans toutes les directions.

Cette idée que nous nous faisons de la constitution des liquides soustraits à la pesanteur, toute rationnelle qu'elle paraisse, n'est cependant qu'une hypothèse; mais, une fois qu'elle est admise, les propriétés des liquides se conçoivent aisément et sont prévues par la théorie. Voici dès lors la marche que nous suivrons. Nous supposerons d'abord qu'un liquide sans poids n'est soumis à aucune autre force qu'à des pressions exercées de l'extérieur; nous examinerons ensuite les effets que doivent produire sur les liquides la pesanteur ou des forces quelconques, et nous vérifierons par l'expérience les lois que nous aurons prévues.

ÉQUILIBRE DES LIQUIDES SOUSTRAITS A LA PESANTEUR. — PRINCIPE DE PASCAL. — Concevons un vase V de forme quelconque (*fig.* 59), portant deux tubes A et B de diamètre égal et remplis d'un liquide quelconque jusqu'en M et M'; plaçons en M un piston mobile A, et faisons-le descendre en le poussant : toutes les molécules du liquide vont se déplacer à la fois, en conservant leur distance primitive; rien ne sera changé à la constitution du liquide, qui gardera le même volume; il ne fera que se déplacer, et le niveau s'élèvera en B de la quantité dont il s'est abaissé en A.

Fig. 59.



Mais si, au lieu de laisser le tube B ouvert, nous le fermons en M', l'expérience est tout autre et le résultat entièrement différent. Le liquide ne pouvant plus remonter en M', le piston ne peut plus descendre de M en N sans un effort considérable; alors le liquide se comprime et se met dans un nouvel état d'équilibre tout en restant homogène, et ses molécules se rap-

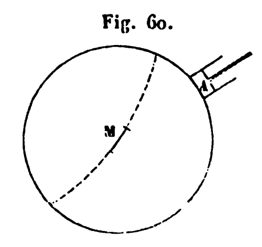
prochent en se plaçant à des distances moindres que précédemment, mais encore égales dans toutes les parties du vase et dans toutes les directions autour de chaque point.

Entre ces molécules rapprochées, il se développe une répulsion élastique qui tend à les ramener à leur distance première, et qui s'exerce aussi sur les parois du vase, lesquelles se dilatent, puis réagissent pour maintenir le liquide comprimé; dès lors liquide et vase sont à l'état de *tension*, et il y a équilibre entre les forces répulsives des molécules et la réaction des parois.

Examinons les conséquences de cette tension.

Considérons un élément M dans la masse liquide (*fig.* 60). Nous entendons par là une portion de surface plane dont l'étendue sera au-dessous de toute quantité assignable, de telle sorte qu'on en puisse physiquement confondre les diverses parties. Par cet élément faisons passer une surface qui divisera le liquide en deux portions ne communiquant par aucun endroit. On peut supposer que les molécules rencontrées par cette surface sont invariablement liées les unes aux autres, car le lien que l'on établit entre elles ne saurait troubler l'équilibre, et alors l'élément M devient un élément de paroi.

Fig. 60.

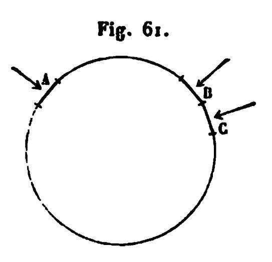


Les actions élastiques exercées sur M par le liquide placé à droite peuvent, à cause de la petitesse de l'élément, être considérées comme égales et parallèles en tous ses points; elles ont donc une résultante unique qui, par raison de symétrie, est normale à M : c'est ce que nous appellerons la *pression* exercée sur l'élément. Puisqu'on suppose le liquide identique à lui-même en tous les points et dans toutes les directions, cette pression sera indépendante de la direction de la surface M et de sa position dans l'intérieur du liquide. C'est en cela que consiste le principe de l'*égalité de pression*, ou *principe de Pascal*.

2° Cette loi n'est point seulement vraie pour des surfaces élémentaires : elle s'applique à des surfaces planes quelconques égales entre elles, puisque celles-ci sont composées du même nombre d'éléments égaux pressés également et dans la même

direction. Alors, quand on ouvrira dans la paroi un orifice A de section *a* (*fig.* 61), que l'on y engagera un piston plan chargé d'un poids P, il y aura contre ce piston une réaction du liquide égale au poids P, puisqu'elle lui fera équilibre, et toute surface plane *a* intérieure ou située sur la paroi éprouvera la même pression P. Si donc on ouvre en B ou en C des orifices égaux à *a*, il faudra, pour maintenir en équilibre ces portions de la paroi, exercer sur elles de l'extérieur à l'intérieur un effort égal à P. On dit alors que la pression exercée en A s'est transmise à B et à C, et l'on doit entendre par là que le liquide, ayant diminué de volume, exerce une réaction élastique égale dans tous les sens et dans toutes ses parties. On énonce alors la loi suivante, appelée *principe de l'égale transmission des pressions,* et qui n'est qu'une nouvelle expression du principe de Pascal :

Fig. 61.



Toute pression que l'on exerce sur une portion plane de la paroi du vase se transmet avec la même intensité sur toute portion de surface plane égale prise dans le liquide ou sur la paroi.

3° Puisque la pression P exercée par le piston A se transmet séparément à chacune des surfaces voisines B et C, égales à *a*, on peut les supposer réunies, ce qui constituera un piston de surface $2a$, et il supportera une pression $2P$; de même, si le piston était égal à $3a$, il aurait une pression $3P$, et, en général, il aurait une pression P′ égale à $P\frac{b}{a}$, si sa surface était quelconque et égale à b : on arrive ainsi à la relation générale

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{b},$$

et le principe précédent reçoit encore un nouvel énoncé :

Quand un liquide enfermé est soumis à une pression extérieure, toutes les surfaces planes que l'on peut considérer dans l'intérieur du vase éprouvent des pressions proportionnelles à leur surface.

Nous devons insister spécialement sur deux conséquences de cette loi générale, d'abord parce qu'elles sont fort curieuses, et ensuite parce que nous pourrons aisément les vérifier. Si le piston comprimant est chargé d'un poids P et que sa section soit égale à 1, l'effort transmis sur des surfaces 1, 10, 100, 1000 sera égal à P, 10P, 100P, 1000P; avec un poids faible on pourra conséquemment exercer une action aussi grande que l'on voudra.

On peut changer les termes de cette proposition et dire que, si l'on prend des pistons comprimants dont les sections soient 1, 10, 100, 1000 et qu'on les charge de poids P, 10P, 100P, 1000P, on produira toujours le même effort P sur une surface plane égale à l'unité, c'est-à-dire une pression constante dans l'intérieur du liquide (1). Cette propriété appartient à tous les fluides compressibles ou non, puisqu'elle a été démontrée sans aucune hypothèse particulière sur la grandeur de la compressibilité.

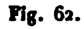
PRESSE HYDRAULIQUE. — Après avoir démontré que la pression exercée par un piston de section 1 se transmet en se multipliant par 10, 100, 1000,... sur un second pistòn de section 10, 100, 1000,.. , Pascal songea à profiter de cette loi pour exercer des effets mécaniques considérables; mais il ne put parvenir à de bons résultats, parce que l'on ne savait pas à cette époque empêcher les fuites de liquide entre le piston et les parois.

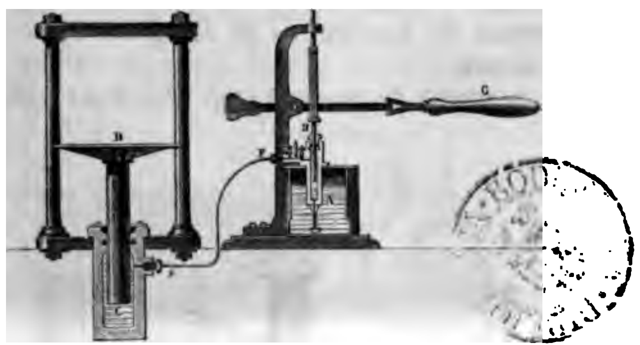
Cette difficulté est ordinairement surmontée par l'emploi d'un simple anneau de cuir que l'on a embouti, c'est-à-dire déformé en demi-tore. On l'applique dans une ouverture ménagée à cet effet entre la tige du piston et la paroi de manière

(1) Pascal énonçait le principe de l'égale transmission des pressions en ces termes : « Si un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures dont l'une soit centuple de l'autre, en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix neuf. Quelque proportion qu'aient ces ouvertures et quelque direction qu'aient les pistons, si les forces qu'on met sur ces pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre. » (*Traité de l'équilibre des liqueurs*, 1651.)

que son bord intérieur entoure le piston tandis que son bord extérieur adhère à la paroi : cette adhésion est d'autant plus grande que la pression des liquides est plus énergique.

La presse hydraulique se réduit essentiellement à une petite pompe foulante AB (*fig.* 62), par laquelle on injecte l'eau d'un


Fig. 62.



réservoir A dans un corps de pompe beaucoup plus large où se meut un piston ascendant CD. Le piston de la pompe aussi bien que le piston D sont des cylindres plongeant au milieu de la masse liquide : les pressions qu'ils en éprouvent latéralement s'équilibrent, et la pression transmise est celle qui s'exerce sur leur base plane.

L'eau introduite par la pompe soulève le piston D, qui comprime contre un obstacle fixe les objets dont il est chargé. Pour faire cesser la compression, il suffit d'ouvrir un robinet à vis qui laisse écouler de l'eau. Une soupape de sûreté, placée sur le canal de communication des corps de pompe, consiste en un orifice fermé par un levier chargé d'un poids et se trouve réglée de telle sorte qu'on ne puisse dépasser la limite de résistance de l'appareil.

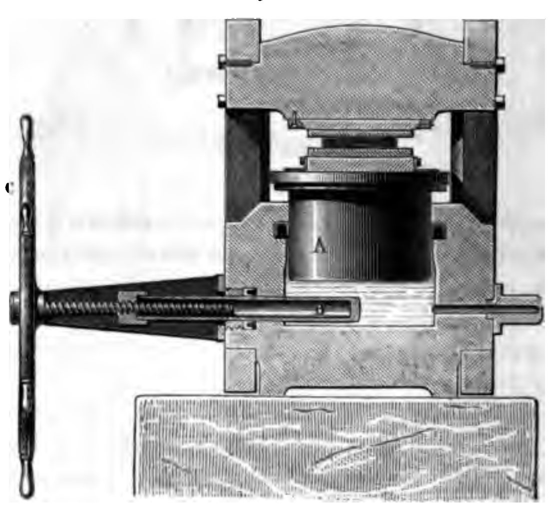
On ne peut faire servir la presse hydraulique à une démonstration précise du principe sur lequel elle est fondée, à cause des frottements, que nous négligeons. Si l'on suppose que la section du grand piston soit cent fois supérieure à celle du petit, un effort de 1^{kg} appliqué en A ne suffira pas à soulever un poids à peine inférieur à 100^{kg} chargeant le piston D; réci-

proquement un poids de 100^{kg} sur D ne pourrait soulever une charge du piston A très légèrement inférieure à 1^{kg}. Nous supposons, bien entendu, que les poids des pistons sont compris dans l'évaluation de la charge.

On construit aujourd'hui des presses hydrauliques très-commodes et permettant d'atteindre des pressions extrêmement considérables. Il est utile de connaître ces appareils, qui sont devenus des instruments de recherche entre les mains des physiciens.

Dans la presse de Desgoffe (*fig.* 63), le petit piston ver-

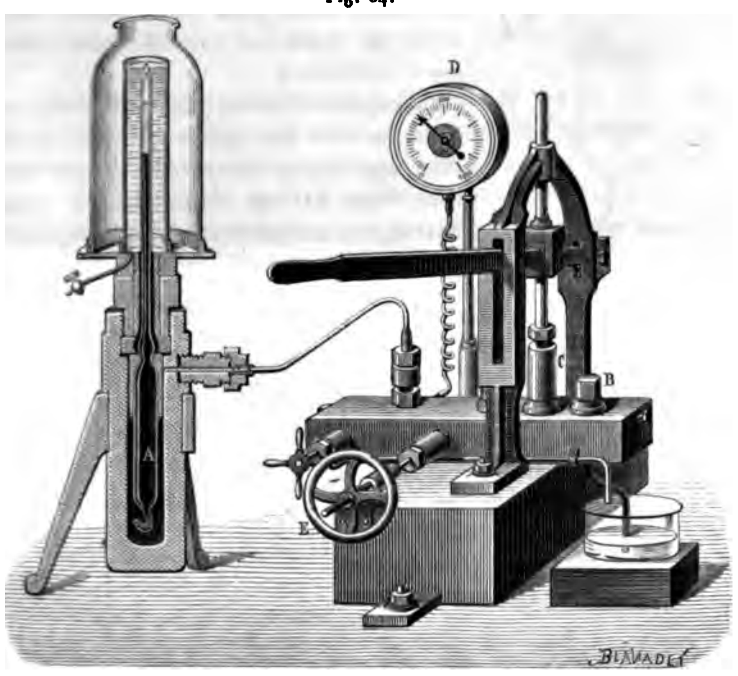
Fig. 63.



tical ne sert qu'à refouler dans le grand corps de pompe la quantité d'eau nécessaire pour élever la pression à un degré médiocre : on la pousse au dernier degré à l'aide d'un second piston à tige horizontale que l'on voit figuré en B. Le volant C est la tête d'une vis qui tourne dans un collier fixe et dont l'écrou est creusé à l'intérieur de la tige du petit piston; celui-ci pénètre à force dans l'intérieur du cylindre, en diminue le volume et produit ainsi une pression extrêmement considérable.

M. Cailletet, dans ses expériences sur la liquéfaction des gaz, a employé une pompe à eau C (*fig.* 64), communiquant d'une part avec un manomètre métallique D qui indique approximativement la pression, d'autre part avec une cavité A creusée dans un bloc de fonte extrêmement résistant, fermé à sa partie supérieure par une plaque épaisse vissée dans l'épaisseur du


Fig. 64.



bloc. Cette dernière est percée d'un trou, et l'on peut y mastiquer, à l'aide de glu marine, toute sorte d'appareils de verre, des thermomètres, des réservoirs à gaz, etc., convenablement renflés au-dessous de leur point d'insertion, pour n'être point projetés au dehors. On pousse la compression au dernier degré à l'aide d'un piston à vis E. Un robinet à vis que l'on voit à côté permet d'obtenir une décompression rapide en laissant écouler presque subitement une certaine quantité d'eau. Nous verrons ultérieurement les applications de cet appareil.

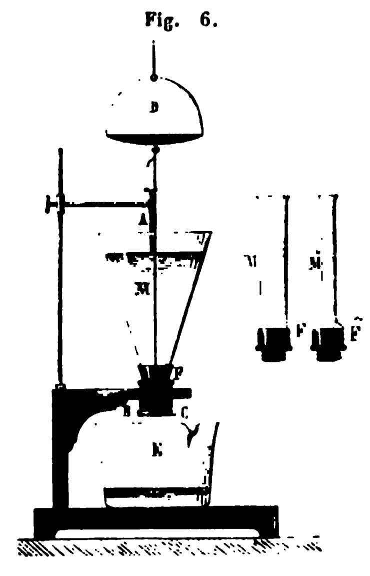
PRESSIONS AU SEIN DES LIQUIDES PESANTS. — Après avoir étudié l'équilibre des liquides dans le cas le plus simple, celui où il n'y a d'autres forces que des pressions appliquées sur les parois des vases qui les contiennent, nous allons étudier l'équilibre des liquides soumis à l'action de la pesanteur. Nous sortons ainsi d'un cas purement fictif pour nous placer dans celui qui nous est naturellement offert par l'expérience.

Fig. 65.



Constatons d'abord l'existence des pressions au sein des liquides pesants. A cet effet, appliquons contre le bord rodé d'un tube large ED un obturateur en verre dépoli, ou, ce qui vaut mieux, une carte mince A dont le poids puisse être négligé (*fig.* 65); plongeons ensuite l'appareil dans l'eau en soutenant l'obturateur par un fil attaché à son milieu A; on s'aperçoit que cet obturateur ne tombe pas quand on cesse de le soutenir, par conséquent qu'il est maintenu par une pression de bas en haut. Si on voulait la mesurer grossièrement, on pourrait charger l'obturateur de poids jusqu'à le détacher.

Fig. 6.



En rodant obliquement le tube ou en le courbant, on reconnaîtrait de même l'existence de pressions dans des directions obliques ou dans la direction verticale.

Quant aux pressions de haut en bas, on les constate et on les mesure approximativement en versant de l'eau dans un vase M fermé à sa partie inférieure par un obturateur BC. Cet obturateur est soutenu à l'aide d'un cordon passant sur une

poulie et chargé de poids, ou mieux (*fig.* 66) attaché à l'un des plateaux D d'une balance convenablement chargée; on constate que, lorsque la quantité d'eau versée est assez grande, l'obturateur se détache.

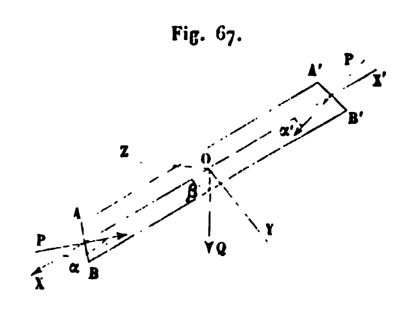
Nous nous proposons maintenant de rechercher théoriquement les lois de l'équilibre des liquides pesants. Nous nous assurerons ensuite, par la mesure des pressions, si l'hypothèse sur la constitution des liquides que nous avons prise pour point de départ se trouve justifiée par les faits.

ÉQUILIBRE D'UN FILET LIQUIDE CYLINDRIQUE LIMITÉ PAR DEUX BASES PLANES. — Nous pouvons, sans troubler l'équilibre, substituer au filet liquide que nous considérons un solide homogène de même volume et de même poids, c'est-à-dire supposer qu'il existe entre les molécules qui le constituent des liens tels qu'aucun déplacement relatif ne puisse se produire. Nous avons alors à déterminer les conditions d'équilibre d'un solide sous l'influence des pressions qu'il éprouve de la part du liquide environnant et de son propre poids.

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut et il suffit (p. 30) que les forces auxquelles il est soumis, décomposées suivant trois axes rectangulaires, donnent des composantes X, Y, Z nulles, et que les couples P, Q, S qui tendent à faire tourner le corps autour de chacun des axes soient aussi nuls.

Or, dans le cas actuel, nous savons que l'équilibre existe et nous pouvons à notre convenance écrire l'une des équations de l'équilibre pour en tirer les conséquences qu'elle implique.

Fig. 67.



Prenons pour axes rectangulaires l'axe XOX' du filet (*fig.* 67) et deux autres droites OY, OZ perpendiculairement à OX et entre elles. Nous nous proposons d'exprimer que la somme X des composantes de toutes les forces suivant OX est nulle.

Les pressions latérales, normales à l'axe du cylindre, n'ont pas de composantes suivant OX; nous n'avons à considérer que les pressions P sur l'élément AB, P' sur A'B', et le poids Q du cylindre. Soient α, α', β les angles de la direction de ces forces avec la direction OX; on aura

$$(1)\qquad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + Q\cos\beta = 0.$$

Soient s et s' les surfaces AB, A'B', σ la section droite du cylindre;

$$(2)\qquad s\cos\alpha = -\sigma,\quad s'\cos\alpha' = \sigma.$$

Posons en outre

$$(3)\qquad P = ps,\quad P' = p's',$$

et l'équation (1), combinée avec les relations (2) et (3), donnera

$$(4)\qquad -p + p' = -\frac{Q\cos\beta}{\sigma}.$$

1° p et p' représentent les quotients des pressions par les surfaces auxquelles elles s'appliquent : ce sont les pressions moyennes ou pressions rapportées à l'unité de surface. Les angles α et α' ayant disparu de la relation (4), la grandeur de la pression p rapportée à l'unité de surface est, en chaque point A du liquide, indépendante de la direction de l'élément pressé : on l'appelle *pression au point* A.

2° Si l'on fait $Q = 0$, c'est-à-dire si les centres de gravité des éléments AB, A'B' sont dans un même plan, on a $p = p'$. La pression est donc la même en tous les points d'un plan horizontal.

3° Deux surfaces finies S et S', placées dans un même plan horizontal, peuvent être décomposées en éléments égaux en nombre proportionnel à leur étendue. Ces divers éléments éprouvent des pressions égales et parallèles qui se composent en une résultante unique proportionnelle à la surface pressée. Les pressions P et P' sont donc entre elles comme les surfaces

$$\frac{P}{S} = \frac{P'}{S'}.$$

Cette proposition, démontrée dans le cas le plus général pour les liquides qui ne sont soumis qu'à des pressions extérieures, se limite, dans le cas des liquides pesants, à des surfaces placées au même niveau.

4° Supposons le cylindre ABA'B' vertical, c'est-à-dire que $\cos\beta = 1$; on a

$$p = p' + \frac{Q}{\sigma}. \tag{5}$$

La pression p va donc en croissant avec le poids Q, c'est-à-dire à mesure que l'on s'enfonce à un niveau plus bas.

Considérons deux surfaces horizontales égales à l'unité, mais placées à des niveaux différents; la pression p sur la surface inférieure est égale à la pression p' sur la surface supérieure, augmentée du poids $\frac{Q}{\sigma}$ d'un cylindre droit de liquide ayant pour base l'unité et limité aux deux niveaux considérés.

5° On appelle *surface libre d'un liquide* sa surface terminale dans l'air ou dans le vide. La pression p' exercée par le milieu extérieur est supposée la même en tous les points de cette surface; par suite, si on limite le cylindre droit ABA'B' par la surface libre et par le plan horizontal où la pression est p, le poids $\frac{Q}{\sigma}$ du cylindre, rapporté à l'unité de section, doit être constant.

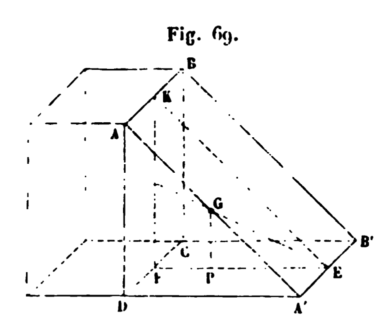
Or, quelle que soit la loi de compressibilité du fluide, sa densité d en un point ne dépend que de la pression p qu'il supporte; elle est donc la même dans tous les points d'un même plan horizontal. Supposons donc qu'un plan horizontal mobile se déplace à partir de AB vers la surface libre; le poids de l'unité de section d'un cylindre terminé en AB et au plan mobile variera d'une manière continue et qui sera la même quel que soit l'élément du plan AB qui sert de base; elle atteindra la valeur fixe $\frac{Q}{\sigma}$ pour une même distance h des plans AB, A'B'. Donc tous les éléments composant la surface libre sont contenus dans un même plan horizontal.

à une distance H du plan M. On a donc $\Sigma hs = HS$. Ce produit exprime le volume d'un prisme droit ayant pour base la paroi et pour hauteur la distance du centre de gravité G au plan MN.

Quand il y a une surface libre, on la fait coïncider avec le plan MN, et la pression provenant du liquide se réduit au poids d'une colonne liquide ayant pour base la paroi et pour hauteur la distance de son centre de gravité à la surface libre. C'est l'énoncé le plus habituel de la proposition que nous venons d'établir.

Pour déterminer géométriquement le point d'application de la pression exercée sur une paroi ABCD, on peut rabattre celle-ci horizontalement en A'B'CD (*fig.* 69) et placer verticalement sur chacun de ses éléments le filet liquide dont le poids exprime la pression qu'il supporte; la hauteur de chaque filet sera égale à la distance de l'élément correspondant au niveau AB. Ces filets réunis formeront un polyèdre ABCD A'B', dont le poids, appliqué à son centre de gravité G, représente la pression totale éprouvée par A'B'CD; le point P, où la verticale GP rencontre la surface dans la position horizontale que nous lui avons donnée, est le centre de pression.

Fig. 69.

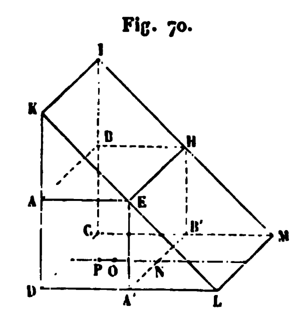


Dans le cas où la surface pressée ABCD est un rectangle vertical dont les bases AB, CD sont horizontales, et dont la première est située sur le niveau du liquide (*fig.* 69), le polyèdre que nous venons de construire est un prisme; le centre de gravité est en G, aux deux tiers de la ligne qui joint le point E au milieu de ABCD, et, en abaissant de G une perpendiculaire sur EF, elle tombe en P, aux deux tiers de la hauteur EF du rectangle à partir de E; P est, dans ce cas particulier, la position du centre de pression.

Mais, si la surface pressée s'enfonçait dans le liquide en restant parallèle à elle-même, le centre de pression changerait de place et se relèverait vers AB. Examinons, par exemple, deux

rectangles égaux ABIK, ABCD (*fig.* 70), KI étant supposé au niveau du liquide. Rabattons la surface totale, et construisons le polyèdre formé par les filets liquides superposés en chaque point; le centre de poussée de ABIK, rabattu en A′B′LM, se trouvera comme précédemment, et celui de ABCD, rabattu en A′B′CD, s'obtiendra en cherchant les centres de gravité des deux prismes rectangulaire et triangulaire qui lui sont superposés. Les verticales passant par ces centres de gravité tomberont, la première en O, à une distance NO égale à la moitié de la hauteur du rectangle, la seconde en P, à une distance NP égale aux deux tiers de cette hauteur, et il faut chercher le point d'application de la résultante des deux poids appliqués en O et en P; le premier de ces poids est double du second, et le point cherché sera sur PO, au tiers de la longueur PO à partir de O et aux deux tiers à partir de P. On voit donc que le centre de pression n'est pas situé aux mêmes points dans deux rectangles égaux, inégalement enfoncés.

Fig. 70.

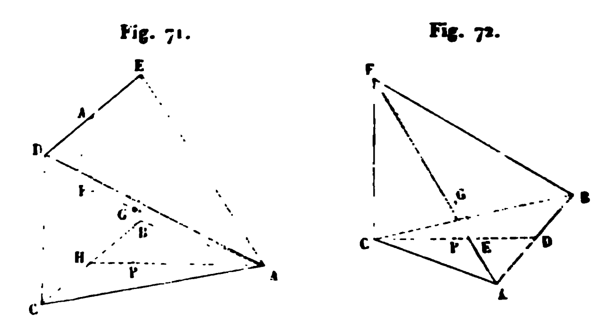


Non-seulement le centre de pression varie quand on enfonce plus ou moins la surface pressée, il change encore de place quand on tourne la figure sur elle-même. Examinons, par exemple, un triangle vertical ABC dont le sommet A soit d'abord sur le niveau et dont la base BC soit horizontale.

Soient ABC (*fig.* 71) le triangle dans sa situation réelle et A′BC sa position rabattue; le polyèdre dont le poids mesure la pression est une pyramide à base rectangulaire A′CBDE; son centre de gravité est en G, aux trois quarts de A′F, qui joint le sommet au centre de la base BCDE, et la verticale abaissée de ce point tombera en P, aux trois quarts de la ligne A′H menée du sommet A′ au milieu de BC. Par conséquent, en ramenant le triangle en ABC, le centre de poussée sera aux trois quarts de la ligne qui joint A au milieu de BC.

Si l'on suppose ensuite que les trois sommets A, B, C du triangle soient successivement placés sur le niveau du liquide

et les trois bases parallèlement à l'horizon, les pyramides construites auront des bases et des hauteurs différentes, le point P prendra trois positions distinctes, et le poids qui le presse aura trois valeurs différentes.



Comme dernier exemple, faisons coïncider l'un des côtés du triangle avec la surface du liquide, en laissant comme précédemment son plan vertical (*fig.* 72). La position rabattue est ABC, le polyèdre à étudier devient une pyramide qui a le triangle ABC pour base, et son centre de gravité est en G, sur la ligne qui joint le sommet F au centre de gravité E de cette base, au quart de cette ligne à partir de E; on aura

$$\mathrm{ED} = \frac{1}{3}\,\mathrm{DC},\quad \mathrm{EC} = \frac{2}{3}\,\mathrm{DC},\quad \mathrm{EP} = \frac{1}{4}\,\mathrm{EC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,\mathrm{DC},$$

$$\mathrm{PD} = \mathrm{ED} + \mathrm{EP} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\mathrm{DC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{DC}.$$

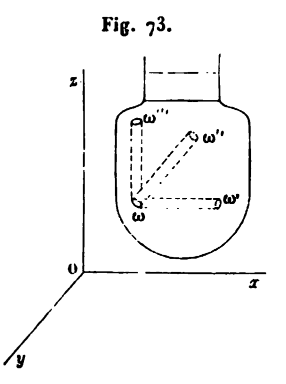
Le centre de pression est donc à la moitié de la ligne qui joint le sommet du triangle au milieu de sa base, point qui sera différent quand chacune des bases sera successivement placée au niveau du liquide.

3° *Résultante des pressions exercées sur les parois d'un vase.* — Si l'on considère une portion courbe de paroi, les forces appliquées à ses divers éléments varient en grandeur et en direction d'une manière complexe, et l'on ne peut en général les réduire à une résultante unique. Mais toute difficulté disparaît si l'on cherche la résultante des pressions

exercées sur l'ensemble des parois qui limitent le liquide dans un vase $\omega\omega'\omega''\omega'''$ (*fig.* 73).

Rapportons toutes les directions à trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz, les deux premiers horizontaux et le dernier vertical. Décomposons la surface en éléments infiniment petits et considérons en particulier l'un d'eux ω. Menons un cylindre parallèle à l'axe des x ayant ω pour base et découpant sur la surface opposée un second élément ω'. Comme ω et ω' sont au même niveau, ils éprouveront des pressions normales $p\omega$, $p\omega'$, p représentant la pression sur l'unité de surface à ce niveau.

Fig. 73.



Si nous désignons par α et α' les angles que forment les normales aux éléments ω et ω' avec la direction de l'axe des x, les pressions précédentes ont, parallèlement à l'axe du cylindre, des composantes $p\omega\cos\alpha$, $p\omega'\cos\alpha'$. D'un autre côté, la section droite du cylindre est représentée par $\omega\cos\alpha$ et $-\omega'\cos\alpha'$; comme elle est constante, $\omega\cos\alpha = -\omega'\cos\alpha'$, et, par suite, $p\omega\cos\alpha + p\omega'\cos\alpha' = 0$, ce qui veut dire que les composantes parallèles à Ox des pressions en ω et ω' se détruisent.

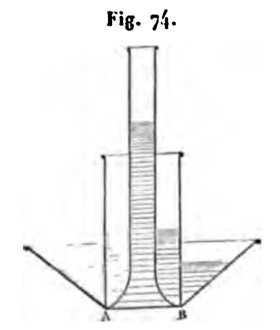
Or, on peut décomposer toute la surface du vase en couples d'éléments tels que ω et ω', et sans qu'un même élément se trouve compris deux fois dans cette décomposition. Donc la somme des projections de toutes les pressions sur l'axe des x est formée de quantités qui, prises deux à deux, donnent une somme nulle. Cette résultante est donc nulle.

On peut mener de même par ω, parallèlement à l'axe des y, un cylindre qui découpera sur la paroi opposée un élément ω'', et l'on démontrera de même que les composantes de ces pressions parallèles à Oy seront égales, parallèles et directement opposées. On aura ainsi réalisé une nouvelle décomposition de la paroi en éléments, tout à fait indépendante de la première et comprenant la totalité de la paroi sans aucun double emploi;

par suite, la résultante suivant l'axe des y est nulle, et il ne nous reste à considérer que les composantes verticales.

Menons encore un cylindre $\omega\omega''$ parallèle à Oz; les pressions p, p' sur l'unité de surface aux niveaux passant par ω et ω'' sont égales aux poids de colonnes liquides ayant l'unité pour base et la distance au niveau supérieur pour hauteur; les pressions normales aux deux éléments sont en valeur absolue $p\omega$ et $p'\omega'$, et leurs composantes verticales sont en grandeur et en signe $p\omega\cos\gamma$ et $-p'\omega'\cos\gamma'$; $\omega\cos\gamma$ et $-\omega'\cos\gamma'$ sont encore égales entre elles et à la section droite σ du cylindre. La somme algébrique des pressions verticales sera dès lors numériquement égale à $(p-p')\sigma$ et dirigée de haut en bas, c'est-à-dire qu'elle sera égale à la différence des poids de deux colonnes contenues dans le cylindre tracé et ayant pour hauteur les distances de ω et ω'' au niveau; ce sera, par conséquent, le poids de la colonne $\omega\omega''$. Il en est de même si le cylindre se termine à la surface libre du liquide, car alors la composante verticale $P\omega\cos\gamma$, qui est seule à considérer, représente le poids du liquide contenu dans le cylindre. Si l'on répète le même raisonnement pour tous les éléments de l'enveloppe du vase, toutes les composantes verticales se réduiront à une force unique égale au poids du liquide. Le mode de démonstration que nous venons d'employer, n'impliquant aucune hypothèse sur la compressibilité du liquide, sera applicable à un fluide quelconque. Donc, si l'on place sur le plateau d'une balance un vase de forme arbitraire contenant un liquide, la charge de la balance sera égale au poids du vase, augmenté du poids du liquide. C'est ce que l'expérience la plus vulgaire nous apprend chaque jour.

Fig. 74.



On s'explique aussi comment la pression sur le fond plat d'un vase rétréci (*fig.* 74) peut être supérieure au poids d'un liquide contenu dans le vase, tandis qu'elle lui est inférieure dans le cas d'un vase élargi. Les parois étant solidaires, la balance reçoit la résultante de toutes les pressions; elle ne recevrait que la pression sur

le fond si celui-ci était détaché du reste du vase comme dans l'expérience de Pascal (*voir* p. 130). Cette contradiction apparente est connue sous le nom de *paradoxe hydrostatique.*

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE. — En appliquant le principe de la composition des pressions, on est conduit à un autre résultat théorique de la plus haute importance. Imaginons que l'on plonge dans un fluide un corps de forme quelconque et que l'on cherche la résultante des pressions qu'il éprouve sur tous les éléments de sa surface; le même raisonnement va s'appliquer et la même figure peut servir. On considérera encore sur la surface du corps immergé des éléments tels que ω, ω', ω'', ω'''; les pressions qu'ils subiront seront égales à celles que nous venons d'exprimer, mais auront une direction opposée; par conséquent, toutes leurs composantes horizontales se détruiront encore, toutes leurs composantes verticales se réduiront à une force unique égale au poids d'une masse liquide qui remplirait le volume immergé et agissant en sens inverse de la pesanteur. Cela revient à dire que tout corps plongé dans un fluide éprouvera une pression résultante unique, égale au poids du liquide déplacé, appliquée à son centre de gravité et poussant le corps de bas en haut.

Ce principe, découvert par Archimède ([1]), qui en avait fait la base de l'Hydrostatique, fut complètement oublié au moyen âge et découvert de nouveau par Stevin ([2]). Le raisonnement

---

([1]) Le Traité d'Archimède avait pour titre *Traité des corps flottants.* Il fut retrouvé en 1543 par Tartaglia, qui en donna une traduction en latin fort incorrecte; le texte exact a été publié plus tard par Commandin.

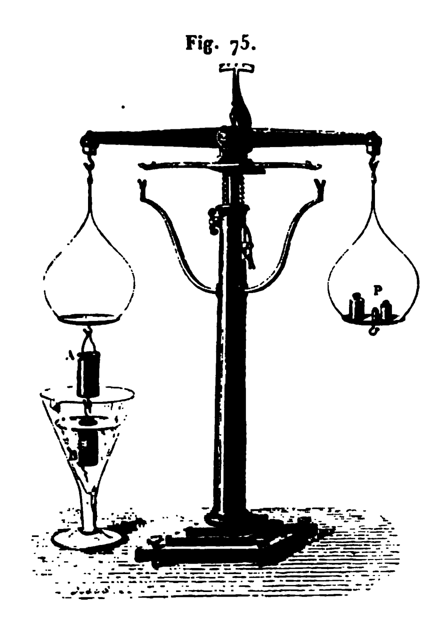
([2]) Le *Traité d'Hydrostatique,* de Stevin, a été publié en 1586. Stevin appelle *vasiforme* un vase dont les parois sont d'épaisseur et de poids négligeables. Voici, d'après M. Thurot (*Recherches historiques sur le principe d'Archimède,* dans la *Revue archéologique,* 1868-69) le texte de sa démonstration :

« THÉORÈME I. — *L'eau proposée tiendra telle position que l'on voudra dans l'eau.*

« Soit, dans le vasiforme, *a* l'eau proposée mise dans l'eau *bc*. Il faut démontrer que l'eau *a* demeurera là. Si l'on pouvoit faire autrement, assavoir que *a* ne demeurast là, mais qu'il descendit où *d* est, alors l'eau qui survient en son lieu descendra plus bas pour la même raison, et ainsi du reste, tellement que cette eau sera en perpétuel mouvement à cause de *a*, ce qui est absurde. Et l'on demonstrera pareillement que *a* ne montoit ni ne se mouvoit vers aucun

synthétique par lequel ce dernier justifiait le principe d'Archimède est intéressant à connaître; il revient à peu près à ceci. Isolons par la pensée, dans un vase plein de liquide, une masse terminée par une surface quelconque; elle est en équilibre et ne tombe pas : il faut donc admettre que son poids est détruit par la réaction du liquide qui l'entoure, c'est-à-dire qu'elle est soumise à des pressions dont la résultante est égale et directement opposée à son poids. Or ces pressions sont indépendantes de la nature de la surface; leur résultante sera donc la même pour tous les corps plongés qui auront la même enveloppe que la masse liquide qui vient d'être imaginée; elle sera donc toujours égale et contraire au poids de cette masse, c'est-à-dire au poids de l'eau déplacée. Ce raisonnement est applicable à toute espèce de fluides, compressibles ou non.

Fig. 75.



Pour démontrer expérimentalement le principe d'Archimède, dans le cas des liquides, on prend un vase cylindrique de cuivre A (*fig.* 75) et un noyau de métal B ayant un volume extérieur

costé, et qu'elle demeurera où on la mettra, soit en *d*, *e*, *f* ou *g*, ou en autre lieu dans l'eau *bc*.

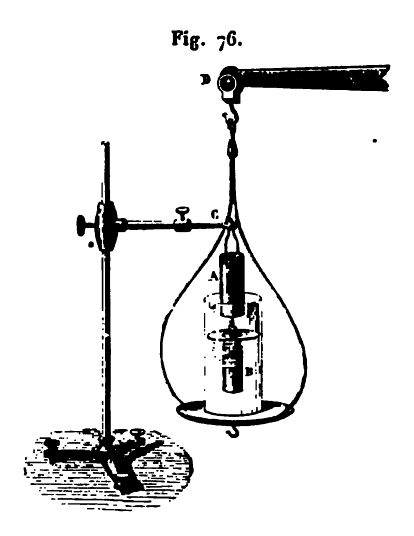
« Théorème VII. — *Tout corps solide est plus léger dans l'eau qu'en l'air de la pesanteur de l'eau égale en grandeur à icelluy.*

« Soient *a* un corps solide et *bc* l'eau, soit *d* un vasiforme pareil à *a*. Le vasiforme *d* plein d'eau n'est dans l'eau *bc* pesant ni léger, veu qu'il se peut tenir où on le met par la première proposition : par quoi vuidant l'eau *d* et y mettant le corps *a* qui y conviendra, il se trouvera estre de la légèreté mentionnée, assavoir la pesanteur de *a* moins de la pesanteur de l'eau vuidée... (*Journal de Physique de M. d'Almeida*, t. I, p. 47.)

égal à la capacité du vase, condition que l'on vérifie en enfonçant le noyau dans le cylindre et reconnaissant qu'il le remplit exactement. On accroche le vase A au plateau d'une balance, le noyau B à la base du vase A, et, après avoir équilibré par des poids P ce système suspendu, on le descend dans un vase plein d'eau, en faisant jouer la crémaillère qui soutient la balance. Aussitôt que l'immersion commence, le système se relève et l'équilibre est rompu; il faut donc que le liquide exerce sur le noyau plongé B une action de bas en haut : il y a donc une poussée. Pour la mesurer, on augmente le poids du système en versant de l'eau dans le vase cylindrique A; l'équilibre est rétabli quand il est plein et que le noyau est entièrement plongé, d'où l'on conclut que la poussée qu'éprouve ce dernier est égale au poids d'un volume d'eau égal au sien.

Voici maintenant un corollaire forcé de ce principe. Plaçons sur l'un des bassins d'une balance un vase plein d'eau et à côté de ce vase un solide quelconque, puis équilibrons le tout. Si nous venons ensuite à mettre le solide non plus à côté, mais dans le vase, nous ne détruirons pas l'équilibre : l'expérience journalière le prouve. Or, puisque le solide, en pénétrant dans le liquide, perd un poids égal à celui de l'eau déplacée, il faut que celle-ci gagne ce qu'il perd, ou qu'elle éprouve une poussée de haut en bas égale à celle qui chasse le solide en sens inverse.

Fig. 76.



Pour confirmer expérimentalement cette conséquence, nous renverserons l'expérience précédente; nous suspendrons le même système à un support fixe C (*fig.* 76), et nous équilibrerons sur la balance le vase de verre où se fait l'immersion; nous le relèverons avec la crémaillère, et nous verrons aug-

menter son poids aussitôt que le noyau B plongera. Pour rétablir l'équilibre, on puisera de l'eau dans le vase de verre, on la versera dans le cylindre A, et, quand il sera plein, le fléau sera redevenu horizontal.

L'explication théorique de ce fait est très-simple. Quand on plonge un corps solide dans l'eau, on élève le niveau, et par conséquent on augmente les pressions dans le vase de la même quantité que si l'on y ajoutait un volume de liquide égal à celui que ce corps plongé déplace. Cela revient à dire que le poids de cette eau s'accroît de celui du liquide déplacé.

On peut encore invoquer le principe de l'action et de la réaction et dire généralement que, si le corps plongé éprouve une poussée de bas en haut, l'eau doit subir une réaction égale et contraire.

Le principe d'Archimède explique les divers effets qu'éprouve un corps quelconque quand on le plonge dans un liquide. Supposons, pour plus de simplicité, que le corps est homogène : il est soumis, à deux forces appliquées à son centre de gravité et de directions contraires, son poids et la poussée du liquide. S'il est libre, il pourra ou s'élever, ou être en équilibre, ou s'abaisser.

Soient v le volume commun, d et d' les densités du corps et du liquide déplacé; vd est le poids du corps ou la force qui tend à le faire tomber, vd' est la poussée, c'est-à-dire la force qui agit pour l'élever, et $v(d-d')$ exprime leur résultante. Si d est plus grand que d', le corps tombera; si d est égal à d', il sera en équilibre, et, quand d sera inférieur à d', il montera. Nous allons examiner ce qui arrive dans quelques cas.

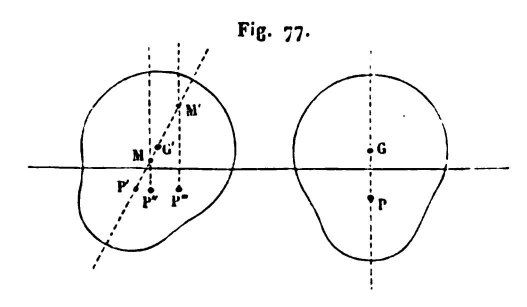
CORPS FLOTTANTS. -- Quand le corps plongé a la même densité que le liquide, il se tient en équilibre dans la masse. On réalise aisément cette condition. Un œuf, par exemple, a une densité plus grande que celle de l'eau, mais plus petite que celle de l'eau saturée de sel; il enfonce dans l'eau, surnage sur l'eau saturée et se tient en équilibre au milieu de la masse d'un mélange convenable des deux liquides. L'huile peut également se soutenir dans un mélange formé d'eau et d'alcool en proportions déterminées; elle se présente alors sous la forme

d'une sphère qui reste immobile : nous reviendrons sur cette expérience.

Si la densité du corps plongé est moindre que celle du liquide, il s'élève. Tant qu'il est entièrement immergé, il est poussé par une force constante et suit les lois du mouvement uniformément accéléré; quand il atteint la surface, il a une vitesse acquise et sort du liquide. A partir de ce moment, le volume déplacé diminue ainsi que la poussée, pendant que le poids du corps reste le même, et il arrive un instant où, la poussée et le poids devenant égaux, l'équilibre devrait avoir lieu; mais, en vertu de la vitesse acquise, le corps dépasse cette position pour y être ensuite ramené par son poids et s'y fixer après une série d'oscillations. Ainsi les corps de moindre densité que les liquides où ils plongent s'y maintiennent en équilibre en partie immergés, en partie émergés, et cet équilibre exige, comme première condition, que le corps déplace un poids de liquide égal au sien.

Le poids du corps étant toujours appliqué à son centre de gravité G (*fig.* 77), et la poussée au centre de gravité P de la

Fig. 77.

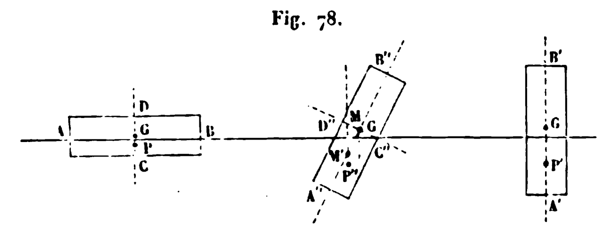


partie immergée, il faut non-seulement que ces forces soient égales, mais encore qu'elles soient opposées; de là une seconde condition d'équilibre : c'est que les centres de gravité du corps total et de la partie plongée soient sur une même ligne verticale. D'où il résulte qu'une sphère homogène sera en équilibre quelle que soit sa position, un ellipsoïde quand l'un quelconque de ses axes sera vertical; un parallélépipède droit à base rectangulaire quand l'un de ses trois systèmes d'arêtes sera vertical.

CONDITIONS DE STABILITÉ. — Il faut en troisième lieu que l'équilibre soit stable, c'est-à-dire que les forces auxquelles le corps est soumis soient dirigées de manière à le ramener à sa position initiale quand on l'en a écarté très-peu. Supposons, par exemple, que la ligne PG (*fig.* 77) s'incline en P′G′; le centre de gravité se placera en G′; mais le centre de poussée aura pris une position nouvelle P″, puisqu'il est le centre de gravité de la partie immergée et que celle-ci a changé. Alors le corps est soumis à l'action de son poids, qui agit en G′ de haut en bas, et de la poussée, qui agit en P″ de bas en haut : il en résulte un nouveau système de forces qui tend, dans la position indiquée par la figure, à éloigner le corps de sa position primitive; il y était donc en équilibre, mais en équilibre instable. Le point M où la verticale passant par P″ rencontre la ligne G′P′ se nomme le *métacentre*, et il se trouve ici au-dessous du centre de gravité. Mais, si le nouveau centre de poussée était en P‴ au lieu d'être en P″, les deux forces concourraient à ramener le corps à sa position première; dans ce cas, le métacentre serait en M′ et au-dessus du centre de gravité. On voit donc que l'équilibre sera instable ou stable, suivant que le métacentre sera au-dessous ou au-dessus du centre de gravité.

Pour élucider ce point par un exemple, nous supposerons que l'on ait une planche plate, taillée sous la forme d'un parallélépipède rectangulaire droit. Si on la couche d'abord horizontalement sur le liquide dans la position AB (*fig.* 78), le

Fig. 78.



centre de gravité sera en G, le centre de poussée en P, et, ces deux points étant sur une même verticale, l'équilibre aura lieu. Que l'on vienne maintenant à incliner la planche dans la position A″B″, le centre de poussée se trouvera en P″, le métacentre en M, sur la ligne D″C″, au-dessus du centre de gra-

vité G, et le corps reviendra à son équilibre. Si au contraire on avait placé verticalement la planche en une autre position d'équilibre A′B′, et qu'on l'eût inclinée ensuite en A″B″, le métacentre eût été sur la rencontre de MP″ avec A″B″ en M′; il eût été placé au-dessous du centre de gravité, et l'on voit que le système des deux forces appliquées en G et en M′ tend à éloigner le corps de sa position primitive A′B′ pour le coucher à plat sur le liquide dans la situation AB.

Liquides superposés. — Quand on aura mêlé du mercure et de l'eau dans un même vase en les agitant, et qu'ensuite on les laissera reposer, chaque gouttelette de mercure disséminée au milieu de l'eau tombera au fond du vase; chaque particule d'eau emprisonnée dans le mercure s'élèvera, et bientôt les deux liquides seront séparés. Que l'on mêle de l'huile avec de l'eau, l'huile, qui a une moindre densité, montera au sommet, et si l'on avait mélangé ces trois liquides entre eux, ils se seraient séparés d'eux-mêmes par le repos et se seraient superposés par ordre de densité.

La surface de séparation de deux des liquides est plane et horizontale. Considérons (*fig.* 79) deux plans horizontaux M et M′, situés dans chacun des liquides et caractérisés par les valeurs p et p' de la pression. Soit H leur distance. Par un point quelconque m du plan M menons une verticale qui rencontre M′ en m' et la surface de séparation en un point n, où la pression rapportée à l'unité de surface est ϖ. On a dans le liquide inférieur

Fig. 79.

$$p = \varpi + hd,$$

dans le liquide supérieur

$$\varpi = p' + (\mathrm{H} - h)d';$$

ajoutant membre à membre, il vient

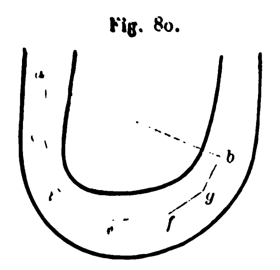
$$p = p' + hd + (\mathrm{H} - h)d',$$
$$p - p' - \mathrm{H}d' = h(d - d').$$

Le premier membre de cette équation est indépendant de la position que le point m occupe dans le plan M; donc le second l'est aussi. Si $d - d'$ est différent de o, on a donc $h =$ const. et la surface de séparation des deux liquides est plane et horizontale. Si $d = d'$, le premier membre est égal à o et h est quelconque. La forme du liquide est alors déterminée exclusivement par les actions capillaires, dont nous faisons actuellement abstraction.

Les deux plans M et M' pouvant toujours être pris assez voisins l'un de l'autre pour que les poids spécifiques d et d' ne varient pas sensiblement dans l'intervalle compris entre ces plans et la surface de séparation, la proposition est applicable aux fluides compressibles aussi bien qu'aux liquides communs.

VASES COMMUNICANTS. — Nos théorèmes sur l'équilibre des liquides sont indépendants de la forme des vases. Toutefois, en établissant la formule fondamentale (p. 131 et 134), nous avons supposé que la droite qui joint les centres de gravité *a* et *b* des deux éléments que l'on compare est entièrement comprise dans le liquide, ce qui n'a pas toujours lieu. Pour écarter cette restriction, joignons *a* et *b* (*fig.* 80) à travers le liquide par une ligne polygonale brisée d'un nombre de côtés suffisant pour qu'entre deux sommets quelconques, *e* et *f* par exemple, la densité d_n du fluide puisse être considérée comme invariable. Soient alors ϖ_{n-1}, ϖ_n les pressions rapportées à l'unité de surface en *e* et *f*, h_n la différence de niveau comptée positivement de haut en bas, négativement en sens contraire; on a

Fig. 80.



$$(1) \qquad \varpi_n = \varpi_{n-1} + h_n d_n.$$

De même, à partir de *a*, où la pression est p, jusqu'au $m^{\text{ième}}$ sommet *b*, où la pression est p', on a les équations

$$\varpi_1 = p \quad + h_1 d_1,$$
$$\varpi_2 = \varpi_1 \quad + h_2 d_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p' = \varpi_{m-1} + h_m d_m,$$

et, par addition,

$$(2) \qquad p' = p + \Sigma hd,$$

c'est-à-dire que la pression en b est égale à la pression en a augmentée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité, pour hauteur la différence des niveaux de a et de b, et pour densité en chaque point la densité du liquide. Cette conclusion est identique à celle que nous avons obtenue page 133, et n'est plus soumise qu'à une seule restriction : c'est que la continuité du liquide ne soit nulle part interrompue entre les points a et b que l'on compare.

Si le liquide est incompressible, la densité d est constante, et la formule (2) peut s'écrire

$$p' = p + d\Sigma h$$

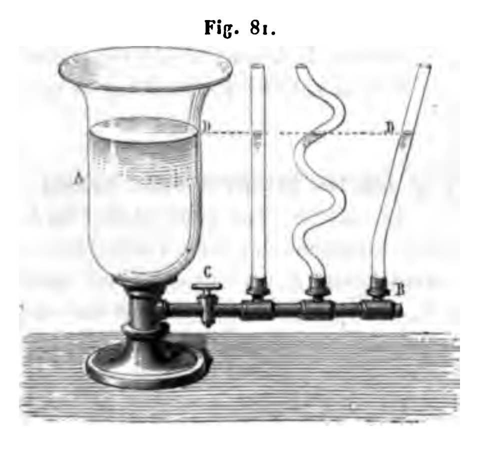
ou, en appelant désormais h la différence de niveau totale,

$$(3) \qquad p' = p + hd,$$

formule identique à celle de la page 134.

Dans tous les cas, il résulte de la formule (2) :

Fig. 81.



1° Que la pression au même niveau ($\Sigma hd = 0$) est la même dans deux vases communicants;

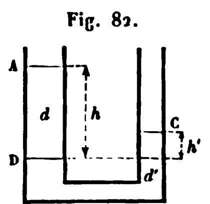
2° Que, s'il y a dans chacun d'eux une surface libre confinant

à la même atmosphère, les deux surfaces libres sont dans un même plan horizontal.

On vérifie cette proposition à l'aide du cathétomètre et de l'appareil représenté *fig.* 81. C'est un vase A mastiqué sur une garniture métallique à robinet C, à laquelle on peut adapter des tubes de dimensions ou de formes différentes.

CAS DE DEUX LIQUIDES. — Quand deux vases communicants contiennent des liquides de différente densité, par exemple du mercure en CD, de l'eau en DA (*fig.* 82), on peut appliquer le théorème fondamental à la surface de séparation D, qui appartient à la fois aux deux liquides. La pression en D, abstraction faite de la pression atmosphérique, est égale au poids d'une colonne de chacun des liquides ayant respectivement les hauteurs h et h'.

Fig. 82.



Quand les liquides peuvent être considérés comme incompressibles, on a, en désignant par d et d' leurs densités,

$$hd = h'd' \quad \text{ou} \quad \frac{h'}{h} = \frac{d}{d'};$$

les hauteurs au-dessus de la surface de séparation sont en raison inverse des densités. Cette proposition se vérifie à l'aide du cathétomètre.

ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE SOUMIS A DES FORCES QUELCONQUES. — Le cas le plus général de l'Hydrostatique est celui d'un liquide soumis à des forces variables en grandeur et en direction d'un point à un autre de sa masse. Les trois composantes X, Y, Z de la force agissant en un point A, rapportées à l'unité de masse du liquide, sont, en général, des fonctions continues des coordonnées x, y, z de ce point et de la densité ρ, et il en est de même de la pression qui, d'après le principe de Pascal, est la même autour du point A dans toutes les directions. Nous n'étudierons que le cas où la densité ρ est invariable.

Considérons un parallélépipède infiniment petit, ABCDEFGH

... limité par trois plans parallèles aux plans coordonnés dont les arêtes sont δx, δy, δz, le volume $\delta x \delta y \delta z$ et la masse $\rho \delta x \delta y \delta z$. La force agissant sur cet élément de volume a pour composantes

Fig. 83.

$$\rho X \delta x \delta y \delta z,$$
$$\rho Y \delta x \delta y \delta z,$$
$$\rho Z \delta x \delta y \delta z$$

et doit donner, avec les pressions appliquées aux six faces du cube, une résultante nulle.

Occupons-nous d'abord des forces parallèles à Ox. La pression sur ABCD est $p\,\delta y \delta z$; sur EFGH, $-(p+\delta p)\delta y \delta z$. Ces pressions sont parallèles à l'axe des x; leur somme $-\delta p \delta y \delta z$ doit donner avec la composante $\rho X \delta x \delta y \delta z$ une résultante nulle. On a donc

$$\delta p = \rho X \delta x,$$

et à la limite

(1) $$p'_x = \rho X;$$

on aura de même, en considérant les faces CBFG, DAEH d'une part, AEFB, DHGC d'autre part,

(2) $$p'_y = \rho Y,$$
(3) $$p'_z = \rho Z.$$

Les équations (1), (2), (3) expriment les conditions de l'équilibre. Posons

(4) $$p = f(x, y, z).$$

Les équations (1), (2), (3) établissent que les composantes de la force sont les dérivées partielles d'une même fonction

$$\frac{1}{\rho} f(x, y, z)$$

des coordonnées du point A.

On appelle *surface de niveau* une surface telle que la pression ait en tous ses points la même valeur;

$$p = f(x, y, z) = a$$

est donc l'équation générale des surfaces de niveau. On voit sans peine que deux surfaces de niveau ne peuvent se rencontrer, puisque à une valeur donnée de x, y, z ne peut correspondre qu'une seule valeur de f.

Les composantes X, Y, Z de la force agissant en un point sont proportionnelles aux dérivées partielles de la fonction f; il en résulte que la direction de la force est partout normale aux surfaces de niveau.

Nous signalerons deux exemples :

1° *Équilibre d'un liquide soumis à la pesanteur seule.* — Nous prendrons pour axe des z une droite verticale, pour axes des x et des y deux droites rectangulaires, prises arbitrairement dans un plan horizontal. On a

$$X = 0, \tag{1 bis}$$

$$Y = 0. \tag{2 bis}$$

La force verticale Z agissant sur l'unité de masse est

$$Z = \frac{1}{\rho} p'_z = g, \tag{3 bis}$$

d'où, remontant à la fonction primitive et désignant par p' une constante,

$$p = \rho g z + p'.$$

Soit d le poids spécifique ρg :

$$p = p' + zd.$$

C'est notre formule fondamentale de la page 134; p' désigne la pression dans le plan des xy pris pour plan de comparaison.

Dans le cas actuel, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux

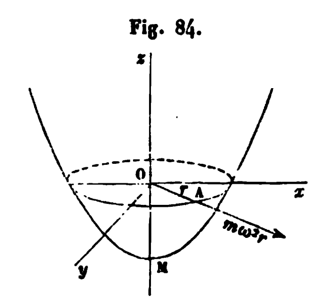
$$z = \text{const.}$$

En particulier, la surface libre est plane et horizontale

2° *Équilibre d'un liquide tournant autour d'un axe vertical.* — Nous ramènerons ce cas à la considération de l'équilibre par l'introduction d'une force centrifuge, conformément aux observations de la page 56.

Soient ω la vitesse angulaire de rotation, r la distance d'un point A à l'axe vertical Oz. La force centrifuge en A rapportée à l'unité de masse est $\omega^2 r$; elle est dirigée suivant le prolon-

Fig. 84.



gement du rayon OA. Ses composantes suivant Ox et Oy sont

(1 *ter*) $$X = \frac{1}{\rho} p'_x = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x,$$

(2 *ter*) $$Y = \frac{1}{\rho} p'_y = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y,$$

La pesanteur fournit la composante verticale

(3 *ter*) $$Z = \frac{1}{\rho} p'_z = g.$$

En remontant à la fonction primitive, on a

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \rho g z + p'.$$

p' est une constante. C'est la pression au point de l'axe pris pour origine.

L'équation des surfaces de niveau est

$$\frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \rho z g = \text{const.}$$

C'est l'équation d'une famille de paraboloïdes de révolution. La surface libre du liquide est elle-même un paraboloïde.

CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE DES GAZ. — BAROMÈTRE.

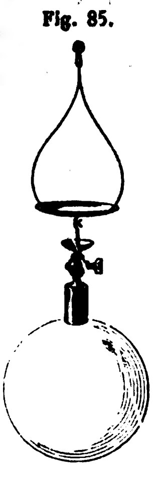
Propriétés générales des gaz. — Mesure de la pression d'un gaz. — Expérience de Torricelli. — Baromètre. — Sa construction. — Baromètre fixe. — Baromètre de Fortin. — Corrections. — Baromètre de Gay-Lussac et Bunten. — Baromètre balance. — Baromètres enregistreurs. — Usage des baromètres. — Formule barométrique.
Poussée dans les gaz. — Aérostats. — Poids d'un corps dans l'air.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES GAZ. — Les liquides communs sont extrêmement peu compressibles. Il n'en est pas de même des gaz. Prenons un cylindre de verre fermé par un bout, plaçons-le verticalement sur une table, engageons dans l'ouverture supérieure un piston terminé par une poignée et chargeons-le d'un poids; nous voyons ce piston s'enfoncer dans l'intérieur d'autant plus profondément que l'effort exercé est plus grand; mais en même temps le gaz résiste de plus en plus à mesure qu'il se comprime davantage, et bientôt il fait équilibre aux poids. Il se détend ensuite et reprend son premier volume quand on rend la liberté au piston. On peut, par un effort suffisamment énergique, réduire le volume du gaz à la vingtième partie, par exemple, de son volume normal, et il est à remarquer que, si la compression est rapide, elle est accompagnée d'un dégagement de chaleur suffisant pour enflammer un morceau d'amadou fixé à la tête du piston. C'est l'expérience du *briquet à air*.

De même qu'on peut comprimer un gaz, on peut aussi l'obliger à prendre un volume supérieur à son volume normal. On met une vessie fermée et partiellement remplie d'air sous la cloche d'une machine pneumatique, on fait ensuite le vide dans cette cloche autour de la vessie, et l'on voit aussitôt celle-ci se gonfler, pour revenir à son volume primitif quand on

laissera rentrer l'air sous la cloche (¹). Cet air agit donc sur les parois de la vessie comme le ferait une pression exercée de l'extérieur, et l'on est en droit de dire qu'un gaz, comme un liquide, exerce des pressions sur les parois des vases qui le renferment ou à la surface des corps qui y sont plongés. Notons aussi que, quand un gaz se *détend* brusquement, il se refroidit; ainsi, quand dans l'expérience précédente on ouvre le robinet de la machine pneumatique, les premières portions de l'air qui rentrent sous la cloche produisent un brouillard dû à la condensation de la vapeur qui était contenue dans cet air.

Fig. 85.



En résumé, le volume d'une masse gazeuse n'est déterminé que par la pression qu'elle supporte. Quand cette pression augmente le volume diminue, quand elle diminue il augmente, et toute variation de volume est accompagnée d'un dégagement ou d'une absorption de chaleur.

Les gaz sont pesants; prenons (*fig.* 85) un ballon de verre de 5^{lit} à 10^{lit} de capacité, fermé par une garniture à robinet. Commençons par enlever l'air qu'il renferme à l'aide d'une machine pneumatique, fermons le robinet et suspendons l'appareil à une balance sensible en l'équilibrant par une tare opposée. Au moment où nous ouvrirons le robinet, nous entendrons l'air rentrer en sifflant, nous verrons le ballon baisser, et son poids augmenter de $1^{gr},293$ environ par litre de capacité. Cette expérience est due à Otto de Guericke (²). On peut la répéter en laissant rentrer dans le ballon un gaz quelconque, et l'on constate ainsi que tous les gaz sont pesants.

MESURE DE LA PRESSION D'UN GAZ. — Les particules gazeuses jouissent d'une mobilité au moins égale à celle des particules

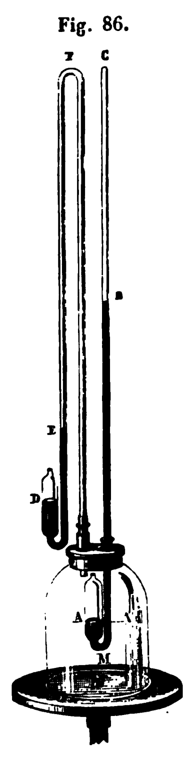
(¹) Cette expérience est due aux académiciens de Florence (*Saggi di naturali sperienze fatte nell' Academia del Cimento;* Firenze, 1667 et 1691; la meilleure édition de cet Ouvrage a été publiée en 1841, par le grand-duc Léopold II).

(²) Galilée avait précédemment démontré que l'air est pesant en déterminant le poids d'un ballon dont on avait fait sortir, en le chauffant, une certaine quantité d'air.

liquides, et, comme la grande compressibilité particulière aux gaz n'altère en rien les raisonnements par lesquels nous avons établi les lois fondamentales de l'Hydrostatique, nous pouvons appliquer aux gaz le principe de Pascal et le principe d'Archimède, avec toutes leurs conséquences. Nous n'avons à nous inquiéter que des vérifications expérimentales dont elles sont susceptibles.

L'expérience suivante nous montrera comment on mesure la pression d'une masse gazeuse. Prenons une cloche M fermée de toute part (*fig.* 86) et dans laquelle on peut à volonté puiser ou introduire du gaz au moyen d'une machine pneumatique ([1]). Un tube recourbé AMBC plonge par le bas dans le vase et, traversant la partie supérieure, s'élève jusqu'en C. Ce tube est fermé au sommet; il contient du mercure, et l'espace BC est entièrement purgé d'air. Si l'on fait le vide au plus haut degré possible dans le vase M, le mercure s'établit dans le tube AMB très sensiblement au même niveau AA' dans les deux branches; mais, au moment où l'on fait entrer de l'air dans la cloche, le niveau monte en B et s'y fixe pendant qu'il descend en A d'une autre part.

Fig. 86.



Puisque le mercure est maintenant élevé d'une hauteur h au-dessus du niveau A dans la branche fermée, il exerce sur la surface A une pression verticale de bas en haut, et qui est égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait A pour base et h pour hauteur; et, comme l'équilibre est établi, il faut que le gaz exerce une pression contraire de haut en bas sur la même surface du mercure, et qu'elle soit égale au poids d'une colonne cylindrique de ce liquide qui aurait A pour base et h pour hauteur.

([1]) Cette expérience est due à Pascal, qui l'appelait *expérience du vuide dans le vuide*.

Si donc S représente la surface A en centimètres carrés, h la différence des niveaux du mercure en centimètres, et 13,59 la densité du mercure, la pression P s'exprimera en grammes par

$$P = Sh.13,59.$$

Dans la mesure que l'on fait de la pression des gaz, on convient généralement de prendre l'unité de surface pour étendue pressée; alors la pression est représentée par $h.13,59$; puis, comme elle est proportionnelle à la hauteur h, on se contente habituellement d'exprimer cette hauteur. On dira donc une pression de $0^m,10$, $0^m,15$, $0^m,20$, et cela devra se traduire ainsi : la pression exercée sur l'unité de surface est égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait cette surface pour base et $0^m,10$, $0^m,15$, $0^m,20$ de hauteur. Telle est la méthode générale pour apprécier et exprimer la pression d'un gaz, et nous pourrons en particulier l'appliquer à l'atmosphère.

L'appareil figuré ci-dessus (*fig.* 86) offre d'ailleurs un moyen de bien démontrer l'existence de la pression atmosphérique; il porte un second tube DEF en communication libre avec l'air par D et avec la cloche par F. Quand tout est dans l'air, les deux niveaux D et E sont les mêmes; mais, au moment où l'on enlève peu à peu le gaz de la cloche, la pression y diminue et le mercure s'élève en E. En même temps il baisse en B et s'élève en A.

EXPÉRIENCE DE TORRICELLI (1). — La disposition qui permet de mesurer la pression exercée par l'atmosphère a été imaginée par Torricelli. Ce savant prit un long tube de verre fermé par le bas, le remplit de mercure et le retourna dans une cuvette contenant aussi du mercure; retirant ensuite le doigt, il cessa de soutenir le liquide dans le tube, et alors il le vit baisser et

(1) Cette expérience, dont l'idée est due à Torricelli, fut d'abord réalisée par Viviani, son élève, en 1643. Torricelli ne tarda pas à la répéter, et il indiqua la pression atmosphérique comme la cause du phénomène; il reconnut le premier l'existence des variations barométriques accidentelles.

Torricelli avait communiqué le résultat de son expérience au P. Mersenne en 1644; celui-ci en fit part à Pascal. *Voir* THUROT, *Note historique sur l'expérience de Torricelli* (*Journal de Physique*, t. I, p. 171), et les *Expériences de Pascal sur le vide et la pesanteur de l'air* (*ibid.*, p. 267).

s'arrêter après quelques oscillations à une hauteur de $0^m,76$ en moyenne (*fig.* 87). Il en conclut que la pression de l'atmosphère fait équilibre à une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur. Elle est donc exprimée en grammes par

Fig. 87.

$$76 \times 13,59 = 1033^{gr},3$$

sur 1^{cq} (¹) et par

$$S \times 76 \times 13,59 = S \times 1033^{gr},3$$

sur une surface de S centimètres carrés. C'est le poids d'une colonne d'air de base S, s'étendant verticalement depuis la surface du sol jusqu'aux limites de l'atmosphère.

L'expérience de Torricelli a été étendue et variée par Pascal; elle fut faite avec de l'eau, du vin et de l'huile (²), et l'élévation des divers liquides fut trouvée en raison inverse de leur densité, ce qui est conforme à la théorie; elle fut répétée sur le sommet des édifices et des hautes montagnes, et la hauteur barométrique y fut moins grande qu'à leur base, ce que Pascal avait prévu (³). C'est à cette occasion qu'il posa les principes de l'équilibre des liquides et des gaz tels que nous les avons exposés, et qu'il donna la théorie du baromètre à laquelle

(¹) Dans le système de l'Association britannique, l'unité de force est $\frac{1^{gr}}{980,896}$ et, par suite, la pression de 1^{atm} est exprimée par le nombre 1013560.

(²) Ces expériences furent faites à Rouen. Pascal attribuait alors le phénomène à l'horreur du vide (PASCAL, *Expériences nouvelles touchant le vuide*, Paris, 1647). Il ne tarda pas à rectifier cette manière de voir.

(³) La principale expérience fut faite, le 19 septembre 1648, à Clermont-Ferrand et au sommet du Puy-de-Dôme, par Perier, beau-frère de Pascal, et le P. Chastin. La dépression au sommet du Puy-de-Dôme fut de 3 pouces 1 ligne 5. Le résultat de cette expérience fut publié par Pascal (*Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs;* Paris, 1648). Le *Traité de l'équilibre des liqueurs*, terminé en 1653, ne fut publié qu'en 1663, après la mort de l'auteur.

il n'y eut plus rien d'essentiel à ajouter. Nous allons entrer dans tous les détails nécessaires pour faire comprendre la construction de cet appareil.

CONSTRUCTION DU BAROMÈTRE (¹). — On choisit un tube de verre ou de cristal bien droit, régulier dans toute sa longueur et exempt de bulles ou de stries. Pour le nettoyer, ce qui est essentiel, on le lave à l'acide azotique bouillant, puis on le rince avec de l'eau distillée et on le sèche; ensuite on ferme un des bouts à la lampe, et l'on souffle à l'autre extrémité une ampoule dont on verra bientôt l'usage. Le tube étant prêt, il faut ensuite choisir et purifier le mercure, afin que sa densité soit toujours la même; il faut surtout le débarrasser d'un oxyde noir qui se forme spontanément à l'air, qui ternit le métal et le fait adhérer au verre. Dans ce but, on le traite par l'acide azotique, qui dissout l'oxyde et les métaux étrangers, et l'on prolonge l'action en agitant de temps en temps, jusqu'au moment où l'on voit naître des vapeurs rutilantes; ensuite on lave à grande eau et l'on sèche. Après que l'on a terminé ces préparations essentielles, on emplit le tube depuis la base jusqu'à la naissance de l'ampoule avec le mercure purifié.

En examinant l'aspect du mercure dans le tube, on y remarque de nombreuses bulles d'air interposées, mêlées à des gouttelettes d'eau, et, si l'on retournait l'appareil dans un bain, comme le faisait Torricelli, on verrait une partie de ces bulles

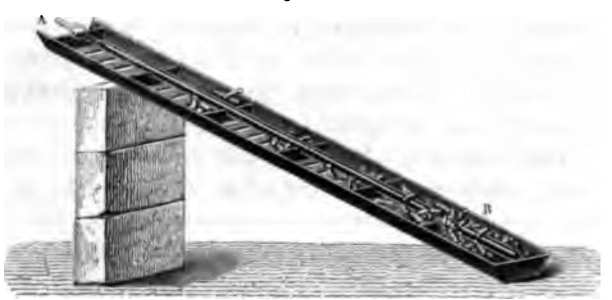
---

(¹) Ce n'est que bien tard que l'on a connu les précautions nécessaires pour la construction d'un baromètre exact. Au début, on négligeait de faire bouillir le mercure à l'intérieur du tube barométrique, et ce n'était que par hasard que l'on pouvait rencontrer deux baromètres comparables entre eux.

Picard ayant observé, en 1675, que, quand il agitait son baromètre dans l'obscurité, la partie supérieure de la colonne devenait lumineuse, divers physiciens, parmi lesquels Jean Bernoulli, cherchèrent, sans succès, soit à reproduire le phénomène à coup sûr, soit à en découvrir la cause. Dufay annonça, en 1723, que les baromètres dans lesquels le mercure avait bouilli devenaient lumineux par l'agitation, et l'on fit désormais bouillir le mercure pour se procurer des baromètres lumineux. Ce n'est qu'en 1740, cent ans après la découverte du baromètre, que Le Monnier et Cassini reconnurent que les baromètres ainsi préparés étaient seuls comparables, et vingt-deux ans se passèrent encore avant que Deluc (*Recherches sur l'atmosphère*) en donnât l'explication. (Pogg., *Geschichte der Physik*, p. 503-506).

monter dans la chambre barométrique et y exercer conséquemment une pression qui fausserait les indications de l'instrument. Il est donc essentiel de les chasser complétement, ce qui nécessite l'opération suivante. On dépose ce tube sur un gril incliné où il est soutenu de distance en distance par des appuis de fer (*fig.* 88), et l'on place autour de lui et dans

Fig. 88.



toute sa longueur des charbons allumés qui l'amènent à une température voisine de celle qui met le mercure en ébullition; puis on dispose à la base, en B, sur une longueur de $0^m,10$, un petit tas de charbons rouges qui suréchauffent le mercure aux parties qu'ils touchent et le font bientôt bouillir. A chaque bulle de vapeur qui naît, le liquide tout entier se soulève, et c'est pour le retenir qu'il y a une ampoule au sommet; puis il retombe en produisant l'effet du marteau d'eau, c'est-à-dire des secousses répétées qui agitent brusquement le tube et le briseraient certainement si l'opérateur ne surveillait constamment l'ébullition et ne la modérait en retirant ou remettant des charbons, suivant qu'elle marche trop vite ou trop lentement. Au bout de cinq minutes environ, on enlève un à un les charbons qui sont à la base du tas B pour les porter à son sommet, ce qui arrête l'ébullition en bas pour la faire naître plus haut, et, en continuant peu à peu ce transport des charbons tout le long du tube, on fait successivement bouillir toutes les parties du mercure qu'il contient, et l'on balaye par la vapeur qui se forme toute l'humidité et tout l'air qui étaient primitivement restés en adhérence avec le verre.

Après cette opération, le mercure a complétement changé d'aspect. Non-seulement les bulles ont disparu, mais la surface a pris l'éclat vif et métallique du miroir le plus parfait : c'est à ce signe que l'on reconnaît si le baromètre est bien purgé.

Après le refroidissement, on coupe l'ampoule qui terminait l'extrémité ouverte du tube, on achève de remplir avec du mercure sec et chaud, jusqu'à ce que le sommet liquide dépasse les bords du tube par un bouton convexe; on ferme avec le doigt en écrasant le bouton, et l'on retourne l'appareil pour le plonger dans le bain comme le faisait Torricelli. Il faut s'assurer qu'au moment où l'on enlève le doigt aucune bulle d'air ne remonte dans la chambre barométrique.

Quand un baromètre a été construit comme nous venons de le dire, il faut le munir d'une échelle divisée en millimètres pour mesurer à chaque moment la distance verticale des deux niveaux; or, comme le mercure ne peut s'élever dans le tube sans baisser d'une quantité correspondante dans la cuvette, il faudra que l'échelle soit disposée pour que l'on puisse à la fois observer les positions des deux sommets, puisqu'ils sont tous deux variables. Cette nécessité complique l'appareil, et l'on a inventé pour y satisfaire différentes dispositions que nous allons faire connaître.

Fig. 89.

BAROMÈTRE FIXE. — Si le baromètre est destiné à des expériences précises de laboratoire, et qu'il ne doive pas être déplacé, on emploie pour cuvette une auge de fonte qui a la forme d'un parallélépipède rectangulaire droit (*fig.* 89). On la fixe contre une planche épaisse scellée dans le mur; on soutient le tube barométrique par des tasseaux B et C, et les mesures des hauteurs sont prises avec un cathétomètre réglé à l'avance et immuablement établi en face de l'appareil. Pour obtenir ces mesures avec toute l'exactitude possible, on a disposé au-dessus de la cuvette une vis verticale à deux pointes A que l'on manœuvre au moyen d'un bouton

fileté, et qui monte ou descend dans un écrou immobile. Au moment où l'on veut opérer, on fait descendre la pointe inférieure jusqu'à toucher le mercure, et l'on réalise ce contact avec une extrême précision, car l'observateur voit à la fois la pointe et son image réfléchie par le mercure marcher l'une vers l'autre quand on approche de l'affleurement, se toucher quand on l'a atteint, et la surface de mercure se déprimer en ombilic quand on le dépasse. Une fois le contact obtenu, on vise avec le cathétomètre le niveau du mercure dans le tube d'abord, puis la pointe supérieure de la vis, et, pour avoir la hauteur cherchée, on ajoute à la course de la lunette la longueur de la pointe affleurante, qui est constante et que l'on mesure une fois pour toutes. De tous les baromètres, celui-ci est le plus simple, et de toutes les méthodes pour mesurer les hauteurs, celle que nous venons d'indiquer est la meilleure, car, pourvu que le cathétomètre soit bien réglé, et l'on peut toujours vérifier ce réglage, on trouve directement la différence verticale des niveaux; ensuite on obtient l'affleurement de la pointe avec une grande rigueur, et, en troisième lieu, la mesure est faite par la plus exacte des méthodes connues, au moyen d'une lunette qui grossit les objets visés, et avec une précision qui dépasse $\frac{1}{10}$ de millimètre. Ce baromètre est dû à Regnault.

Fig. 90.



BAROMÈTRE DE FORTIN. — Mais il n'est pas toujours possible d'installer le baromètre comme nous venons de le faire. Puisqu'il doit servir à mesurer la hauteur des montagnes, il faut le rendre portatif, et, sans diminuer la précision des mesures, il faut simplifier le moyen de les faire.

Le baromètre de Fortin, que nous allons décrire, satisfait pleinement à ces nécessités. La cuvette, représentée en coupe dans la *fig.* 90, est formée : 1° par un couvercle de buis CC, doublé de cuivre extérieurement et surmonté d'un tube central BB pour laisser passer le baromètre; 2° par une lanterne cylindrique de verre DD mastiquée à ses deux bouts, et maintenue par trois tiges de cuivre à vis dont l'une se voit en CH; 3° par un large tube vissé EFGH qui porte une vis ascendante Q; 4° par un cylindre de buis MNMN qui est composé de deux bagues vissées l'une sur l'autre, la première MM fixée à l'enveloppe, et la deuxième NN qui peut se démonter et qui se prolonge par un sac de peau de chamois lié sur son contour : ce sac est le fond de la cuvette; il soutient le mercure qu'elle renferme, et il est lui-même appuyé sur l'extrémité de la vis Q. Toutes ces pièces sont figurées en perspective, démontées et renversées, dans la *fig.* 93.

On conçoit qu'en élevant ou en abaissant la vis Q on fait monter ou descendre le fond mobile, et par suite le mercure qu'il renferme; on peut, dès lors, profiter de cette disposition pour amener à un point invariable le niveau dans la cuvette. A cet effet, le couvercle CC est percé d'un trou latéral qui donne accès à une pointe d'ivoire A invariablement fixée et dont l'extrémité marque le niveau constant où l'on ramène le mercure au moment de chaque observation, en faisant jouer la vis Q. L'affleurement se règle avec la même précision et par le même moyen que dans l'appareil précédent.

Il nous reste à décrire le tube barométrique qui vient plonger dans la cuvette à travers l'ouverture centrale BB (*fig.* 90). Une pièce de peau de chamois, liée d'une part sur le tube et de l'autre sur le prolongement BB, fixe ces parties l'une à l'autre, laisse pénétrer l'air sans obstacle dans la cuvette; mais, étant imperméable au mercure, elle l'empêcherait de s'échapper s'il arrivait jusqu'à elle. Pour garantir le tube des chocs qu'il pourrait recevoir, on le couvre d'une enveloppe cylindrique de cuivre que l'on visse en BB et sur laquelle est tracée en millimètres une division dont le zéro correspond à la pointe d'ivoire, c'est-à-dire au niveau constant où le mercure est ramené à chaque observation. Dans le haut, l'enveloppe est coupée lon-

gitudinalement par deux fentes opposées (*fig.* 91), à travers lesquelles on voit le sommet A du mercure et où se meut un curseur annulaire D que l'on fait monter ou descendre au moyen d'un pignon C le long d'une crémaillère. Si l'on veut faire une mesure, on descend le curseur en tenant l'œil dans le plan horizontal qui passe par ses bords antérieur et postérieur, jusqu'au moment où ce plan devient tangent à la surface supérieure du mercure. Ce curseur porte un vernier dont les divisions courent le long de celles qu'on a marquées sur le tube. Le zéro fait connaître le nombre de millimètres, et le numéro de la division coïncidente exprime les dixièmes.

Fig. 91.



Tel qu'il vient d'être décrit, le baromètre de Fortin nous offre un premier avantage : c'est que, le niveau extérieur y étant ramené à une hauteur constante, avec une erreur négligeable, il n'y a qu'une observation à faire et qu'une erreur de lecture à craindre ; mais c'est surtout au moment où on veut le transporter que sa supériorité se révèle. Si l'on incline brusquement un baromètre ordinaire, on voit le mercure se précipiter vers le sommet du tube et le frapper violemment en faisant l'effet du marteau d'eau, et, comme dans les voyages ces chocs se répéteraient à chaque instant, les dangers de rupture seraient continuels. Outre cela, si l'on retourne le tube ou si l'on agite vivement la cuvette, on y fait pénétrer de l'air, et l'on doit toujours craindre que des bulles gazeuses, arrivées jusqu'à la chambre barométrique sans être aperçues, n'aient faussé l'instrument. Le baromètre de Fortin rend tous ces accidents à peu près impossibles. Quand on veut le transporter, on soulève peu à peu la vis Q ; alors le mercure monte dans la cuvette qu'il remplit d'abord en chassant à travers la peau de chamois l'air qu'elle contenait, puis il s'élève dans le tube jusqu'au sommet, et aussitôt qu'il y arrive l'opérateur en est averti par une résistance subite que la vis lui oppose. Il

est alors assuré que le mercure ne peut plus éprouver de bal-

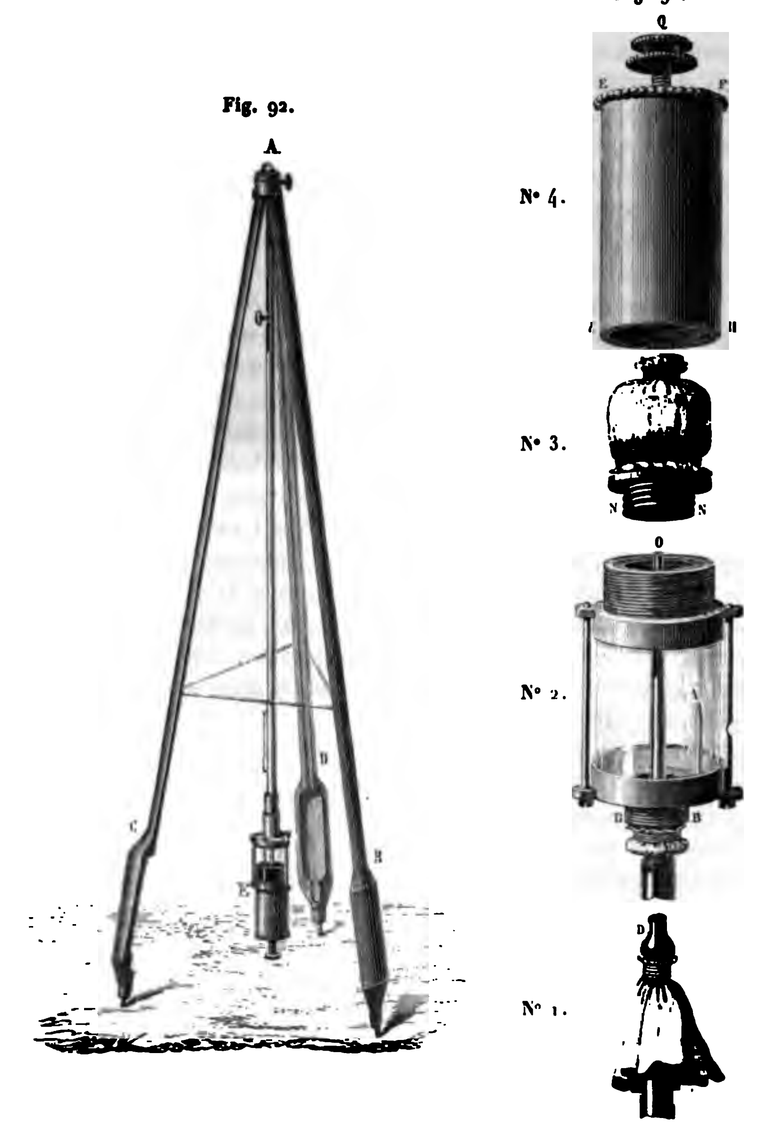


Fig. 92.

Fig. 93.

lottements, que l'introduction de l'air est devenue impossible,

et il peut sans aucun danger incliner, renverser ou agiter l'instrument sans avoir aucune altération ni aucune rupture à redouter. On enferme ordinairement le baromètre dans un étui muni d'une bandoulière, ou dans une canne creuse (*fig.* 92) qui se divise en trois parties articulées, lesquelles ont aussi leur utilité, car elles forment un support pour accrocher l'instrument au moyen d'une suspension à la Cardan. Si enfin, malgré toutes ces précautions, le baromètre vient à se briser, il est toujours possible à un voyageur de le reconstruire, et, comme on y est quelquefois obligé, nous devons entrer dans quelques détails sur cette opération.

Après avoir fait bouillir le mercure dans le tube comme nous l'avons indiqué, il faut réunir ce cube à la cuvette. A cet effet, on perce dans un morceau de peau de chamois un trou étroit à travers lequel passe l'extrémité ouverte du tube jusqu'au delà d'une dilatation D (*fig.* 93, n° 1); puis, avec un fil ciré, on fixe la peau sur le tube en la liant solidement. Introduisons alors la pointe du tube dans le goulot central BB de la cuvette renversée (n° 2); elle y pénétrera jusqu'à la dilatation D, qui a été faite à dessein plus grande que l'ouverture du goulot. Alors nous retournerons la peau de chamois sur elle-même pour la ramener sur le goulot BB, et nous la lierons avec soin; après quoi nous en couperons les bords, et, le baromètre étant fixé à la cuvette, nous pourrons tout de suite l'introduire dans son enveloppe, que nous visserons sur l'écrou BB.

Dans cette position, l'extrémité ouverte O du tube s'élève verticalement dans la cuvette retournée. Le fond étant démonté et la deuxième bague XX (n° 3) du cylindre de buis étant dévissée, on verse du mercure autour du tube jusqu'à recouvrir son extrémité O et établir la continuité entre celui que l'on verse et celui qui remplit le tube. Après quoi il n'y aura plus qu'à revisser la pièce XX, puis le tube GHEF (n° 4) qui porte la vis Q, à serrer celle-ci sur le fond de peau de chamois, et l'appareil se trouvera précisément dans la situation où on le place quand on veut le transporter.

CORRECTIONS (1). — Quand on fait une mesure barométrique,

(1) La nécessité des corrections relatives à l'effet de la température a été in-

on observe une différence de niveau brute L entre le mercure du baromètre et celui de la cuvette, c'est-à-dire que l'on trouve que cette différence de niveau est de L divisions d'une règle métallique dont la température est t et le coefficient de dilatation linéaire k. Chacune de ces divisions a pour longueur réelle $1 + kt$, et la différence de niveau vraie est

$$H' = L(1 + kt).$$

Pour calculer la pression P exercée par la colonne de mercure du tube, il faut multiplier la hauteur de la colonne par le poids spécifique D du mercure à t degrés dont elle est formée. Mais on est convenu d'exprimer la pression P par la hauteur H_0 de mercure à 0° qui est capable de la produire. On a

$$P = H'D = H_0 D_0,$$

et, en désignant par μ le coefficient de dilatation absolue du mercure,

$$H_0 = H' \frac{D}{D_0} = \frac{H'}{1 + \mu t} = L \frac{1 + kt}{1 + \mu t}.$$

Ce n'est pas tout, car on ne peut égaler la pression à sa valeur hydrostatique que dans le cas où les vases sont assez larges pour écarter absolument les effets capillaires, et, dans le cas des baromètres, il n'en est ainsi que si le tube a une section supérieure à $0^m,03$. Le plus souvent il sera impossible de lui attribuer une section aussi grande, et alors il devient nécessaire de corriger l'effet de la capillarité, en ajoutant à la hauteur observée une quantité c que l'on nomme la *dépression capillaire*. c représente la différence de niveau que l'on observerait dans le tube et dans la cuvette si, le tube étant ouvert, la pression atmosphérique pouvait s'exercer librement à l'intérieur et à l'extérieur du tube.

La dépression capillaire dépend, pour un même liquide, de l'angle de raccordement du liquide et du verre, aussi bien que du diamètre du tube. Or cet angle de raccordement n'est pas constant pour le mercure des baromètres, et des expériences

---

diquée pour la première fois par Amontons, en 1695 (POGG., *Geschichte der Physik*, p. 502).

exécutées par Bravais ([1]), sur des baromètres venant d'une même fabrique, montrent qu'il peut varier de 30° à 40°. Il en résulte que la flèche du ménisque peut changer notablement et la dépression capillaire être très inégale pour deux baromètres de même section, et qu'il faudra, pour avoir les éléments du calcul de correction, mesurer et le diamètre du tube et l'angle de raccordement ou la flèche du ménisque qui permet de calculer cet angle. Pour faciliter ces réductions, on a construit des Tables fondées sur les formules de Laplace. Nous citerons celles de M. Delcros, que l'on trouvera dans le Tome XIV des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*. Ne pouvant les transcrire ici, nous nous contenterons, comme exemple, de citer les résultats obtenus par Bravais, quand l'angle de raccordement a une valeur moyenne de 36° :

Rayon du tube.	Dépression c.
mm	mm
2	1,635
3	0,909
4	0,538
5	0,522
6	0,195
7	0,117
8	0,070
9	0,041
10	0,025

On a définitivement, pour calculer la hauteur barométrique vraie H, la formule

$$H = H_0 + c = L\frac{1 + kt}{1 + \mu t} + c.$$

Chacune des corrections est assez petite pour que l'on puisse négliger les quantités de l'ordre de leur produit. Il est donc indifférent d'effectuer la correction capillaire avant ou après les corrections relatives aux températures, et l'on peut simplifier la formule en effectuant la division et s'arrêtant dans le quotient aux termes qui contiennent k et μ au premier degré

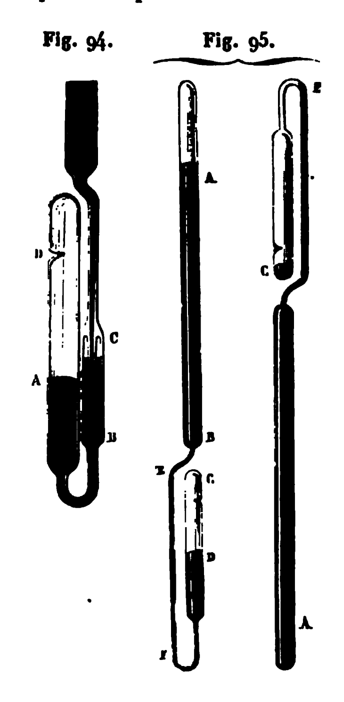
$$H = L[1 + (k - \mu)t] + c.$$

([1]) Bravais, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, t. V, p. 492.

Pour le laiton, $k = 0,000019$, $\mu = 0,00018$, et l'on se borne le plus souvent à calculer H par la formule

$$H = L(1 - 0,00016t) + c.$$

Baromètres de Gay-Lussac (1) **et de Bunten.** — La correction capillaire est relativement si considérable et si incertaine, que les physiciens ont naturellement cherché les moyens de la supprimer. C'est dans cette intention qu'ils emploient des baromètres à siphon. Voici celui de Gay-Lussac, qui est le meilleur de tous. On choisit pour le construire un tube bien cylindrique que l'on coupe en deux parties : l'une AB (*fig.* 94) qui formera le haut du baromètre, l'autre CD dont on fera la cuvette. On les réunit par un tube capillaire EF, un peu rejeté sur le côté, de façon que AB et CD, la colonne et la cuvette, soient dans le prolongement l'un de l'autre. La pression s'exerce par un trou percé à l'extrémité d'une pointe rentrante C que l'on obtient en repoussant de l'extérieur à l'intérieur le verre du tube ramolli à la lampe. Les deux niveaux étant en A et en D au moment d'une observation, il est évident que la pression capillaire doit être la même sur les deux surfaces et se détruire, à la condition toutefois que la forme des deux ménisques soit absolument la même. L'appareil peut, d'ailleurs, se transporter aussi aisément que celui de Fortin, car, si on l'incline, il s'emplit lentement et sans secousse, à cause de



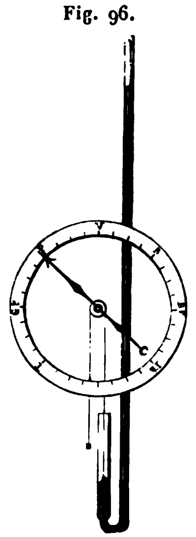
(1) Gay-Lussac. *Baromètre portatif* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. I, p. 113). — Bunten, *J. de Ch. médicale*, t. IV, p. 238; *Wiener Zeitschrift*, IIe Partie, p. 74.

l'étroitesse du tube EF, et, quand on le renverse entièrement, le mercure se partage en deux parts : l'une qui se maintient en F; l'autre qui tombe au fond de la cuvette, en C, et qui se tient au-dessous de la pointe rentrante C à travers laquelle elle ne peut s'échapper. On voit que, étant rempli complétement quand il est tenu renversé, cet instrument n'éprouvera aucune secousse pendant les transports, et que d'un autre côté le tube EF est trop étroit pour permettre à l'air de remonter dans la chambre barométrique.

Bunten a rendu cet appareil encore plus sûr en disposant sur le trajet du tube capillaire un espace dilaté CB (*fig.* 95) dans lequel le tube supérieur se prolonge. S'il arrive qu'une bulle d'air s'engage dans la colonne, elle vient se loger dans l'intervalle compris entre la pointe et le tube extérieur.

Ce baromètre est placé dans une boîte de bois que l'on ouvre et ferme à volonté, ou bien enfermé dans un tube de laiton, comme celui de Fortin. Dans tous les cas, il y a deux systèmes de fentes disposées vers les sommets supérieur et inférieur pour laisser voir les niveaux du liquide; deux verniers servent à mesurer ces niveaux, et une graduation tracée sur la monture permet de connaître leur distance. On trouve dans cet appareil les avantages du baromètre de Fortin avec une commodité de plus : il est moins lourd. On l'emploie cependant beaucoup moins souvent, et cela tient à ce que le mercure de la cuvette s'altère assez vite au contact de l'air, qu'alors les deux ménisques deviennent inégaux, et que l'erreur de la capillarité existe sans qu'on puisse ni l'apprécier ni la corriger. Cette cause d'infériorité vient justement de ce que la compensation qu'on avait en vue n'est pas réalisée.

Fig. 96.



On construit encore, pour l'ornement des maisons bien plus que pour les besoins de la Physique, des

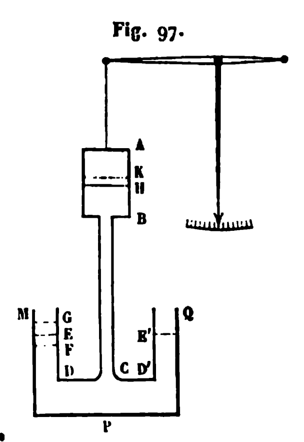
(¹) Disposition imaginée par Hooke en 1665 (Pogg., *Gesch. der Physik*, p. 583).

baromètres qui n'ont guère plus d'utilité que de précision : baromètres à cuvette large, où le niveau varie peu ; baromètres à cadran ([1]), où le mouvement du mercure se transmet par un contre-poids à une poulie qui porte une aiguille (*fig.* 96). Nous nous dispenserons de décrire ces instruments imparfaits.

BAROMÈTRE-BALANCE. — On a cherché par divers moyens à mesurer avec plus de précision la hauteur barométrique ou plutôt ses variations. On y parvient par le baromètre-balance.

Un tube vertical BC (*fig.* 97), en fer battu, est réuni à sa partie supérieure avec un tube plus large AB, fermé par le haut, et qui sert de chambre barométrique. La partie inférieure du tube porte un manchon DD'EE', ouvert par le haut et dont le rayon est un peu plus grand que celui de la chambre barométrique. Le tube et le manchon plongent dans une cuvette MPQ remplie de mercure qui s'élève à peu près jusqu'au milieu de AB. L'appareil est suspendu à l'extrémité du fléau d'une balance, et on l'équilibre à une pression moyenne. Si la pression vient à changer, le tube s'enfonce plus ou moins dans la cuvette, et l'on va voir que son déplacement est proportionnel à la variation de la pression atmosphérique.

Fig. 97.



Le système étant en équilibre, supposons que la pression varie et que le tube s'enfonce de la quantité EF $= a$; le mercure sera chassé dans le réservoir inférieur, où il s'élèvera de la quantité EG $= b$, et dans la chambre barométrique, où son élévation sera HK $= x$. La partie immergée aura donc varié de

$$y = \text{EF} + \text{EG} = a + b.$$

Dans chaque position du tube, la pression atmosphérique est toujours équilibrée, et nous pouvons considérer le tube et le mercure qu'il renferme comme formant un système solide. Soient r le rayon de la chambre barométrique, R celui du man-

chon et R′ celui de la cuvette. Le poids du tube sera augmenté de $\pi r^2 dx$ et la poussée de bas en haut de $\pi R^2 dy$, et, comme il y a équilibre, on doit avoir

$$r^2 x = R^2 y.$$

Mais la hauteur barométrique a varié de

$$h = x - y;$$

on a donc

$$y = h \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Par conséquent, la partie immergée y est proportionnelle à la variation de la pression atmosphérique. On voit de plus que R doit être plus grand que r, et que l'appareil sera d'autant plus sensible que R et r seront moins différents.

Il nous faut maintenant prouver que le niveau extérieur du mercure ne change pas. En effet, le manchon descendant de a enverrait dans la cuvette le volume de mercure $R^2 a$; mais une partie $r^2 x$ passe dans la chambre barométrique, et dans le réservoir inférieur le volume augmente de $(R'^2 - R^2)b$, de sorte que l'on a

$$(R'^2 - R^2)b = R^2 a - r^2 x.$$

Mais $r^2 x = R^2 y$ et $a = y - b$, de sorte que l'équation précédente devient

$$(R'^2 - R^2)b = - R^2 b,$$

ce qui exige que b soit nul et que le niveau du mercure reste constant dans la cuvette.

D'où il suit que $y = a$, que le déplacement vertical du tube est égal à celui de la partie immergée et qu'il est proportionnel à la variation de pression. On peut le mesurer soit directement par une graduation tracée sur le tube, soit en observant l'inclinaison du fléau.

On peut aussi suspendre le tube barométrique AB à poste fixe et faire reposer la cuvette C sur l'une des extrémités d'un fléau de balance CDE dont les déplacements sont enregistrés

sur un cylindre K enduit de noir de fumée et mû par un mouvement d'horlogerie, à l'aide d'une longue aiguille *gh* mise en

Fig. 98.



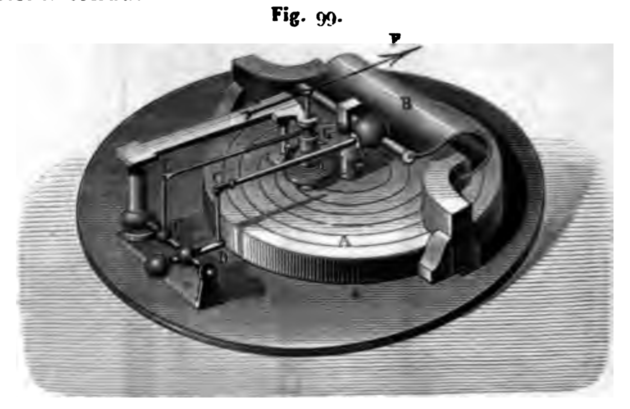
mouvement par le fléau. Ces baromètres enregistreurs (*fig.* 98) sont aujourd'hui d'un grand usage dans les observatoires.

BAROMÈTRE MÉTALLIQUE. — On emploie souvent pour la décoration des appartements ou pour les observations de voyage des appareils qui mesurent la pression atmosphérique par la déformation élastique d'une boîte close, vide d'air. Le principe en a été indiqué par Vidie, auquel on doit d'ailleurs la disposition la plus heureuse de baromètre métallique.

L'organe sensible de ce baromètre est une boîte plate A, vide

d'air (*fig.* 99), dont la face supérieure est plissée et porte en son centre un pilier métallique. On enregistre les déplacements de ce pilier à l'aide d'un ressort B très solide et d'un système de leviers articulés CDFE qui agissent sur un cordon de soie enroulé sur l'axe de la poulie G. Celle-ci porte l'aiguille F mobile sur un cadran divisé; un petit ressort antagoniste agit sur la poulie en sens contraire du cordon, de manière à le maintenir tendu.

Fig. 99.



La *fig.* 100 montre une disposition moins avantageuse, due à Bourdon. CAB est un tube en laiton de section ovale, recourbé en cercle, fixé par son milieu A, libre en B et C et dans lequel on a fait le vide; quand la pression augmente, le tube se recourbe davantage, ses extrémités B, C se rapprochent; elles s'écartent quand la pression diminue : leur mouvement, amplifié par le levier EDF et le pignon G, se transmet enfin à l'aiguille HI.

Fig. 100.



Il est nécessaire de comparer de temps à autre ces instruments au baromètre normal pour rectifier leurs indications, car le point où s'arrête l'aiguille quand la pression est de 760^{mm}

se déplace à la longue, par suite d'une déformation lente de l'organe métallique sensible.

USAGE DES BAROMÈTRES. — La recherche de toutes les modifications que subit l'atmosphère est un des problèmes qui nous intéressent le plus, et le baromètre, en nous montrant des pressions variables et en les mesurant à chaque moment, nous permet d'envisager un des côtés de la question. Aussi les météorologistes enregistrent-ils les indications de cet instrument, et voici quelques-uns des résultats généraux que l'on peut extraire de leurs observations.

Le baromètre est soumis dans chaque lieu à des oscillations continuelles; mais, en notant sa hauteur à chaque heure du jour et de la nuit et en faisant la moyenne de toutes les mesures, on a ce que l'on nomme la *moyenne du jour;* de là on passe aux moyennes des mois et de l'année de la même manière.

On trouve qu'en chaque lieu la moyenne annuelle est constante; mais elle varie d'un point à l'autre du globe, ce qui tient à deux causes, à la différence des altitudes d'abord et à celle des latitudes ensuite. La première de ces causes de variations suit des lois connues et assez bien établies pour qu'on puisse en calculer l'effet, comme nous le ferons bientôt, et réduire, comme on le dit, les observations au niveau de la mer. Quand on fait cette correction aux moyennes des divers lieux et qu'on les compare ensuite entre elles, on saisit la variation qui dépend de la latitude; or, on a remarqué que cette hauteur moyenne du baromètre augmente de l'équateur jusqu'à 36°, pour diminuer ensuite en s'éloignant vers le pôle.

Si les moyennes annuelles de chaque lieu sont constantes, il n'en est pas de même des moyennes mensuelles, qui varient dans le cours de l'année et qui sont généralement plus grandes en hiver qu'en été.

Quant aux observations faites dans la même journée, elles sont soumises à des oscillations très-régulières; ce sont les seules qui affectent le baromètre à l'équateur, où elles atteignent une valeur plus grande qu'ailleurs. Suivant M. de Humboldt, il y a deux minima, à 4^h du soir et à 4^h du matin, et ils

sont séparés par deux maxima qui se remarquent à 10h du matin et à 10h du soir. L'amplitude de l'oscillation de jour est égale à 2mm,55, celle de l'oscillation de nuit, entre 4h du soir et 4h du matin, n'étant que de 0mm,84. Les mêmes phénomènes se constatent dans toute l'étendue de la zone torride; mais, quand on arrive dans les climats tempérés, ils diminuent d'intensité et se compliquent de variations accidentelles qui les masquent. On a pu cependant, en comparant les moyennes d'un grand nombre d'observations longtemps continuées, reconnaître qu'ils existent encore et à peu près aux mêmes heures; on a même constaté que leur amplitude est variable aux diverses saisons et plus grande en été qu'en hiver.

Outre ces oscillations régulières, le baromètre éprouve des perturbations continuelles dans les climats tempérés; elles ont un remarquable rapport avec l'état du ciel, et l'on peut dire d'une manière générale que le beau temps est accompagné par une grande hauteur barométrique, tandis que la pluie tombe le plus souvent au moment d'une dépression considérable. De là un des plus fréquents usages de l'instrument, auquel on adapte une graduation spéciale qui, sans mesurer la hauteur barométrique, indique l'état de l'atmosphère (*fig.* 100). Tous ceux qui ont suivi ces indications savent qu'elles sont généralement exactes, bien qu'elles se trouvent aussi quelquefois en défaut [1]; on ne doit donc leur attribuer qu'une valeur de probabilité. Pour expliquer ce fait, Deluc admettait que la vapeur, qui est moins dense que l'air, diminue le poids de l'atmosphère d'autant plus qu'elle est plus abondante; mais la meilleure raison pour prouver que cette explication n'est pas fondée, c'est que la pluie ou le beau temps n'affectent pas le baromètre entre les tropiques, bien que la même explication n'y soit pas devenue fausse. La seule chose qu'il y ait à remarquer est une relation habituelle entre la hauteur barométrique

---

(1) Torricelli avait déjà observé cette concordance, et Otto de Guericke prédisait les tempêtes au moyen d'un baromètre à eau dans lequel il avait fait le vide par le haut à l'aide de sa machine pneumatique. Un petit personnage flotteur indiquait du doigt le temps probable sur une échelle divisée (Pogg., *Geschichte der Physik*, p. 429).

et la direction des vents qui amènent la pluie ou le beau temps.

Depuis quelques années, on étudie régulièrement la marche du baromètre dans les principales villes de l'Europe, et, en comparant les observations faites à une même époque, on peut se représenter l'état général de l'atmosphère à un moment donné; on a été conduit ainsi à la découverte d'un grand phénomène météorologique.

En général, à un moment donné, il y a sur la surface de l'Europe un point où la pression est minimum; elle augmente à mesure qu'on s'en éloigne par courbes concentriques, et l'on trouve sur ces courbes des vents tournant dans un sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Ces points de pression minimum se déplacent progressivement; ils viennent de l'Atlantique, abordent l'Europe par l'Angleterre ou la Suède, et la parcourent en quelques jours en s'abaissant soit vers l'Italie, soit vers la mer Noire. Au sud de la route suivie par ces vents tournants, le temps est pluvieux et le vent est d'ouest; il est beau au nord, avec un vent d'est.

Ces phénomènes, suivis avec persévérance par M. Fitz-Roy et M. Marié-Davy, s'exagèrent quelquefois et produisent les ouragans ou cyclones. Dans notre hémisphère, les cyclones naissent sur les bords du Gulf-Stream par des causes peu connues. Ce sont des tourbillons qui, d'abord peu étendus, croissent jusqu'à mesurer un diamètre de 500 ou 600 lieues. Ils se dirigent de l'équateur vers les Antilles avec une vitesse de propagation qui ne dépasse pas 10 ou 15 lieues; ils décrivent une courbe très-régulière. D'abord dirigés vers l'ouest, ils se retournent vers le nord et peu à peu s'infléchissent vers l'est. Au centre la pression est très-faible; elle peut descendre jusqu'à 660^{mm} et l'air y est calme. Tout autour le vent tourne en sens inverse du mouvement des montres et peut atteindre une vitesse de 50 lieues à l'heure, ce qui équivaut à une pression de 300^{kg} par mètre carré. Rien ne résiste à de si puissantes actions. Toutefois, comme le cyclone se meut du sud vers le nord, la vitesse de sa translation se combine avec celle du mouvement tournant; toutes deux sont concordantes sur la rive droite, qui est le *bord dange-*

reux; elles sont contraires à gauche, où est le *bord maniable.* On comprend la possibilité de constater l'arrivée de ces phénomènes et d'avertir à temps les contrées qu'ils doivent traverser. C'est la seule prévision du temps qui soit aujourd'hui admissible.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer l'intérêt qui s'attache aux observations barométriques en Météorologie; mais nous laissons à cette science le soin de poursuivre et de décrire ces études avec plus de détail, et nous revenons à l'usage que la Physique fait du baromètre. Il n'est guère de phénomènes dans lesquels la pression atmosphérique n'intervienne ou comme cause déterminante ou comme influence perturbatrice; dès lors il est peu d'expériences où l'on puisse se passer de consulter le baromètre. Nous en verrons un exemple prochain dans l'étude de la loi de compressibilité des gaz, et nous reconnaîtrons dans la suite que pour l'étude des dilatations des gaz, de l'ébullition des liquides, des propriétés des vapeurs et des densités, il sera nécessaire d'avoir l'indication barométrique; pour le moment, nous allons insister sur la manière dont on se sert du baromètre pour mesurer la différence d'élévation de deux lieux.

FORMULE BAROMÉTRIQUE (¹). — La question que nous voulons traiter est celle-ci : comment décroissent les pressions quand on s'élève dans l'atmosphère, et comment peut-on déduire de deux observations faites à des hauteurs différentes la différence des niveaux des deux stations?

(¹) Dans le but de déterminer la hauteur de l'atmosphère, Hooke effectua le premier un calcul qui, légèrement modifié, conduirait à la formule barométrique. Un peu plus tard (*Essai sur la nature de l'air*, 1676), Mariotte calcula la hauteur d'air nécessaire pour faire baisser le mercure de 1 ligne. Enfin Halley, en 1686, publia, dans les *Transactions philosophiques*, la première formule barométrique exacte $\left(X = A \log \frac{H}{h}\right)$; mais son Mémoire fut oublié, et ce n'est qu'en 1749 que Bouguer en fit l'application au Pérou.

La formule barométrique complète a été donnée par Laplace (*Mécanique céleste*, liv. X, chap. IV). Babinet (*Comptes rendus*, t. IX, p. 314; t. XXX, p. 309; t. LII, p. 221 et 567) a donné une formule simplifiée pour le cas où les hauteurs à mesurer ne sont pas très-grandes.

Supposons pour un instant que les couches atmosphériques soient à une température constante t, que nous les divisions en tranches très-minces ayant une épaisseur commune égale à δx, que leur distance au centre de la Terre soit exprimée par x, que la hauteur du baromètre à la distance x soit H, enfin que l'intensité de la pesanteur soit la même à toutes les altitudes. Dans la couche comprise entre les distances x et $x + \delta x$, la diminution de pression sera égale à δH; par conséquent, une étendue donnée de cette couche d'épaisseur δx aura le même poids qu'un cylindre de mercure de même base dont la hauteur est égale à δH; le rapport de la densité de cette couche d'air à celle du mercure sera donc

$$-\frac{\delta H}{\delta x}.$$

D'un autre côté, la pression dans la couche considérée est égale à H et la densité de l'air est proportionnelle à cette pression, d'après la loi de Mariotte, dont il sera question plus bas, tandis que la densité du mercure est constante. Leur rapport peut donc se représenter par CH, C étant une constante qu'il faudra déterminer; on aura, en égalant les deux expressions de la densité de l'air,

$$(1) \qquad -\frac{\delta H}{\delta x} = CH \ [1].$$

En passant à la limite, $\frac{\delta H}{\delta x}$ devient la dérivée de H considérée comme fonction de la distance x, et, en remontant à la fonction primitive, on obtient

$$H = H_0 e^{-Cx}.$$

Ce résultat montre que, si les hauteurs x augmentent comme les termes d'une progression arithmétique, les pressions H décroissent en progression géométrique.

---

(1) Quand les deux stations sont assez rapprochées pour qu'on puisse négliger la variation de la densité de l'air dans leur intervalle, on applique directement la formule (1) au calcul de δx, en remplaçant C par sa valeur approchée $\frac{1}{0^m,76}\,\frac{0,001293}{13,596}$.

Considérons en particulier deux couches à des distances x et $x+X$ dont la différence de hauteur est X; appelons H et h les pressions correspondantes. Nous aurons, en prenant les logarithmes,

$$\log H = \log H_0 - Cx \log e,$$
$$\log h = \log H_0 - C(X+x) \log e;$$

en retranchant,

$$\log H - \log h = CX \log e;$$

enfin, en remplaçant $\log e$ par le module M des Tables logarithmiques,

$$(2) \qquad X = \frac{1}{MC} \log \frac{H}{h}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer C par sa valeur, et la formule précédente permettra de trouver la différence de hauteur X quand on connaîtra les pressions H et h aux deux stations.

Nous avons représenté par CH la densité de l'air relativement au mercure, c'est-à-dire le rapport du poids de 1^{cc} d'air au poids $13^{gr},596$ d'un égal volume de mercure à 0°. Nous déterminerons dans la suite le poids d'un volume quelconque d'air; nous démontrerons qu'il varie avec la température t, avec la pression H, avec la force élastique F de la vapeur d'eau qu'il contient, et qu'il est proportionnel à l'intensité de la pesanteur au lieu où il est placé. En réunissant tous ces éléments de variation, nous trouverons que 1^{cc} d'air atmosphérique pèse, au niveau de la mer,

$$0^{gr},00129273(1 - 0,002552 \cos 2\lambda) \frac{H - \frac{3}{8}F}{(1+\alpha t)0^{m},76},$$

formule dans laquelle λ représente la latitude du lieu et α le coefficient de dilatation de l'air. En divisant cette expression par 13,596, nous aurons la densité CH de l'air par rapport au mercure, et par suite la valeur C. En substituant cette valeur

dans l'équation qui précède, nous trouverons

$$X = \frac{13{,}596 \times 0^{m}{,}76}{0{,}4342945 \times 0{,}00129273}$$

$$\times (1 + 0{,}002552 \cos 2\lambda) \frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{3}{8}\frac{F}{H}} \log \frac{H}{h}$$

$$= 18401^{m}(1 + 0{,}002552 \cos 2\lambda) \frac{1 + \alpha t}{1 - \frac{3}{8}\frac{F}{H}} \log \frac{H}{h}.$$

C'est la formule de Laplace.

Telle serait la formule barométrique si les conditions que nous avons supposées se réalisaient, c'est-à-dire si l'air avait entre les deux stations une même température t, s'il contenait la même proportion de vapeur, et aussi si l'intensité de la pesanteur n'éprouvait aucune variation entre les deux points où l'on observe. En fait, aucune de ces circonstances ne se réalise, et la formule que nous venons d'écrire devra se modifier. Heureusement toutes les corrections qu'il faudra lui faire subir seront très-petites; nous allons indiquer la marche des calculs qui restent à faire.

1° La tension F de la vapeur n'est pas la même aux deux stations, et l'on ignore la loi suivant laquelle elle varie de l'une à l'autre. Mais, comme F est très-petit, on peut sans erreur sensible négliger son influence et prendre le dénominateur $1 - \frac{3}{8}\frac{F}{H}$ comme égal à l'unité.

2° La température n'étant pas la même aux deux stations et la loi de sa variation étant inconnue, on remplace t par la moyenne $\frac{T + t}{2}$ des températures observées.

3° Le coefficient a est égal à 0,00366 ou approximativement à $\frac{4}{1000}$; dès lors, le terme $1 + at$ deviendra $1 + \frac{2(T + t)}{1000}$.

4° Il faut encore tenir compte de la variation de l'intensité de la pesanteur à mesure que l'on monte dans l'atmosphère. On connaît la loi de son décroissement, on peut donc en calculer l'effet, et l'on reconnaît qu'il se réduit à multiplier par un fac-

teur très-peu différent de l'unité le coefficient numérique de la formule.

En résumé, il ne reste plus qu'à savoir la valeur exacte de ce coefficient, et l'on voit que pour l'obtenir il faut connaître séparément beaucoup d'éléments qu'il est difficile de mesurer. Quand Laplace publia sa formule, on ne connaissait avec exactitude ni le poids de l'air ni celui du mercure. Il était dès lors plus simple d'accepter comme vraie la forme de la fonction précédente et de calculer le coefficient d'après l'ensemble de quelques observations barométriques faites à des hauteurs connues. Cette méthode donna 18393^{m} ; ce nombre diffère peu de 18401, valeur calculée ci-dessus et de 18405 qui a été adoptée depuis et que nous admettrons ; la formule barométrique définitive sera donc

$$(3)\quad X = 18405^{m}(1 + 0{,}002552\cos 2\lambda)\left[1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right]\log\frac{H}{h}.$$

Pour faire avec succès une mesure de hauteurs par ce procédé, il faudra choisir un temps calme, afin d'être assuré que l'atmosphère est aussi près que possible de son équilibre, et faire simultanément deux observations au sommet et au pied de la montagne qu'on veut mesurer. Après avoir ramené les hauteurs H et h à ce qu'elles seraient si le mercure du baromètre était à 0°, on calculera X; ces sortes de mesures sont exactes à quelques mètres près.

Quand on connaît la hauteur X d'un lieu au-dessus du niveau de la mer, et que l'on a mesuré la hauteur barométrique h, on peut se servir de la formule précédente pour calculer H, c'est-à-dire pour réduire la pression à ce qu'elle serait au niveau de la mer.

APPLICATION DU PRINCIPE D'ARCHIMÈDE AUX GAZ.

La vérification du principe d'Archimède dans le cas des gaz ne souffrirait aucune difficulté; mais on se contente le plus souvent de l'épreuve suivante, qui constate la perte de poids sans la mesurer. Prenons (*fig.* 101) une petite balance (¹)

(¹) Cet appareil, connu sous le nom de *baroscope*, a été imaginé par Otto de

dont le fléau soutient à l'un des bouts une grosse sphère de cuivre A creuse et fermée, et à l'autre une petite balle pleine, de même poids, B. On équilibre exactement ces deux masses dans l'air en faisant avancer ou reculer la plus petite au moyen d'une poulie qui la porte et qui forme un écrou marchant sur le fléau taraudé en vis; puis on place l'appareil sur le plateau d'une machine pneumatique, et, après l'avoir couvert d'une cloche, on fait progressivement le vide. On constate que la grosse sphère devient progressivement plus lourde. C'est qu'en effet A et B gagnent tous deux dans le vide le poids qu'ils avaient perdu dans l'atmosphère, B le poids d'un petit volume d'air, A celui d'un volume plus grand. C'est pourquoi A s'abaisse.

Fig. 101.



Désignons en général par d et d' les densités par rapport à l'eau de l'air et d'un corps plongé dans l'atmosphère, et par v le volume commun : vd' et vd seront le poids qui fait tomber le corps et la poussée qui le chasse de bas en haut; $v(d'-d)$ représentera leur résultante. Il y aura dès lors, comme pour les liquides, trois cas à considérer suivant que l'on aura $d'>d$, $d'=d$, $d'<d$, et le corps plongé ou tombera, ou sera en équilibre, ou enfin s'élèvera dans l'atmosphère. Cette dernière condition se réalise dans les ballons à enveloppe légère, remplie ou d'air dilaté par la chaleur, ou de gaz hydrogène. Pour calculer la force ascensionnelle, il faudra retrancher le poids p du ballon et de ses agrès de la résultante $v(d-d')$, ce qui donnera

$$v(d-d')-p$$

ou, en supposant que le volume soit sphérique,

$$\frac{4}{3}\pi R^3(d-d')-p,$$

Guericke, qui l'employait comme manomètre (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 429).

quantité que l'on calculera en se rappelant que d et d' sont les densités de l'air et de l'hydrogène par rapport à l'eau; c'est 0,001293 pour l'air et 0,0000895 pour l'hydrogène, à 0° et sous la pression moyenne de l'atmosphère.

POIDS D'UN CORPS DANS L'AIR. — Une conséquence importante au point de vue de nos expériences futures résulte de cette action de l'air : c'est que la balance ne nous donne pas le poids vrai (P) des corps que nous pesons, mais seulement la différence P entre ce poids et celui de l'air déplacé, qui est égal à vd :

$$P = (P) - vd;$$

et comme v, le volume du corps, est égal au quotient de son poids vrai (P) par sa densité D, on obtient

$$P = (P)\left(1 - \frac{d}{D}\right).$$

A la température de 0°, sous la pression moyenne de l'atmosphère, quand l'air ne contient ni vapeur d'eau ni acide carbonique, d est égal à 0,001293. Rien ne serait donc plus aisé que de passer des poids trouvés P aux poids vrais (P), si l'on connaissait la densité D de la substance étudiée et si la pesée était toujours faite dans l'air normal; mais les conditions de la pesée changent d'un moment à l'autre, car la température, la pression, la constitution chimique de l'air varient à chaque instant, et la valeur que l'on doit mettre pour d dans la formule précédente est liée à toutes les variations atmosphériques. C'est un point sur lequel nous reviendrons dans le deuxième Volume, à propos des densités.

CHAPITRE V.

ÉLASTICITÉ DES GAZ.

Loi de Mariotte. — Historique. — Expériences de Mariotte. — Expériences de Despretz, de Pouillet. — Travail de Dulong et Arago. — Recherches de Regnault. — Effet de la température. — Cas des pressions très élevées.
Applications de la loi de Mariotte. — Manomètres à air libre. — Manomètres à air comprimé. — Manomètres divers. — Voluménomètres.
Loi du mélange des gaz.
Lois de la dissolution des gaz.

LOI DE MARIOTTE. — Nous avons reconnu que les gaz sont très-compressibles, que leur volume diminue quand la pression qu'on exerce sur eux augmente, mais qu'en même temps leur température s'élève. Dans l'étude que nous allons faire de l'élasticité des gaz, nous écarterons cette dernière cause de complication, en ayant soin d'opérer la compression assez lentement pour que la chaleur produite se dissipe au dehors au fur et à mesure, ou en plongeant le réservoir à gaz au sein d'une masse d'eau assez considérable pour que l'élévation de température soit insensible.

Dans ces conditions, le volume V occupé par une masse gazeuse invariable, égale à l'unité par exemple, n'est fonction que de la pression P à laquelle elle est soumise :

$$V = f(P). \tag{1}$$

C'est à l'expérience à fixer la forme de cette fonction f.

Mariotte [1] et Boyle [2] ont les premiers énoncé une loi

---

[1] MARIOTTE, *Essai sur la nature de l'air*, 1676 (*Œuvres*, t. I; La Haye, 1740).

[2] BOYLE, *Defensio de elatere et gravitate aeris, adversus objectiones Francisci Lini*, 1661. Les expériences de Boyle se rapportent seulement aux pressions supérieures à la pression atmosphérique.

relative à la compressibilité des gaz, et l'ont démontrée expérimentalement par des expériences à peu près identiques [1]. D'après cette loi, la fonction f est de la forme

$$V = f(P) = \frac{C}{P}, \tag{2}$$

C étant une constante. On a donc

$$VP = C, \tag{3}$$

d'où l'énoncé suivant :

Quand on considère une masse déterminée de gaz à une température constante, le produit de son volume par la pression à laquelle elle est soumise est constant.

Soient V, P, V′, P′ deux couples de valeurs de la pression et du volume ; d'après l'équation (3),

$$VP = V'P'$$

ou

$$\frac{V}{V'} = \frac{P'}{P}. \tag{4}$$

Cette formule fournit un deuxième énoncé :

Le volume d'une masse gazeuse déterminée, à température constante, varie en raison inverse de sa pression.

Enfin, les densités des corps étant en raison inverse des volumes occupés par des poids égaux, on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{d'}{d}, \quad \frac{P'}{P} = \frac{d'}{d},$$

ce qui permet d'énoncer d'une troisième manière la loi qui nous occupe : *Les densités des gaz sont proportionnelles aux pressions qu'ils éprouvent.*

Nous allons maintenant rendre compte des expériences qui ont été faites sur la compressibilité des gaz.

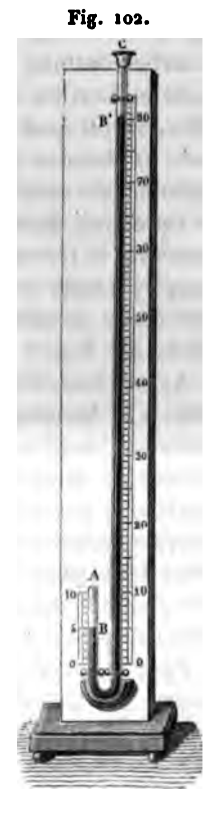
HISTORIQUE. — EXPÉRIENCES DE MARIOTTE. — Voici d'abord les

---

[1] La loi de Mariotte est connue en Angleterre sous le nom de *loi de Boyle*, en Allemagne sous le nom de *Boyle-Mariotte*.

expériences telles que les faisait Mariotte et telles qu'on les reproduit généralement dans les cours de Physique. On prend un long tube de verre fixé sur une planche verticale destinée à le soutenir (*fig.* 102). Il est ouvert à sa partie supérieure C; il se recourbe par le bas et se termine par une branche verticale fermée en A. On commence par y verser une petite quantité de mercure qui se loge au-dessous de OO et qui isole de l'atmosphère l'air contenu dans la branche fermée AO. Dans cet état initial, le volume se mesure par une graduation faite à l'avance sur le tube AO, et la pression est celle de l'atmosphère qui se transmet par le mercure. On verse ensuite de nouvelles quantités de mercure par l'entonnoir C. Quand la différence des niveaux dans les deux branches est devenue égale à la hauteur barométrique, le gaz éprouve une pression double, égale à 2^{atm}, et l'on reconnaît qu'il occupe un volume moitié moindre AB. En continuant d'ajouter du mercure jusqu'à produire des différences de niveau égales à 2, 3, 4, ... fois la hauteur du baromètre, c'est-à-dire des pressions égales à 3, 4, 5, ... atmosphères, on trouve que les volumes successifs du gaz sont $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ du volume occupé sous la pression de l'atmosphère : ces expériences établissent grossièrement la loi que nous avons énoncée.

Fig. 102.



Après avoir soumis l'air à des pressions progressivement croissantes, il faut justifier la loi quand ces pressions, au lieu d'augmenter, deviennent de plus en plus faibles. A cet effet, on choisit un tube de cristal semblable à ceux des baromètres; on le ferme à l'un des bouts et l'on trace sur toute sa longueur une division en millimètres; puis on le jauge avec soin en versant successivement dans l'intérieur des poids égaux de mercure. La première quantité introduite affleure à la division *n*,

la deuxième à n', la troisième à n''; on note ces nombres, et l'on conclut que les capacités intérieures, correspondant à n, $n+n'$, $n+n'+n''$ ... divisions, varient comme les nombres 1, 2, 3,.... On peut ensuite, en traçant graphiquement une courbe continue dont les abscisses expriment les divisions du tube et dont les ordonnées représentent les capacités mesurées, savoir quel est le volume compris entre l'extrémité fermée et chacune des divisions marquées à l'avance sur le verre. Quand cette opération préliminaire est terminée, il faut remplir le tube avec du mercure, comme si l'on voulait en faire un baromètre, le renverser en AB dans une cuvette B qui est prolongée inférieurement par un long tube C (*fig.* 103), et y introduire ensuite, au moyen d'un tube abducteur, le gaz desséché sur lequel on veut expérimenter.

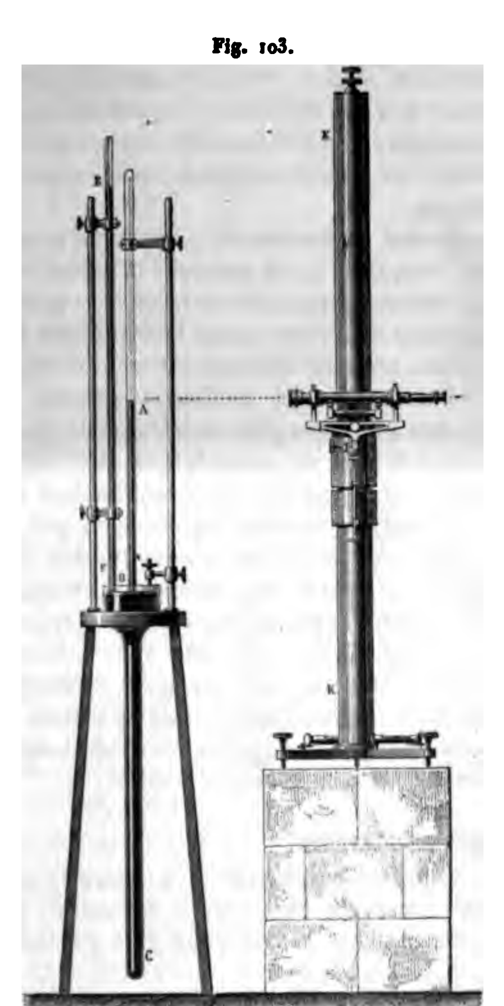
Avant l'introduction du gaz, le mercure se soutient dans le tube à la hauteur barométrique; après cette introduction, il s'abaisse jusqu'en A d'une quantité qui mesure la pression P, et le volume du gaz est donné par la division vis-à-vis de laquelle s'arrête le niveau A. On peut commencer par abaisser le tube jusqu'à mettre le mercure au même niveau à l'extérieur et à l'intérieur, puis le relever peu à peu et mesurer à chaque fois le volume V et la pression P. Le produit de ces deux quantités devra rester constant.

Pour mesurer exactement la dépression du mercure, on dresse sur la même cuvette un baromètre immobile EF; au moyen d'un cathétomètre KK disposé en face de l'appareil, on vise les sommets du mercure dans les deux tubes et l'on prend la différence de leurs hauteurs : cette différence exprime la pression du gaz confiné.

Nous venons de dire comment on doit exécuter ces expériences quand on veut les rendre précises; malheureusement, quand Mariotte les a faites, il n'a pris aucune des précautions que nous avons indiquées; il n'a pas tenu compte de l'inégalité probable du calibrage des tubes, qu'il supposait cylindriques, ni des variations de la température, qui changeait d'un moment à l'autre, et il a mesuré les hauteurs des niveaux par les procédés imparfaits que l'on connaissait de son temps; de plus, il s'est contenté de faire varier les pressions entre des limites peu

étendues. On a bientôt senti la nécessité de reculer ces limites et de ne négliger dans un sujet de cette importance aucun des

Fig. 103.



soins minutieux qu'il exige; nous allons parcourir les travaux des physiciens sur cette matière.

Les premiers, par ordre de date, sont nécessairement les

plus imparfaits ; aussi y voyons-nous des contradictions qui prouvent leur peu d'exactitude. Pendant que Boyle et Musschenbroek ([1]) trouvent que la compressibilité diminue avec la pression, Sulzer ([2]) annonce qu'elle augmente et que, quand la pression atteint 7^{atm}, la densité de l'air a augmenté dans le rapport de 1 à 8. Robison ([3]), ayant opéré sur l'air sec, humide ou camphré, crut reconnaître une compressibilité plus grande encore ; ces divers résultats ne méritent point que nous nous y arrètions.

En 1826, Œrsted et Swendsen ([4]) reprirent la question avec plus de soin. Jusqu'à 8^{atm}, ils suivirent la même méthode que Mariotte et admirent l'exactitude de la loi, bien que les nombres qu'ils ont obtenus s'accordent pour indiquer une compressibilité plus grande ; mais ils attribuèrent les différences aux erreurs de l'observation. Ils voulurent ensuite étendre les recherches à des pressions plus considérables, et, pour y parvenir, ils employèrent un procédé qui était loin d'offrir les mêmes garanties d'exactitude. Ils comprimaient de l'air dans un canon de fusil, mesuraient sa pression par l'effort qu'il exerçait sur une soupape chargée et sa densité par l'augmentation du poids que le tube recevait après l'introduction du gaz. Ces nouvelles expériences furent continuées jusqu'à 68^{atm} et se trouvèrent en concordance suffisante avec la formule de Mariotte ; elles étaient assez exactes pour montrer que la loi s'étend approximativement jusqu'à des pressions fort élevées, mais elles n'avaient pas le degré de précision voulu pour constater les petites perturbations, s'il y en a.

EXPÉRIENCES DE DESPRETZ ([5]). — Les choses en étaient là, et la loi de Mariotte était admise par tout le monde comme rigoureuse, quand Despretz envisagea la question à un point de vue tout à fait nouveau et beaucoup plus général. Sans avoir

---

([1]) MUSSCHENBROEK, *Cours de Physique*, traduit par Sigaud de Lafont. Paris, 1759, t. III, p. 142.

([2]) SULZER, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753, p. 116.

([3]) ROBISON, *Systeme of mech. Philosophy*, t. III, p. 637.

([4]) ŒRSTED et SWENDSEN, *Edinburgh Journal of Science*, t. IV, p. 224.

([5]) DESPRETZ, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 2e série, t. XXXIV, p. 335 et 443.

l'intention de vérifier ou d'infirmer la loi, il voulut savoir si tous les gaz obéissent à une règle commune, ou bien s'ils possèdent des compressibilités différentes quand ils sont soumis à des pressions égales. Ses expériences étaient disposées de manière à comparer les diminutions de volumes de plusieurs gaz placés à la fois dans des conditions identiques.

Il plongeait (*fig.* 104) dans une cuvette commune pleine de mercure des tubes cylindriques de même hauteur; il y introduisait, jusqu'à un même niveau, les gaz qu'il voulait étudier et il enfermait l'appareil ainsi préparé dans un vase en verre résistant E (*fig.* 105) qui était plein d'eau et qui se fermait par un piston à vis. En augmentant progressivement la pression, Despretz vit le niveau du mercure monter dans chaque tube, mais y monter inégalement. L'acide carbonique, l'hydrogène sulfuré, l'ammoniaque et le cyanogène se comprimaient plus que l'air. L'hydrogène éprouva un effet opposé; il se conduisit comme l'air jusqu'à 15^{atm}, mais à des pressions plus élevées, il conserva un volume plus grand et conséquemment il se comprimait moins.

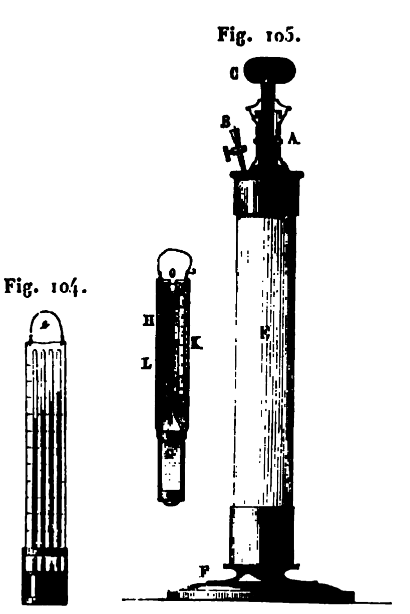


Fig. 104.

Fig. 105.

Ces expériences, où les erreurs sont à peu près impossibles, puisqu'elles prennent les gaz dans des conditions identiques pour ne montrer que la différence des effets qu'ils éprouvent, établissaient, avec autant de simplicité que d'évidence, que chaque gaz possède une loi spéciale de compressibilité, et que la formule énoncée par Mariotte n'est qu'approximative. Du moment qu'elle n'était pas réalisée par tous les fluides élas-

tiques, on put avoir des doutes fondés sur son exactitude absolue en ce qui concerne l'air, puisque ce gaz eût été seul doué de cette propriété remarquable.

EXPÉRIENCES DE POUILLET. — Depuis cette époque, Pouillet [1] a rendu ces épreuves différentielles plus faciles en construisant un appareil qui permet de les continuer jusqu'à des pressions énormes. Il fit faire un vase cylindrique en fonte C (*fig.* 106), ouvert à son sommet par une tubulure A qui est alésée, garnie de cuir, et dans laquelle peut s'enfoncer à frottement un piston plein AC qui la bouche hermétiquement. La tige de ce piston est taraudée; elle prend son point d'appui dans un écrou B qui est fixe, et se termine par une poignée horizontale DD qui sert à la mettre en mouvement. Quand on la tourne, on fait enfoncer ou relever le piston, et l'on détermine dans le vase des pressions plus ou moins grandes. Le réservoir A est réuni par sa base avec une pièce de fonte E qui est creuse et dans laquelle sont mastiqués et serrés par des écrous deux tubes de cristal F et G gradués avec soin, effilés par le haut et ouverts dans l'air.

Fig. 106.



Quand on veut employer l'appareil, on y verse du mercure, on achève de le remplir avec de l'huile, on y engage le piston que l'on fait descendre, et le mercure s'élève peu à peu jusqu'au

[1] POUILLET, *Éléments de Physique*, 4e édit., t. I, p. 327.

sommet des deux tubes. A ce moment, on met l'un d'eux en rapport avec une cloche pleine du gaz que l'on veut essayer, pendant que l'autre reste ouvert dans l'atmosphère par l'intermédiaire d'un tube à dessiccation. Il suffit ensuite de relever un peu le piston pour faire descendre lentement le mercure dans les tubes, et les emplir celui-ci d'air sec, celui-là du gaz que la cloche contenait, tous deux à la pression de l'atmosphère. On les ferme avec un coup de chalumeau, et l'expérience est préparée. En abaissant ensuite le piston, on peut comprimer les deux gaz jusqu'à 100^{atm}; on pourrait même aller plus loin sans la crainte de voir les tubes se séparer du réservoir ou se briser en éclats. Les expériences de Pouillet ont confirmé ce que Despretz nous avait appris, c'est-à-dire l'inégale compressibilité des divers gaz.

EXPÉRIENCES DE DULONG ET ARAGO (1). — Il ne fallait donc plus songer à voir dans la formule de Mariotte l'expression rigoureuse de la compressibilité des gaz; tout au plus pouvait-on croire qu'elle s'applique à l'air, et il devenait nécessaire de soumettre ce corps à une étude plus attentive, puisque c'est à lui que l'on a, jusqu'à présent, comparé tous les autres gaz. L'occasion de cette étude se présenta bientôt.

Dulong et Arago, ayant été chargés de mesurer les forces élastiques de la vapeur d'eau à des températures élevées, furent amenés à étudier préalablement la loi de Mariotte; ils le firent avec des appareils qui dépassaient en étendue et aussi en précision ceux que les physiciens avaient jusqu'alors construits. Nous devons les décrire avec quelque détail, quand ce ne serait que pour les opposer aux instruments plus grossiers de Mariotte et pour montrer tout le chemin que Dulong et Arago avaient fait faire à l'art de l'expérimentation. Ils ne changèrent rien à la méthode de Mariotte : l'air était encore contenu dans une branche verticale fermée et recevait toujours la pression d'une longue colonne de mercure soutenue dans une série de tubes ouverts par le haut; mais, s'il ne différait

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* et *Ann. de Chim. et de Phys.*, 2e série, t. XLIII, p. 74.

pas en principe, l'appareil, comme on va le voir, avait été remarquablement perfectionné.

On installa les instruments dans une vieille tour carrée qui existe encore au milieu des bâtiments du lycée Henri IV. Trois voûtes percées à leur centre en divisent la hauteur en parties à peu près égales. On dressa, dans cet espace central, un arbre de sapin (RR, *Pl. I, fig.* 1) formé de madriers solidement assemblés et rattachés par des liens de fer aux voûtes et à l'ancienne charpente de l'édifice. C'est contre cet arbre que furent établis verticalement treize tubes de cristal de 2^m. Ils étaient réunis entre eux (*Pl. I, fig.* 5) par des viroles de fer que serrait un écrou, et on les empêchait de ballotter en les faisant passer dans des fourchettes fixées A qui les tenaient étroitement embrassés. Ils étaient en outre soutenus par des cordes BDC (*Pl. I, fig.* 1) passant sur des poulies D, et tendues au moyen de seaux C chargés de grenaille de plomb. Par cette ingénieuse disposition, chaque tube avait été séparément équilibré, et la colonne tout entière, soutenue par treize systèmes de contre-poids, était parfaitement libre, malgré sa longueur de 26^m. Il suffisait de la soulever légèrement par le bas pour la voir s'élever tout entière. Elle pouvait conséquemment se dilater ou se raccourcir quand la température variait, sans que l'on eût à craindre des flexions qui l'auraient courbée ou des ruptures qui auraient pu survenir si les tubes avaient pesé l'un sur l'autre. Telle était la colonne qui devait contenir le mercure et par où devait s'exercer la pression; décrivons maintenant le tube manométrique *pq* (*Pl. I, fig.* 1) où l'air sera comprimé.

On avait choisi, pour le former, un tube de cristal bien régulier fermé par un bout et qui avait près de 2^m de longueur, car plus la colonne d'air sera grande, mieux on appréciera ses variations de volume. Pour le graduer, il aurait été utile de tracer des divisions sur sa surface; mais on y renonça, craignant de diminuer sa solidité. On se contenta de l'appliquer contre une règle de cuivre divisée NN, munie d'un vernier K, et, pour être sûr qu'elle ne se déplaçait pas, on colla aux deux extrémités du tube des bandes minces d'étain qui devaient servir de repères; le tube fut ensuite jaugé avec du mercure, comme nous l'avons expliqué en détail page 187-188.

Il fallait, pour compléter l'appareil, placer verticalement le manomètre pq à côté de la longue colonne de tubes AG et réunir ces deux parties par un canal de communication; mais on ne pouvait songer à se contenter de la disposition qui suffisait à Mariotte et à verser par les tubes ouverts, d'une hauteur de 26^{m}, le mercure qui devait comprimer l'air. Voici ce à quoi Dulong et Arago se sont arrêtés. Ils ont scellé sur le sol de l'édifice, en face du mât, un réservoir de fonte épaisse (*Pl. I, fig.* 1); il se composait d'un cylindre central E et de deux tubes latéraux opposés qui se recourbaient verticalement et se terminaient par deux tubulures F et G. Le manomètre était engagé dans l'une d'elles F; les tubes plongeaient dans l'autre G, et ils y étaient scellés et mastiqués avec toute la solidité que l'on put obtenir. C'est cet appareil qui établissait la communication, et il avait encore un autre but : c'était par son intermédiaire que l'on faisait varier les pressions, comme nous allons l'expliquer. On y versa du mercure, on acheva de le remplir avec de l'eau, et l'on surmonta la tubulure centrale d'une petite pompe foulante I; celle-ci puisait de l'eau dans un vase voisin V, l'injectait dans le réservoir E, et le mercure, comprimé par l'introduction de cette eau, s'élevait à la fois dans le manomètre, où il réduisait le volume de l'air, et dans la colonne des tubes, où il montait librement. Il n'y avait donc qu'à mesurer la différence des niveaux et le volume occupé par l'air, à faire varier progressivement l'un et l'autre, et à chercher ensuite si le produit du volume par la pression demeure constant.

Pour mesurer la hauteur du mercure dans la branche libre, on se servait de règles divisées HP munies de verniers O que l'on transportait de bas en haut, et qu'on appliquait contre chaque tube sur des repères fixés aux tubulures de jonction, comme on le voit en H (*Pl. I, fig.* 5). D'autre part, on observait dans le manomètre, au moyen du vernier K, la division de la règle vis-à-vis de laquelle s'arrêtait le niveau; on connaissait de cette façon et le volume de l'air et les hauteurs des deux colonnes de mercure. Enfin, on voit dans la figure que ce manomètre était entouré d'un large tube de verre NN où coulait constamment un filet d'eau venu des fontaines publiques et

qui le maintenait à une température toujours égale. On avait d'ailleurs desséché avec soin l'air dont ce manomètre était rempli, par un procédé assez complexe que nous nous dispenserons de rapporter.

Il ne nous reste plus qu'à faire connaître les résultats de ces expériences. Dulong et Arago ont exécuté trois séries différentes d'observations; dans chacune d'elles, ils prenaient le gaz à la pression initiale de l'atmosphère, ils le comprimaient ensuite progressivement, et après chaque augmentation de pression ils mesuraient le volume et la différence de niveau. Dans chaque série, les expériences ont été poussées jusqu'à 27^{atm}. Pendant l'une d'elles, la température s'est maintenue constante et égale à 13° : c'est la meilleure de toutes, et nous la transcrivons dans le Tableau suivant. La première colonne contient les pressions mesurées ; dans la deuxième sont inscrits les volumes que le gaz occupait, exprimés en divisions du tube ; on verra dans la troisième les mêmes volumes calculés par la loi de Mariotte supposée exacte, et l'on peut comparer les résultats de l'observation et du calcul en lisant la dernière colonne, qui contient leurs différences.

PRESSION.	VOLUME OBSERVÉ.	VOLUME CALCULÉ.	DIFFÉRENCES.
c 76,000	501,3	"	"
361,248	105,247	105,470	− 0,223
375,7 8	101,216	101,412	0,196
462,518	82,286	82,380	0,094
500,078	76,095	76,198	− 0,103
573,738	66,216	66,417	− 0,201
859,623	44,308	44,325	− 0,017
999,236	37,851	38,132	− 0,281
1262,000	30,119	30,192	0,073
1324,506	28,664	28,770	− 0,106
1466,736	25,885	25,978	− 0,093
1653,49	22,968	23,044	− 0,076
1658,44	22,879	22,972	− 0,093
1843,85	20,547	20,665	− 0,118
2023,666	18,833	18,872	− 0,039
2049,868	18,525	18,588	− 0,063

Si l'on a comparé attentivement les nombres qui, dans ce Tableau, expriment les volumes calculés et observés, on a reconnu qu'ils sont très-près d'être égaux entre eux. Il faut donc conclure que la compression vraie de l'air ne diffère que très-peu de la compression calculée par la formule de Mariotte, si toutefois elle en diffère; mais c'est là tout ce que l'on doit conclure, car, les différences n'étant pas nulles, il faut, ou bien qu'elles indiquent une inexactitude de la loi, ou bien qu'elles soient introduites dans les résultats par les erreurs que l'on a commises dans les mesures. C'est ici le lieu de rappeler quelques idées générales que nous avons développées précédemment et de les confirmer par l'exemple actuel.

Puisque, d'une part, il est impossible d'exécuter des mesures parfaites, il faut faire la part des erreurs, et puisque, d'un autre côté, les différences que nous avons inscrites sont très-faibles, il est permis de croire qu'elles eussent été nulles si les expériences avaient été meilleures, et d'accepter la loi comme étant exacte : c'est ainsi qu'ont raisonné et conclu Dulong et Arago. Ils étaient d'autant plus portés à le faire, que les savants de cette époque croyaient à une prétendue simplicité des lois de la nature et supposaient que les phénomènes obéissent à des règles générales pouvant toujours être exprimées par des expressions mathématiques peu complexes. Cette opinion préconçue, qu'ils justifiaient par des exemples, leur avait fait prendre l'hobitude de considérer une loi physique comme *démontrée* aussitôt que l'on avait exécuté quelques mesures qui ne s'en écartaient pas trop et de mettre invariablement sur le compte des erreurs de l'observation les différences qu'ils observaient : c'est sous l'influence de cette opinion et de cette habitude que Dulong et Arago ont conclu.

Cette manière de raisonner pèche par la base. Il n'y a aucune raison pour croire que la formule de Mariotte soit rigoureusement exacte; au contraire, il y a de grandes probabilités pour penser que, n'étant point réalisée par tous les gaz indistinctement, elle ne l'est par aucun d'eux en particulier, et cela est d'autant plus probable pour l'air, que, si l'on y regarde de plus près, on voit que tous les volumes observés sont plus petits que les nombres calculés par la loi, et que la compressibilité vraie pa-

raît plus grande que la compressibilité théorique. Conséquemment, les différences trouvées doivent tenir à la fois et aux erreurs des mesures et à l'inexactitude probable ou au moins possible de la formule, sans que l'on puisse démêler les influences de ces erreurs et de cette inexactitude.

Le travail de Dulong et Arago fit époque, car il réalisait de nombreux progrès sur ceux qui l'avaient précédé; il ne devait cependant pas rester le dernier mot de la science, et la précision, toute remarquable qu'elle soit, qui a rendu les expériences de Dulong si célèbres, ne devait pas être la limite à laquelle on dût s'arrêter. Regnault a recommencé ces études; nous allons exposer ses recherches, et l'intérêt que nous avons trouvé à suivre le développement de l'art expérimental dans le travail précédent va se continuer quand nous verrons se perfectionner encore les méthodes et les instruments de mesure.

EXPÉRIENCES DE REGNAULT ([1]). — L'appareil que Regnault fit construire (*Pl. I, fig.* 2) fut installé dans une tour que Savart avait autrefois fait construire au Collège de France; il avait la plus grande ressemblance avec celui de Dulong et Arago. Nous nous attacherons surtout à signaler les différences qui existent entre les deux instruments et à montrer l'importance des modifications qui ont été introduites dans le dernier.

Le réservoir à mercure reposait sur une base maçonnée à une petite distance du sol et contre le mur; il se composait encore d'un cylindre de fonte E surmonté d'une pompe foulante à eau P qui aspirait l'eau dans un vase extérieur V et qui la laissait échapper par un tube à robinet quand on voulait diminuer la pression. Il n'y avait à la base qu'un seul conduit latéral FG, qui était muni de deux tubulures F et G, dans les-

---

([1]) Les recherches de Regnault sur la compressibilité des gaz sont contenues dans les t. XXI et XXVI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, qui forment les t. I et II de la *Relation des expériences entreprises pour déterminer les lois et données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur*. Le *Mémoire sur la compressibilité des fluides élastiques*, t. I, p. 329, contient les principales expériences. Les autres sont exposées dans la troisième Partie du *Mémoire sur les chaleurs spécifiques des fluides élastiques*, t. II, p. 229.

quelles on engageait le manomètre et la série des tubes ouverts. On y avait ajouté un gros robinet H, qui pouvait ouvrir et fermer la communication entre les tubes manométriques et le réservoir; ce robinet était indispensable. En effet, quand on a comprimé l'eau dans le réservoir et obtenu la pression sous laquelle on veut observer, il est difficile de la maintenir constante, parce que le liquide tend sans cesse à s'échapper entre les parois de la pompe et le piston. Par suite, les niveaux des deux colonnes de mercure s'abaissent graduellement et la mesure ne peut se faire exactement; mais, en fermant le robinet H, on sépare du réservoir le manomètre et les tubes, et les fuites de la pompe n'ont plus aucune action sur l'appareil. C'était là une première modification qui avait son utilité.

En face de ce réservoir et au-dessus de lui s'élevait verticalement une épaisse planche de sapin, reliée solidement au mur; elle était destinée à supporter les tubes de cristal superposés. Pour réunir ceux-ci l'un à l'autre, Regnault a imaginé un système de raccord extrêmement simple, qui fut ensuite appliqué à beaucoup d'autres appareils et qui mérite d'être décrit ici, à cause de son emploi général : c'est le collier à gorge (*Pl. I, fig.* 3). Les deux extrémités de deux tubes que l'on veut réunir sont mastiquées dans deux viroles de fer AA, A′A′, coniques extérieurement, terminées par deux bases horizontales planes qui se regardent et sont séparées par une rondelle annulaire de cuir graissé : il suffira, pour fermer la jonction des deux tubes, de presser ces deux viroles l'une contre l'autre. On y parvient en les embrassant l'une et l'autre dans un collier MM creusé intérieurement d'une gorge évidée, dont les bords supérieur et inférieur appuient sur les surfaces coniques des deux viroles. Ce collier, représenté en coupe et en perspective (*Pl. I, fig.* 3), est formé de deux parties articulées en C et qui se rapprochent ou s'éloignent par l'effet d'une vis DE; quand on serre cette vis, les bords de la gorge pressent les deux cônes opposés des viroles, qui se rapprochent et ferment l'intervalle qui les sépare. Ce système permet de monter ou de démonter promptement tout l'appareil.

Il fallait ensuite soutenir les tubes sur la planche de sapin. On se rappelle que Dulong et Arago avaient inventé dans ce

but un système de contre-poids ingénieux; Regnault ne l'a pas employé. Il avait tout simplement fixé, sur la planche, des tasseaux de chêne contre lesquels il appuyait les tubes par des brides de cuivre minces, serrées par des vis à bois. En résumé, l'effet des deux dispositifs est le même, car ces brides suspendent isolément les tubes sans les empêcher de glisser verticalement et de s'élever ou de s'abaisser, si la température les dilate ou les contracte. Il n'y eut jamais de rupture, et, s'il se fit des flexions, le système employé pour mesurer les hauteurs était tel, qu'elles n'avaient point d'effet.

Nous arrivons à dire comment ces mesures des hauteurs étaient faites : sur ce point il y avait dans l'appareil de Regnault une grande supériorité. On avait tracé sur les tubes des repères très-fins, à des distances sensiblement égales à $0^m,95$, numérotés 0, 1, 2, ..., et au-dessous de chacun d'eux on avait scellé dans le mur, depuis la base jusqu'au sommet, des tenons BB, B′B′, ... Des paliers en fer ABC (*Pl. I, fig.* 4) pouvaient être accrochés dans ces tenons. On plaçait l'un d'eux au-dessous du repère inférieur 0, on y déposait un cathétomètre, et l'on mesurait la distance verticale des deux traits 0 et 1. On transportait ensuite le palier au-dessous du repère 1 pour chercher de la même manière la différence des niveaux 1 et 2, et, en continuant la même opération jusqu'au sommet de la tour, on relevait, une fois pour toutes, les hauteurs de tous les repères. Quand, dans une expérience, le sommet du mercure s'était arrêté à un point fixe, on plaçait le palier au-dessous de lui, on mesurait la hauteur de ce point au-dessus du repère inférieur, et, cette hauteur étant ensuite ajoutée à celle du repère lui-même, on obtenait la longueur verticale de toute la colonne mercurielle soulevée.

Malheureusement la hauteur totale de la tour n'était que de 9^m, et trois tubes suffisaient pour atteindre le sommet; comme ce n'était point assez dans les expériences que Regnault se proposait de faire, il continua la colonne de tubes le long d'un mât formé d'un madrier de sapin solide, qui était superposé à la tour, soutenu par des jambes de force sur la muraille et rattaché par des haubans opposés aux parties supérieures de l'édifice. La colonne des tubes fut ainsi prolongée jusqu'à 30^m;

mais, comme il n'était plus possible d'employer le même système de repères ni de mesurer les distances au cathétomètre, on avait à l'avance divisé chacun des tubes en millimètres avec la machine à diviser, et les traits, tracés au burin, avaient été ensuite gravés à l'acide fluorhydrique. La régularité de la division avait été vérifiée au cathétomètre, et, quand les tubes furent montés et réunis l'un à l'autre, on prit soin de mesurer la distance comprise entre les traits des deux extrémités contiguës de chaque couple de tubes. Nous avons dû décrire en détail toute cette disposition, dans le seul but de montrer que la colonne de mercure sera toujours estimée avec une précision qui dépasse certainement un demi-millimètre, quelle que soit sa longueur. On sait dès lors quelle est l'étendue des erreurs que l'on pourra commettre, et cela sera d'une extrême importance quand on voudra tirer des conclusions après avoir fait les expériences.

Pour terminer ce qui nous reste à dire au sujet de cette longue suite de tubes, il faut faire remarquer qu'il était nécessaire de pouvoir se transporter aisément à toutes les hauteurs de l'édifice pour y installer le cathétomètre et y faire les observations. Regnault avait complété son appareil en faisant disposer en avant des tubes une espèce de chemin de fer vertical avec une crémaillère fixée aux rails; un siége qui glissait entre ces rails portait un pignon denté, engrené avec la crémaillère, et l'observateur assis sur ce siége, équilibré par un système de poulies et de contre-poids, pouvait, en manœuvrant une manivelle qui était à sa portée, s'élever ou s'abaisser lui-même, se fixer au point où sa présence était nécessaire, placer et régler son cathétomètre, faire ses observations et les écrire sur un pupitre disposé auprès de lui ; un siége semblable courait le long du mât, quand il était utile d'aller jusque-là.

Jusqu'à présent nous n'avons parlé ni du manomètre ni de la manière de l'observer : c'est ici surtout que nous allons signaler une modification essentielle. La méthode de Mariotte, celle que Dulong et Arago ont suivie, offre un inconvénient très-grave sur lequel il faut insister. On apprécie le volume de l'air en mesurant sa longueur sur une règle divisée, avec une précision qui est toujours la même; l'erreur que l'on commet

est donc indépendante du volume occupé par le gaz, qu'il soit grand ou petit. D'autre part, ce volume diminue progressivement quand les pressions s'élèvent; au commencement des expériences, il remplit une longueur de 2^m, et à 30^{atm} il est réduit à $\frac{1}{15}$ de mètre : il en résulte que l'erreur est une portion insensible du volume total quand il est considérable, mais qu'elle en devient une fraction de plus en plus grande quand il diminue de plus en plus. On voit que le procédé perd de sa sensibilité quand la pression augmente, et c'est justement à ce moment qu'il aurait fallu vérifier la loi de Mariotte avec plus de précision. La méthode était donc mauvaise : il fallait la changer.

Au lieu de fermer le manomètre en scellant son extrémité supérieure, Regnault y adapte un robinet C travaillé avec un soin extrême, et qui communique par un tube *ccc* avec un réservoir en cuivre I dans lequel on a comprimé d'avance, par l'intermédiaire du conduit JJJ et au moyen d'une pompe foulante à deux corps, le gaz que l'on veut étudier. La capacité intérieure du manomètre est divisée en deux parties sensiblement égales (*Pl. I, fig.* 2), l'une comprise entre le robinet C et un point de repère A placé au milieu du tube, et l'autre contenue entre le même point A et un second repère D. Quand on veut opérer, on ouvre le robinet C jusqu'à ce que le gaz qui arrive du réservoir ait fait descendre le mercure jusqu'au point D; alors on ferme C, et le gaz occupe un volume CD ou V_0 sous une pression initiale P_0 que l'on mesure. Ensuite on fait jouer la pompe foulante à eau P, et l'on augmente ainsi la pression jusqu'au moment où le niveau du mercure affleure en A; alors le volume est réduit à la moitié CA ou V_1 de ce qu'il était primitivement, la pression a pris une autre valeur P_1, et l'on cherche si P_0V_0 est égal ou non à P_1V_1. Toutes les expériences se font de la même manière, quelle que soit la pression initiale P_0, et, la réduction de volume étant toujours la même, la sensibilité des mesures reste invariable, quelles que soient les pressions.

On donna au manomètre une longueur de 3^m; il fut divisé en millimètres dans toute sa longueur; cette division, faite à l'acide fluorhydrique, ne pouvait diminuer sa solidité. Pour le jauger, on le fixa provisoirement par son extrémité D dans un robinet à trois voies, et, après l'avoir rempli de mercure jus-

qu'en C, on laissa écouler ce liquide d'abord jusqu'en A, ensuite jusqu'en D, et le rapport des poids p_1 et p_0 du mercure recueilli fit connaître le rapport des volumes V_1 et V_0. Le tube fut ensuite établi à demeure dans la tubulure F du réservoir; il fut entouré d'un manchon de verre que l'on maintenait plein d'eau, et qui conservait une température constante; des thermomètres sensibles étaient placés dans le manchon à diverses hauteurs (¹).

Tel fut, dans tous ses détails, l'appareil de Regnault; il réalisait deux perfectionnements essentiels : premièrement, il mesurait la pression à un demi-millimètre près ; secondement, il remplaçait une méthode mauvaise par une autre qui assure à l'appareil une sensibilité indépendante de la pression. Pour résumer tous les détails auxquels nous avons été conduits et montrer avec quelle régularité se faisaient les expériences, nous allons en décrire une. Après avoir à l'avance comprimé dans le réservoir I le gaz bien desséché que l'on veut étudier, on l'introduit dans le manomètre en ouvrant le robinet C, jusqu'à faire affleurer le mercure en D. Pour arriver exactement à ce point, on utilise le gros robinet H. Cela fait, on ferme C et H : le volume est V_0, et l'on se prépare à mesurer la pression initiale P_0. L'observateur chargé de relever les hauteurs s'élève jusqu'au niveau du mercure, emmenant avec lui son cathétomètre; il le place sur le palier, le règle, et, après avoir visé le dernier repère, il note sa hauteur sur l'échelle du cathétomètre. Élevant ensuite la lunette jusqu'au niveau du mercure, il se prépare à observer. Tout étant ainsi disposé, chaque aide commence ses mesures à un signal donné par un coup de sonnette. L'un examine le baromètre, un autre mesure la température de l'eau du manchon et de l'atmosphère, et un troisième observe la position du mercure dans le manomètre. Pendant ce temps, l'observateur qui s'est élevé sur le siége lit la hauteur du sommet de la colonne soulevée, et toutes ces observations

(¹) La *fig.* 2 de la *Pl. I* représente l'appareil de Regnault, tel qu'il a été installé dans le laboratoire de l'École Polytechnique. On y voit, outre les parties qui ont été précédemment décrites, d'autres pièces qui se raccordent au réservoir I par le robinet L ; celles-ci servent à d'autres expériences que nous ferons connaître dans la suite.

faites à la fois sont inscrites avec un même numéro d'ordre sur des cahiers séparés, pour être ensuite réunies et calculées. On passe ensuite à la deuxième phase de l'expérience. En ouvrant le robinet H et injectant de l'eau dans le réservoir, on réduit le volume de l'air jusqu'au repère A, ce qui fait monter le sommet du mercure dans la colonne libre; après quoi on ferme le robinet H et l'on recommence de la même manière les mêmes observations que dans la phase primitive.

Les mesures faites et enregistrées, tout n'était point dit encore, car il y a des causes d'erreur. La plupart d'entre elles pouvaient être négligées par Dulong et Arago, parce qu'elles étaient plus petites que l'erreur probable de leurs mesures; mais, à cause de l'extrême précision de la nouvelle méthode, elles cessaient d'être négligeables : nous allons les calculer et les corriger.

CORRECTIONS. — 1° Dans toutes les expériences, il fallait ajouter à la pression de la colonne mercurielle celle que l'atmosphère exerce à son sommet : or la pression atmosphérique diminue quand on s'élève; il fallait donc ajouter, non pas la hauteur barométrique h observée sur le sol du laboratoire, mais la hauteur h' que l'on eût trouvée en plaçant la cuvette de l'instrument au niveau du sommet du mercure. On calculait h' par la formule connue

$$z_1 - z_0 = 18405 \log \frac{h}{h'}.$$

$z_1 - z_0$ exprime la hauteur du sommet mercuriel dans les tubes au-dessus du point zéro du baromètre.

2° Une autre cause d'erreur résulte de la compressibilité du mercure. La colonne qui mesure les pressions n'est point homogène, car les parties supérieures, en comprimant les couches inférieures, augmentent leur densité, et il faut ramener la hauteur observée à celle qu'aurait une longueur de mercure dont la densité serait constante et égale à 13,596. On a fait le calcul et dressé une Table de correction pour toutes les hauteurs possibles.

3° La température agit sur le gaz renfermé dans le manomètre pour le dilater ou le contracter. Les corrections résultant de cette cause seraient pour ainsi dire impossibles si les

températures variaient beaucoup, car il faudrait connaître les coefficients de dilatation des gaz à toutes les pressions, et on ne les a pas encore déterminés : on sait seulement qu'ils sont variables. Mais heureusement l'eau qui entoure le manomètre maintient la température sensiblement constante, et les corrections qui restent à faire sont à peu près insensibles; elles peuvent, dans tous les cas, être calculées approximativement.

4° On trouve des variations plus grandes dans la température des colonnes extérieures de mercure; on les mesure avec soin dans toute la hauteur, et l'on opère la réduction à 0°, comme nous l'avons fait pour le baromètre.

5° Il fallait aussi corriger le volume du manomètre, qui change avec la pression; mais, en mesurant la distance des deux repères extrêmes sous des pressions très-différentes, on n'a reconnu aucun allongement. On a admis que ces changements de capacité intérieure étaient négligeables.

RÉSULTATS. — Voici, dans le Tableau suivant, quelques-uns des nombres trouvés par Regnault. La première colonne exprime la pression initiale P_0 à laquelle se trouvait le gaz à chaque expérience quand il occupait le volume tout entier V_0 du tube; on le réduisait ensuite à un volume moitié moindre V_1, et l'on mesurait la nouvelle pression P_1. Si la loi de Mariotte était vraie, $V_0 P_0$ devrait être égal à $V_1 P_1$, ou le rapport $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ devrait être égal à l'unité; la valeur trouvée de ce rapport est inscrite dans la deuxième colonne de chacun des Tableaux suivants :

AIR.		AZOTE.		ACIDE CARBONIQUE.		HYDROGÈNE.	
P_0.	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$.	P_0.	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$.	P_0.	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$.	P_0.	$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$.
mm		mm		mm		mm	
738,72	1,001414	753,46	1,000988	764,03	1,007597	"	"
2112,53	1,002765	4953,92	1,002952	3186,13	1,028698	2211,18	0,998584
4140,82	1,003253	8628,54	1,004768	4879,77	1,045625	5845,18	0,996121
9336,41	1,006366	10981,42	1,006456	9619,97	1,155865	9176,50	0,992933

Ces nombres nous apprennent que, dans les quatre gaz étudiés, le rapport $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ est très-sensiblement égal à l'unité, et par suite que la loi de Mariotte, si elle n'est absolument vraie, est au moins une relation approximative très-voisine de la réalité et qui s'étend à toutes les pressions observées : c'est ce que nous savions déjà.

Avec plus d'attention, on reconnaît que les trois premiers gaz, l'air, l'azote et l'acide carbonique, se compriment de façon que $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ est toujours plus grand que l'unité, ou, ce qui est la même chose, que V_1 est plus petit que la loi ne le suppose, et que la compressibilité réelle est plus grande que la compressibilité calculée. Cela se présentait déjà dans les résultats de Dulong et Arago; mais les nouvelles expériences nous apprennent en outre que le rapport $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ va toujours en augmentant, à mesure que les pressions initiales croissent davantage, et conséquemment que les divergences entre l'observation et la loi de Mariotte s'aggravent à mesure que les gaz sont plus condensés.

Pour ne laisser aucun doute sur ce point, il faut montrer que les divergences trouvées dépassent les erreurs possibles de l'observation. En désignant généralement par α la valeur du rapport $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ pour une valeur quelconque de P_0, et supposant que V_1 soit exactement la moitié de V_0, on a

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} = \frac{2 P_0}{P_1} = \alpha, \quad \text{d'où} \quad P_1 = \frac{2 P_0}{\alpha}.$$

Si la loi de Mariotte était parfaitement exacte, on devrait avoir

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} = \frac{2 P_0}{P'_1} = 1, \quad \text{d'où} \quad P'_1 = 2 P_0.$$

Par conséquent, la différence des pressions finales observées et calculées sera

$$P'_1 - P_1 = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette différence peut se calculer en remplaçant P_0 et α par les valeurs écrites dans le précédent Tableau; elle exprimera les différences entre les hauteurs des colonnes de mercure que l'on a observées et celles que l'on aurait obtenues si la loi était exacte. Voici les résultats de ce calcul pour l'air :

P_0	$P'_1 - P_1$
mm	mm
738,72	2,08
2112,52	11,65
4140,82	26,85
9336,41	118,16

Or ces différences sont évidemment plus fortes que les erreurs que l'on a pu commettre dans la mesure des hauteurs, et l'on doit définitivement conclure que la loi de Mariotte n'est pas rigoureusement vraie pour l'air; il en est de même pour les autres gaz.

Regnault a cherché à représenter par une formule empirique la loi de la compressibilité des gaz qu'il a étudiés. Pour cela il fallait combiner les résultats des diverses expériences exécutées sur des masses de gaz différentes dont on se bornait à réduire le volume à la moitié, afin de déterminer la compressibilité d'une masse constante prise à la pression atmosphérique et amenée progressivement jusqu'à la pression de 27^{atm}. Or les expériences ont été faites en employant comme pression initiale, dans chaque expérience, une valeur voisine de la pression finale de l'expérience précédente. Soient alors P_0 la pression atmosphérique, V_0 le volume correspondant, V_1, P_1, V_2, P_2, ..., V_n, P_n les valeurs intermédiaires de la pression et du volume, V, P les valeurs finales; on a

$$\frac{V_0 P_0}{VP} = \frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} \frac{V_1 P_1}{V_2 P_2} \cdots \frac{V_n P_n}{VP}.$$

Les valeurs de chacun des facteurs qui entrent dans le second membre ont été déterminées par l'expérience. Leur produit est le résultat qu'aurait donné l'étude de la compression directe de la masse considérée depuis la pression atmosphérique P_0 jusqu'à la pression finale P.

Les valeurs des quotients successifs, au lieu d'être demandées directement aux Tableaux des expériences, sont mesurées sur une courbe construite en prenant pour abscisses les pressions initiales et pour ordonnées les quotients correspondants. On élimine ainsi les erreurs individuelles des mesures, et l'on peut prendre comme pression initiale P_0 une pression qui n'a pas été réalisée exactement dans les expériences, par exemple celle de 1^m de mercure. C'est précisément ce qu'a fait Regnault. Il a ensuite calculé, au moyen de deux valeurs du quotient $\frac{V_0 P_0}{VP}$, les constantes A et B d'une formule empirique [1]

$$(1) \qquad \frac{V_0 P_0}{VP} = 1 \pm A\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) \pm B\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2.$$

Les valeurs de A et de B sont réunies dans le Tableau suivant :

GAZ.	Signe de A.	log A.	Signe de B.	log B.
Air atmosphérique..	—	$\bar{3},0435120$	+	$\bar{5},2873751$
Azote..............	—	$\bar{4},8389375$	+	$\bar{6},8476020$
Acide carbonique...	—	$\bar{3},9310399$	—	$\bar{6},8624721$
Hydrogène..........	+	$\bar{4},7381736$	+	$\bar{6},9250787$

Nous indiquerons encore, d'après Regnault [2], les valeurs des quotients $\frac{P_0 V_0}{PV}$ pour divers gaz entre 1^{atm} et 2^{atm} :

---

[1] Dans son second Mémoire, Regnault a proposé la forme

$$\frac{V_0 . 0,76}{VP} = 1 \pm A(P - 0,76) \pm B(P - 0,76)^2,$$

et il indique les valeurs de A et de B pour l'oxygène, l'oxyde de carbone et les oxydes d'azote (*Relation des expériences*, etc., t. II, p. 237 et suiv.).

[2] *Relation des expériences*, etc., t. II.

[redacted]

	P_0	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0V_0}{PV}$
	mm		
Air....................	702,78	2,074	1,00215
Bioxyde d'azote.........	720,08	1,967	1,00285
Oxyde de carbone......	703,18	2,072	1,00293
Gaz des marais.........	706,53	1,958	1,00634
Protoxyde d'azote.......	703,10	2,060	1,00651
Acide carbonique.......	774,03	2,003	1,00722
Acide chlorhydrique.....	708,93	2,059	1,00925
Acide sulfhydrique......	722,53	1,951	1,01083
Ammoniaque...........	703,53	2,040	1,01881
Acide sulfureux.........	697,83	1,922	1,02088
Cyanogène.............	703,48	2,031	1,02353

Dans les calculs qui exigent une extrême précision, et quand la pression d'un gaz subit des variations considérables, on devra faire usage des résultats des expériences de Regnault; mais, pour de faibles variations de pression, les divergences sont tellement petites, qu'il fallait toutes les précautions dont s'est entouré Regnault pour les accuser sûrement et les mesurer. Il est donc sans intérêt d'en tenir compte dans la plupart des applications, et nous ne cesserons pas à l'avenir d'employer la loi de Mariotte dans nos calculs.

En résumé, l'azote, l'acide carbonique et aussi l'oxygène se comportent comme l'air, c'est-à-dire que leur compressibilité est excessive et qu'elle augmente avec la pression; elle est d'ailleurs différente pour chacun d'eux, puisque les valeurs de x changent avec leur nature. Quant à l'acide sulfureux, à l'ammoniaque et au cyanogène, qui ont été déjà examinés par Despretz, ils se rangent dans la même catégorie, et ils se compriment encore davantage. Tous ces corps s'éloignent donc de la loi de Mariotte et forment une classe de fluides caractérisés par une compressibilité excessive et qui suit une loi de progression croissant avec la pression.

Ces conclusions ne s'appliquent point à l'hydrogène. Dans le cas particulier et unique que ce gaz réalise, le rapport $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ s

montre constamment plus petit que l'unité et diminue progressivement quand la pression augmente : cela veut dire que V_1 est toujours supérieur au volume calculé, que l'hydrogène s'écarte aussi de la loi de Mariotte, mais qu'il a une compressibilité moindre et que cette compressibilité décroît à mesure que l'on presse davantage.

Pour résumer ces résultats, on peut se représenter un gaz fictif, que nous appellerons *gaz parfait*, offrant une compressibilité normale exactement conforme à la loi de Mariotte, et, ce cas hypothétique étant admis comme limite, on trouve une première catégorie comprenant l'azote, l'air, l'oxygène, l'acide carbonique, etc., avec des compressibilités d'autant plus supérieures qu'ils sont plus aisément liquéfiables ; puis on trouve l'hydrogène formant à lui seul une classe spéciale caractérisée par une compressibilité moindre et décroissante. La loi de Mariotte est donc une loi limite dont les divers corps gazeux s'approchent ou s'éloignent, soit en plus, soit en moins, suivant leur nature, suivant les pressions initiales qu'ils possèdent et suivant leur température.

EFFET DE LA TEMPÉRATURE. — Regnault n'a pas effectué d'expériences sur la compressibilité des gaz à haute température; mais de l'ensemble de ses recherches sur la compressibilité des gaz à 0° et sur leur dilatation par la chaleur (1), ainsi que sur la densité des gaz (2), on peut déduire des conséquences relatives à leur compressibilité à 100°. C'est ce qu'ont fait notamment M. Reye (3) et M. Schröder van den Kolk (4).

Le premier, guidé par des idées théoriques, a cru pouvoir exprimer la loi générale de la compressibilité des gaz (5) par

(1) *Relation des expériences*, etc., t. I, p. 139 et 148.

(2) *Ibid.*, p. 329 et 429.

(3) REYE, *Annales de Poggendorff*, t. CXVI, p. 424.

(4) SCHRÖDER VAN DEN KOLK, *Annales de Poggendorff*, t. CXVI, p. 429, et t. CXXVI, p. 433.

(5) Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} P_0 = f(V), \\ P_{100} = f_1(V) \end{cases}$$

les formules qui expriment la loi de la compressibilité d'un gaz à 0° et à 100°. Le

la formule

$$pv = pR(\varpi T - S) + RT$$
$$(T = t + 273),$$

où t représente la température centigrade, ϖ, R, S des constantes caractéristiques de chaque gaz. D'après cette formule, la loi de Mariotte serait rigoureusement applicable seulement à la température t, définie par l'équation

$$\varpi(t + 273) - S = 0;$$

---

coefficient moyen de dilatation α sous le volume constant V entre 0° et 100° est, par définition,

$$\alpha = \frac{f_1(V) - f(V)}{100 f(V)}. \tag{2}$$

On peut donc le calculer au moyen des relations (1), et, réciproquement, si l'on connait la loi de la compressibilité à 0° et une série de valeurs de α, on pourra trouver la loi de la compressibilité à 100°.

Les Tableaux suivants contiennent les valeurs de α calculées en admettant que la loi de Mariotte s'applique à l'air et à l'acide carbonique à 100°, et en se servant, pour la température de 0°, des formules de compressibilité de Regnault :

AIR ATMOSPHÉRIQUE.			ACIDE CARBONIQUE.		
Pressions P_0.	100α		Pressions P_0.	100α	
	observé.	calculé.		observé.	calculé.
1678,40	0,36760	0,368013	901,09	0,36943	0,37025
1692,53	0,36800		1742,93	0,37525	0,38035
2144,18	0,36894	0,36853	3589,07	0,38598	0,40402
3655,66	0,37091	0,37070			

L'accord entre les valeurs calculées et observées est parfaitement satisfaisant pour l'air, et l'on est fondé à admettre que ce gaz à 100° obéit sensiblement à la loi de Mariotte entre 1^atm et 5^atm; mais il n'en est pas de même pour l'acide carbonique : l'écart qu'il présente à 0° par rapport à la loi de Mariotte ne se trouve réduit que de moitié à 100° entre les limites de pression auxquelles se rapportent les expériences de Regnault. Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux que M. Schröder van den Kolk a obtenus par un mode de calcul différent.

au-dessous, le gaz s'écarterait de la loi de Mariotte dans le même sens que l'air à 0°; au-dessus, dans le même sens que l'hydrogène à 0°. M. Reye s'est servi des nombres de Regnault pour calculer la température t à laquelle la loi de Mariotte serait exacte pour chaque gaz, et il a trouvé :

	$t.$
Pour l'air	+ 79°
Pour l'acide carbonique	+ 156
Pour l'hydrogène	— 41

L'air à 100° devrait déjà s'écarter notablement de la loi de Mariotte dans le sens caractéristique de l'hydrogène, et l'écart anomal de ce dernier gaz devrait être plus grand à 100° qu'à 0°. Ces conclusions ne paraissent pas acceptables.

M. Schröder van den Kolk, au lieu de s'imposer *a priori* une formule théorique, a représenté la compressibilité des gaz à 100° par des formules d'interpolation analogues à celles que Regnault a calculées pour la température de 0°. Il a cru pouvoir établir : 1° que la loi de compressibilité de l'hydrogène est la même à 100° qu'à 0°; 2° que l'air à 100° s'écarte légèrement de la loi de Mariotte dans le même sens qu'à 0°; 3° que l'acide carbonique à 100° s'écarte encore très-notablement de la loi de Mariotte, même pour des pressions voisines de la pression atmosphérique (¹). Regnault, d'après des mesures de la densité de l'acide carbonique à 100°, pensait, au contraire, que, pour des pressions inférieures à 760mm, ce gaz obéit rigoureusement à la loi de Mariotte; mais ce genre d'expériences ne comporte pas la précision des expériences manométriques, et cette conclusion de Regnault doit être rejetée.

Le seul travail expérimental que nous possédions sur la compressibilité des gaz à haute température a été exécuté [illegible]

(¹) [illegible] M. Schröder van den Kolk [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] la pression en mètres de mercure.

[illegible] de mercure [illegible]

[illegible]

cemment par M. Amagat (¹). Ce physicien a étudié entre 1^{atm} et 2^{atm} la compressibilité de divers gaz, chauffés au bain d'huile, à des températures comprises entre 100° et 320°; il a trouvé que l'air et l'hydrogène obéissent très-sensiblement à la loi de Mariotte dans ces limites; l'acide sulfureux et l'acide carbonique n'y obéissent que vers 250°. Le Tableau suivant indique les valeurs du quotient $\frac{P_0 V_0}{PV}$ pour chacun de ces deux gaz :

Acide sulfureux.		Acide carbonique.	
15°	1,0185	8°	1,0065
50	1,0110	50	1,0036
100	1,0054	100	1,0023 (²)
150	1,0032	150	1,0014
200	1,0021	200	1,0008
250	1,0016	250	1,0006

On peut donc admettre que tous les gaz s'approchent de plus en plus de la loi de Mariotte à mesure que leur température est plus haute.

CAS DES PRESSIONS TRÈS-ÉLEVÉES. — Les recherches de Regnault n'ont pas été poussées au delà de 27^{atm}. Il importe cependant de savoir ce que devient la compressibilité des fluides élastiques sous l'influence de pressions énormes. Cette question fut étudiée d'abord par Natterer (³), à l'aide de procédés peu

(¹) AMAGAT, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII, p. 183; t. LXXV, p. 179; *Voir* aussi *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXIX.

(²) Il est à remarquer que la formule de M. Schröder van den Kolk, appliquée à l'acide carbonique à 100°, fournit un nombre très-voisin de celui qu'indique M. Amagat.

(³) Les recherches de Natterer ont été publiées dans les *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. V, VI et XII, et dans les *Annales de Poggendorff*, t. LXII, p. 139, et t. XCIV, p. 436.

Le procédé employé consistait à comprimer le gaz à une pression qui atteignait jusqu'à 2800^{atm} dans un réservoir en fer forgé et à l'aide d'une pompe foulante. On mesurait la pression du gaz par une soupape chargée de poids, et l'on évaluait son volume initial en recueillant le gaz après l'expérience sur la cuve pneumatique dans une cloche graduée.

Il était intéressant de comparer les résultats fournis par les premières expé-

précis; mais M. Cailletet l'a résolue par une méthode qui laisse peu à désirer sous le point de vue de l'exactitude.

Les premières recherches de M. Cailletet ont été faites en comprimant une masse constante de gaz dans une sorte de piézomètre muni d'un tube gradué en parties d'égale capacité et qui s'élève au-dessus du réservoir métallique, dans lequel on produit la pression. Ce réservoir contient du mercure, et l'on y refoule de l'eau à l'aide d'une pompe; l'eau transmet la pression au mercure, qui la communique au gaz du piézomètre. On obtient une évaluation approximative des pressions exercées en employant, comme manomètre, un thermomètre à mercure dont le réservoir est comprimé à l'intérieur du même piézomètre : dans des limites très-larges, la diminution de capacité du réservoir et l'ascension du mercure dans la tige sont proportionnelles à la pression.

Plus tard, M. Cailletet a cherché à installer un manomètre à air libre, formé d'un tube d'acier de $0^m,003$ de diamètre, rempli de mercure et adossé au flanc d'un coteau. Ce tube porte des repères fixés à des distances verticales de 1^m, et il commu-

riences de M. Cailletet avec ceux de Natterer : c'est ce qu'a fait M. Wüllner, d'après lequel nous reproduisons le Tableau suivant.

PRESSION.	$\frac{V_0 P_0}{VP}$, HYDROGÈNE.		AIR.	
	Cailletet.	Natterer.	Cailletet.	Natterer.
atm 60	0,9810	1,000	1,0137	1,000
80	//	//	1,0118	//
100	0,9552	0,9800	1,0098	1,000
200	0,9158	0,9050	0,9940	0,9502
300	0,8761	0,8600	0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
605	0,7580	0,7533	0,7215	0,7185
2790	//	0,3613	//	//

nique avec un réservoir également rempli de mercure, qu'on peut élever à la hauteur de l'un quelconque des repères, de manière à équilibrer par le mercure du tube une pression représentée par un nombre quelconque de mètres de mercure.

Fig. 107.

Enfin, M. Cailletet [1] a profité, dans ses dernières expériences, d'un puits artésien en foncement à la Butte-aux-Cailles, et dont la profondeur dépasse 500^m. Le tube-laboratoire DE (*fig.* 107), dans lequel on comprime le gaz, est en acier; il a 1^m,80 de longueur et un diamètre intérieur de 0^m,025. Il est fermé à son extrémité supérieure par un obturateur conique en fer E muni d'un écrou; à sa base est fixé, en B, un tube en acier doux de 250^m de longueur, disposé de telle sorte qu'il peut s'enrouler dans une hélice creusée sur la circonférence d'un gros cylindre en bois de 2^m de diamètre. Ce cylindre se meut autour d'un axe vertical et on le fait tourner dans le sens convenable, suivant qu'on veut descendre le tube-laboratoire dans le puits ou le remonter.

Le piézomètre A contenant le gaz est enfermé dans le tube-laboratoire. C'est un tube de verre renflé à son extrémité inférieure et terminé par une pointe ouverte recourbée. Une mince couche d'or déposée chimiquement à l'intérieur et que le mercure dissout instantanément partout où il pénètre permet de déterminer le volume minimum auquel le gaz a été réduit dans le courant d'une expérience.

Le tube-laboratoire, convenablement équilibré, est descendu dans le puits à une

[1] *Journal de Physique*, t. VIII, p. 267; 1879.

profondeur connue; la pression supportée par le gaz est ainsi déterminée par la distance du niveau supérieur du mercure dans le tube-laboratoire à son niveau dans le réservoir fixe extérieur au puits, et, comme on connaît le volume occupé par le gaz, on a tous les éléments nécessaires pour déterminer la loi de sa compressibilité. Voici les résultats obtenus pour l'azote :

Azote à 15°.

PRESSION.	VOLUME.	PV.	TEMPÉRATURE du gaz.
m 39,359	207,93	8184	° + 15,0
44,264	184,20	8153	+ 15,1
49,271	162,82	8022	+ 15,1
49,566	161,85	8022	+ 14,9
59,462	132,86	7900	+ 15,0
64,366	123,53	7951	+ 15,0
69,367	115,50	8011	+ 15,0
74,330	108,86	8091	+ 15,1
79,234	103,00	8162	+ 15,1
84,838	97,97	8267	+ 15,2
89,231	93,28	8323	+ 15,2
99,188	86,06	8536	+ 15,4
109,199	77,70	8484	+ 15,6
114,119	76,69	8751	+ 15,7
124,122	71,36	8857	+ 16,0
144,241	62,16	8966	+ 16,3
149,205	59,70	8907	+ 16,5
154,224	58,18	8973	+ 16,6
164,145	54,97	9023	+ 16,8
174,100	52,79	9191	+ 17,0
181,985	51,27	9330	+ 17,2

Ces expériences concordent avec celles, plus anciennes, faites sur l'air; elles établissent que le produit PV devient minimum, et, par suite, la compressibilité du gaz maximum, pour une certaine pression (qui, dans le Tableau précédent, paraît voisine de 60^m de mercure), après quoi le produit PV augmente et le gaz devient moins compressible.

M. Amagat (1) a obtenu des résultats analogues en apportant à la méthode de M. Cailletet des modifications de détail, qui ne paraissent pas de nature à en accroître la précision. Il a d'abord étudié la compressibilité de l'azote et fixé à 50^m de mercure la pression correspondant au maximum de compressibilité ; il a ensuite comparé la compressibilité des divers gaz à celle de l'azote par la méthode de Pouillet (*voir* p. 192) et fixé les pressions correspondant au maximum de compressibilité à 100^m de mercure pour l'oxygène, à 65^m pour l'air, à 50^m pour l'oxyde de carbone, à 120^m pour le formène, à 65^m pour l'éthylène.

L'étude de la compressibilité des gaz voisins de leur point de liquéfaction sera reprise sous un nouveau point de vue dans le second Volume de cet Ouvrage, à propos des propriétés des vapeurs (2).

APPLICATIONS DE LA LOI DE MARIOTTE.

A l'étude de la compressibilité des gaz se rattache celle de deux sortes d'appareils, dont les uns, les *manomètres*, servent à la mesure des pressions des gaz, les autres, les *voluménomètres*, à la mesure des volumes des solides.

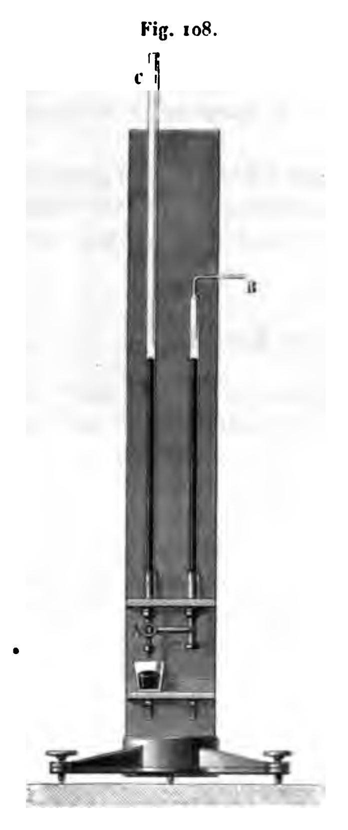
MANOMÈTRE A AIR LIBRE. — Le baromètre, la grande branche de l'appareil de Regnault pour l'étude de la loi de Mariotte, fournissent les meilleurs exemples de la mesure exacte de la pression d'un gaz, au moyen d'une colonne de mercure. La disposition suivante a servi à Regnault dans la seconde partie de ses recherches sur la compressibilité des gaz, et convient très-bien pour la mesure précise des pressions inférieures à

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 431; t. LXXXVIII, p. 336; t. LXXXIX, p. 437.

(2) On ne sait rien de bien précis sur la compressibilité des gaz sous de très-faibles pressions, malgré les recherches récentes de MM. Mendéleeff et Kirpitchoff (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 5e série, t. II, p. 427), Siljeström (*Ann. de Pogg.*, t. CLI, p. 451 et 573) et Amagat (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 914). Il est probable que les écarts, s'ils existent, doivent être extrêmement faibles, conformément aux résultats des expériences de M. Siljeström.

3^{atm}. Le tube C (*fig.* 108) est libre et ouvert à l'extérieur, et communique avec le tube B par une monture métallique, dans laquelle les deux tubes sont mastiqués et qui est munie d'un robinet à trois voies A. On mesure la différence des niveaux du mercure à l'aide du cathétomètre.

Fig. 108.



Pour mesurer de faibles différences de pression, on peut substituer au mercure d'autres liquides, l'acide sulfurique par exemple, qui n'émet pas sensiblement de vapeur à la température ordinaire et qui permet de constater des variations de pressions à peu près sept fois et demie plus faibles; mais, si l'on veut exagérer dans un rapport considérable la sensibilité d'un manomètre à air libre, on aura recours à l'artifice suivant, imaginé par M. Kretz.

Considérons deux réservoirs A, B, à large surface, reliés entre eux par un tube en U, ACB (*fig.* 109). On verse dans le vase B de l'alcool coloré en rouge avec de l'orseille et dans le vase A un liquide de densité très-peu différente et non miscible avec le premier; l'essence de térébenthine, un peu plus lourde que l'alcool, remplit parfaitement ces conditions. On fait en sorte que la séparation des deux liquides soit en un point D du tube A. Si la pression exercée en A vient à varier, le point D viendra en D′, et, comme les surfaces des réservoirs sont très-grandes, les variations de niveau y sont insensibles et on peut les négliger : le déplacement du point D est donc proportionnel à la variation de la pression.

Appelons d la densité de l'essence de térébenthine, d' celle de l'alcool, l le déplacement DD'; la colonne DD' d'essence de térébenthine a été remplacée par une colonne égale d'alcool; la pression exercée par le liquide en D' a diminué de $l(d-d')$; comme, d'autre part, le niveau est demeuré invariable en B, cette diminution doit être compensée par l'excès x de la pression en A :

$$x = l(d - d').$$

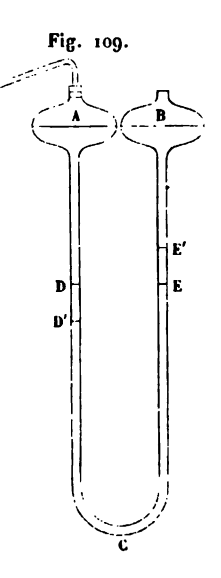


Fig. 109.

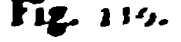
L'appareil sera donc d'autant plus sensible que les densités des liquides employés seront plus rapprochées.

Toutefois, on ne peut exagérer indéfiniment la sensibilité d'un tel manomètre; le mouvement du liquide dans le tube A ne s'exécuterait plus que par saccades, et l'accroissement de la sensibilité deviendrait illusoire.

MANOMÈTRES A AIR COMPRIMÉ. — On a vu que l'on peut toujours admettre la loi de Mariotte comme étant rigoureusement vraie dans tous les calculs et toutes les applications que l'on peut en faire, si les gaz sont très-éloignés de leur point de liquéfaction. C'est sur cette remarque que l'on s'appuie pour construire les manomètres à air comprimé, avec lesquels on mesure approximativement les pressions dans une enceinte quelconque.

La forme la plus habituelle de ces manomètres est la suivante. On plonge dans une cuvette de verre (*fig.* 110) pleine de mercure un tube cylindrique de verre fermé par le haut et contenant de l'air sec; les niveaux du liquide sont les mêmes à la pression de l'atmosphère. Cette cuvette est enfermée dans un cylindre de bronze A qui est scellé en C contre le tube et qui est mis en communication par un robinet B avec l'enceinte qui contient le gaz ou la vapeur dont on veut mesurer la pression. Voici comment on pourrait graduer théoriquement cet instrument.

A la pression initiale 760^mm de l'atmosphère, le volume de l'air est égal à $\pi r^2 h$, en désignant par r et h le rayon et la hauteur totale du tube.


Fig. 119.



Quand la pression extérieure devient égale à n atmosphères ou à $n.760^{mm}$, le mercure s'élève dans le tube d'une quantité x et le volume se réduit à $\pi r^2(h-x)$.

Mais, pendant que le mercure monte de x dans le tube, il s'abaisse dans la cuvette d'une quantité y; l'élévation et l'abaissement sont en raison inverse des sections du tube et de la cuvette, et, si r et R sont leurs rayons, on a

$$\pi r^2 x = \pi(R^2 - r^2)y.$$

D'un autre côté, la pression éprouvée par l'air est égale à la pression extérieure $n.760^{mm}$ diminuée de la différence de niveau $x+y$; cette pression est donc égale à

$$n.760 - x - \frac{r^2}{R^2 - r^2}x = n.760 - \frac{R^2}{R^2 - r^2}x.$$

En écrivant maintenant que les volumes initial et final sont en raison inverse des pressions correspondantes, on trouve

$$\frac{\pi r^2 h}{\pi r^2(h-x)} = \frac{n.760 - \frac{R^2}{R^2 - r^2}x}{760}$$

ou, en posant $\frac{1}{760}\frac{R^2}{R^2 - r^2} = k$,

$$\frac{h}{h-x} = n - kx.$$

Cette équation est du second degré, et, en la résolvant, on trouve

$$x = \frac{1}{2k}\left[n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4kh(n-1)}\right].$$

Une seule valeur de x convient à la question : c'est celle qui

correspond au signe —, car il faut que x soit nul sous la pression de 1^{atm}, c'est-à-dire quand $n = 1$.

Pour graduer un manomètre, il faudrait donc commencer par mesurer les rayons r et R et par calculer la constante k, après quoi l'on prendrait n égal à 2, 3, 4, 5, et l'on marquerait sur le tube les valeurs de x correspondantes. Si l'on suppose que l'abaissement du niveau dans la cuvette soit négligeable, ce qui est toujours suffisamment exact quand elle est large et que le tube est très-étroit, il faudra poser $R = \infty$ ou remplacer k par $\frac{1}{760}$ dans la formule.

Fig. 111.

On donne quelquefois au manomètre la forme d'un siphon retourné (*fig.* 111). La branche ouverte reçoit la pression, et le tube fermé contient de l'air. Sous la pression initiale de 760^{mm}, le mercure est au même niveau AB dans les deux branches; quand la pression augmentera pour devenir égale à $n.760^{mm}$, le niveau baissera en A jusqu'en A' et montera en BC jusqu'à B' d'une même quantité x dans les deux branches; la formule précédente s'appliquera à ce nouveau cas en remplaçant $x - y$ par $2x$ et faisant $k = \frac{2}{760}$: elle devient

$$x = \frac{2h + n.760}{4} \pm \sqrt{\frac{(2h + n.760)^2}{16} - \frac{h(n-1)760}{2}}.$$

Cette formule permet, comme précédemment, de calculer les hauteurs où s'élèvera le mercure quand n sera égal à 2, 3, 4, 5, ...; on pourra écrire les pressions sur le tube.

Ce mode de graduation laisse toujours à désirer, parce que l'on est obligé d'admettre que les tubes sont cylindriques, et de plus que les deux branches A et B ont le même diamètre; aussi vaut-il mieux graduer ces instruments par l'expérience, et pour cela on les réunit avec un manomètre à air libre, on mesure les pressions comme dans les expériences qui ont

servi à étudier la loi de Mariotte, et on les marque sur le tube manométrique.

MANOMÈTRES DIVERS. — La sensibilité du manomètre à air comprimé décroît quand la pression à mesurer augmente. Cet inconvénient n'existe pas dans le manomètre suivant, imaginé par Regnault ([1]).

Une certaine quantité d'air à la pression que l'on veut mesurer est d'abord isolée dans une capacité close A, puis mise en communication avec une deuxième capacité B pleine de mercure où elle se détend jusqu'à une pression voisine de la pression atmosphérique. Les deux vases sont plongés dans une masse d'eau assez grande, pour que les variations de température résultant de la détente soient négligeables. Soient V le volume du gaz sous la pression x du réservoir, V + V′ son volume final sous la pression connue P; on a, d'après la loi de Mariotte,

$$x = \frac{V + V'}{V} P. \tag{1}$$

Le tube A (*fig.* 112) est en laiton et à parois épaisses; il communique, par un robinet à trois voies D, soit avec le réservoir à gaz, soit avec l'une des branches B d'un manomètre à air libre, graduée en parties d'égale capacité et munie également d'un robinet à trois voies E; on mesurera directement V′; quant au volume V du tube A, on peut le déterminer par le fonctionnement même de l'appareil, en employant de l'air à une pression initiale P connue. Tout l'appareil est contenu dans une cuve pleine d'eau, fermée en avant par une glace plane.

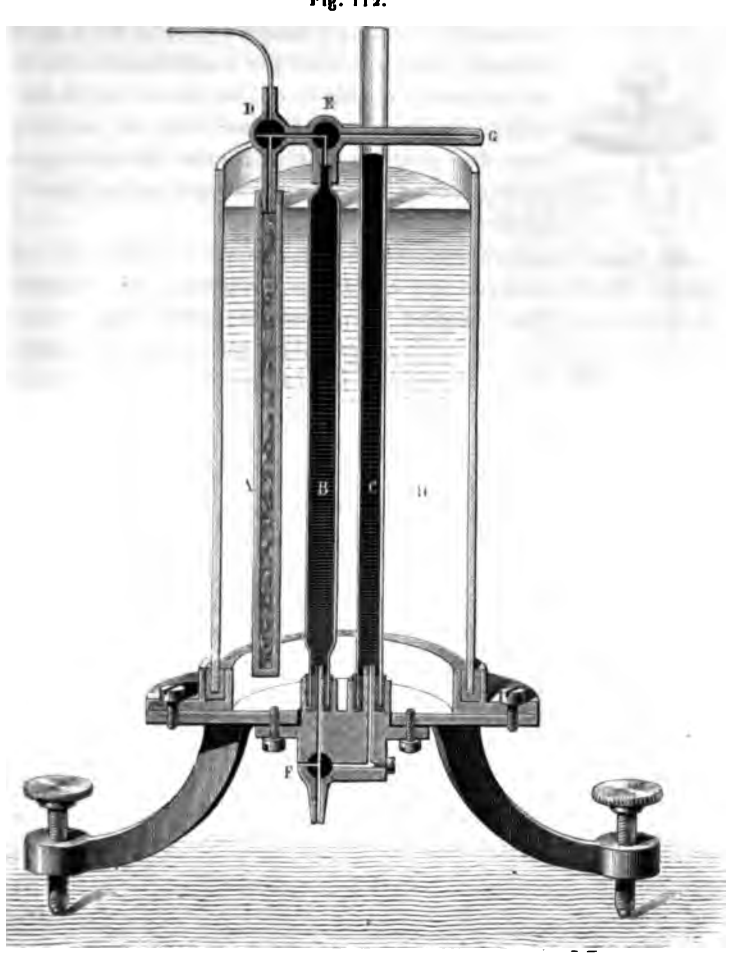
Pour mesurer approximativement de très-hautes pressions, M. Desgoffe a employé un appareil dans lequel la pression inconnue s'exerce sur la petite base d'un piston (*fig.* 113), dont l'autre base, de section très-large, refoule du mercure dans un tube manométrique ouvert. Soient s et S les sections pressées par le gaz et par le liquide, P et p les pressions correspon-

([1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXVI, et *Relation des expériences*, etc., t. II, p. 580.

dantes; il faut pour l'équilibre du piston que l'on ait

$$pS = Ps$$

Fig. 112.



$$p = P\frac{s}{S};$$

pression est donc réduite dans le rapport des deux sections.

Nous ne décrirons pourtant pas cet appareil, dont la construction soulève de nombreuses difficultés pratiques, et nous conseillerons de préférence l'emploi des *thermomètres-manomètres* de M. Cailletet, dont nous avons déjà indiqué l'usage à propos de la loi de Mariotte. On les gradue par comparaison avec un manomètre à air libre, et l'on admet que la diminution de la capacité intérieure du réservoir pour des pressions très-grandes demeure proportionnelle à la pression, ce qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité.

Fig. 113.

Le manomètre métallique de M. Bourdon (*fig.* 114), employé dans la pratique des machines à vapeur, a pour organe essentiel un tube à section elliptique recourbé, dont l'extrémité libre fait mouvoir une aiguille. Le gaz dont on veut mesurer la pression est reçu dans le tube, qu'il déforme en rapprochant sa section de la forme circulaire, d'où résulte une diminution de la différence des longueurs intérieure et extérieure de la courbe d'enroulement, par suite un déroulement plus ou moins complet. On les gradue par comparaison.

Fig. 114.



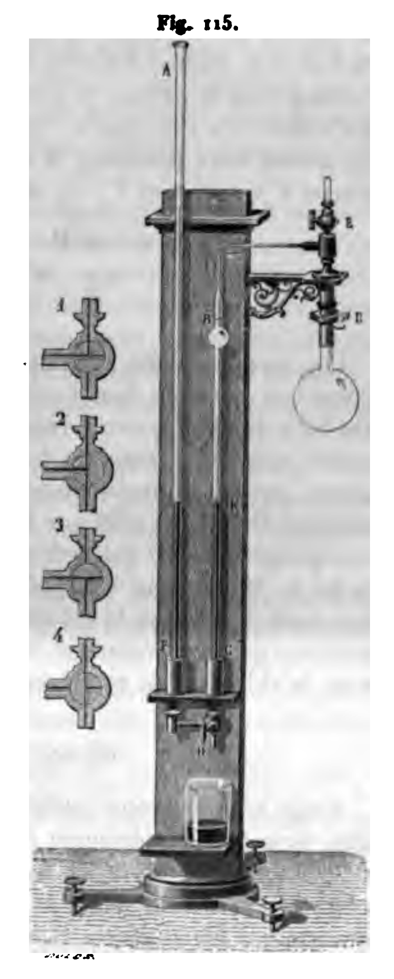
VOLUMÉNOMÈTRES. — On peut se servir de la loi de Mariotte pour mesurer le volume, et par suite la densité des corps, sans qu'il soit nécessaire de les plonger dans l'eau. Le procédé a été imaginé d'abord par Say [1], et son appareil a été perfectionné par Regnault [2], qui lui a donné la forme suivante (*fig.* 115). Deux tubes manométriques contenant du mercure sont mastiqués dans une pièce de fonte FG, qui les réunit par l'intermédiaire d'un robinet à trois voies H. Suivant que l'on tourne celui-ci dans les positions 1, 2, 3, 4, on peut : 1° établir

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 1re série, t. XXIII; 1797.
(2) *Ibid.*, 3e série, t. XIV.

la communication entre ces tubes; 2° laisser écouler le mercure de A et de B; 3° de A seulement; 4° de B seulement. Ce robinet est d'un fréquent usage, et l'on voit qu'il permet de satisfaire à plusieurs besoins. Le premier tube A est ouvert par le haut; le second tube B porte une dilatation, et l'on y a marqué deux traits B et K, au-dessus et au-dessous de l'espace renflé. Si l'on amène d'abord le mercure en B, qu'on le laisse écouler jusqu'en K et qu'on le pèse, on pourra calculer le volume v compris entre B et K.

Fig. 115.



Le tube BK se continue par un autre tube plus mince qui se recourbe horizontalement et vient se mettre en rapport avec un ballon que l'on peut enlever à volonté ou joindre à l'appareil par un collier à gorge D. Il faut d'abord trouver le volume V compris entre ce ballon et le repère B. A cet effet, on emplit les tubes de mercure jusqu'en K, sous la pression atmosphérique H, puis on ferme le robinet E et l'on ajoute du mercure en A jusqu'au moment où le niveau arrive en B; la pression augmente d'une quantité h que l'on mesure au cathétomètre, et le volume de l'air, qui d'abord était $V + v$, se réduit à V. On a dès lors

$$(V + v)H = V(H + h),$$

d'où l'on tire

$$V = v\frac{H}{h}.$$

L'appareil est maintenant gradué, puisque l'on connaît V et v. Si l'on veut ensuite mesurer le volume x d'un corps, on place celui-ci dans le ballon, ce qui diminue de x la capacité totale du ballon; alors on répète l'opération qui vient d'être décrite : on trouve deux pressions H et $H + h'$ correspondant aux volumes $V + v - x$ et $V - x$, et l'on a

$$(V + v - x)H = (V - x)(H + h'),$$

$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}.$$

Cet appareil a été employé pour mesurer la densité des corps qui s'altèrent dans l'eau, tels que les poudres de guerre. On lui a donné diverses formes qui en rendent l'usage plus ou moins commode, mais qu'il est inutile de décrire en détail, parce que le voluménomètre ne peut fournir de mesures exactes. On sait en effet que les corps pulvérulents absorbent des quantités de gaz qui varient avec la pression, ce qui fait que la loi de Mariotte ne s'y applique pas exactement; aussi préfère-t-on déterminer le volume des poudres par le volume de mercure qu'elles déplacent, après qu'on les a débarrassées, dans le vide, de l'air condensé qu'elles retiennent.

MÉLANGE DES GAZ.

Jusqu'ici nous avons étudié l'effet de la pression sur un seul gaz, mais on peut aisément étendre la loi de Mariotte au cas de plusieurs gaz mélangés, quand ils n'exercent entre eux aucune action chimique. On se fonde sur une expérience concluante qui fut autrefois exécutée par Berthollet. Il avait pris deux ballons de capacité égale, munis tous deux de douilles à robinet et pouvant se visser ensemble; il les avait remplis, l'un d'acide carbonique, l'autre d'hydrogène, à la même température et à la même pression, et, après les avoir réunis, tout en maintenant les robinets fermés, il les déposa dans les caves

de l'Observatoire, plaçant l'hydrogène, qui est le plus léger, au-dessus de l'acide carbonique, qui est le plus lourd, afin qu'ils ne pussent se déplacer par l'effet de leurs densités. Après avoir attendu assez longtemps pour que les températures fussent égales, Berthollet ouvrit les robinets et les laissa ouverts pendant plusieurs heures. Il trouva ensuite que la pression n'avait point changé, mais que les deux gaz s'étaient uniformément répartis dans les deux vases, malgré la pesanteur qui devait les maintenir séparés.

Il fallut admettre que chacun des deux gaz s'était répandu dans tout l'espace, comme s'il y existait seul, et, chacun d'eux devant, d'après la loi de Mariotte, avoir une pression moitié moindre en se dilatant dans un espace double, il fallut conclure que les pressions de chacun d'eux s'ajoutent, puisque la force élastique totale était restée la même avant et après le mélange. On généralisa ces conclusions, et l'on établit les lois suivantes :

1° Les gaz se mélangent, quelle que soit leur densité.

2° La pression totale du mélange est la somme des pressions individuelles qu'auraient les gaz qui le composent s'ils étaient séparés.

Il suffit maintenant de réduire ces lois en formule pour avoir résumé tout ce qu'il faut savoir sur le mélange des gaz. Soient $v, v', v'', \ldots, p, p', p'', \ldots$ les volumes et les pressions de plusieurs gaz que l'on condense dans un volume unique V; chacun d'eux y acquerrait, s'il était seul, une force élastique $\frac{vp}{V}, \frac{v'p'}{V}, \frac{v''p''}{V}, \ldots$, et la somme de ces quantités sera la pression totale P du mélange, ce qui conduit à la relation générale

$$VP = vp + v'p' + v''p'' + \ldots,$$

qui exprime la loi du mélange des gaz. On peut l'énoncer en disant que *le produit du volume et de la pression du mélange est la somme des produits du volume initial de chaque gaz par sa pression initiale*. Or chacun de ces produits vp est constant, d'après la loi de Mariotte; il en est de même de leur somme, c'est-à-dire du produit VP.

Un mélange de plusieurs gaz obéit donc à la loi de Mariotte dans la limite des pressions où elle est vraie pour chacun des gaz qui le composent.

Qu'arrive-t-il quand on dépasse cette limite? Si l'on imagine que l'action réciproque des gaz mêlés continue à être nulle, on pourra déterminer *a priori* la loi de compressibilité du mélange, quand on aura déterminé celle des gaz composants. Regnault (¹) a réalisé à cet égard quelques mesures avec des mélanges d'air et d'acide carbonique d'une part, d'acide sulfureux et d'hydrogène d'autre part, et vérifié que, tant qu'on ne dépasse pas 2^{atm}, ce mode de calcul donne des résultats assez satisfaisants. Mais des expériences plus récentes de M. Andrews (²) et de M. Cailletet (³) établissent qu'il n'en est plus de même quand on emploie des pressions très-élevées. Alors chaque mélange possède une compressibilité propre qu'il n'est pas possible de calculer *a priori*, non plus que la valeur de la pression pour laquelle la liquéfaction de l'un des gaz du mélange commence à se produire.

DISSOLUTION DES GAZ (⁴).

Lorsqu'un gaz est en présence d'un liquide, il se répand dans son intérieur de manière à occuper son volume; le gaz se diffuse dans le liquide; mais ici la nature chimique du gaz, ainsi que celle du liquide, intervient dans le phénomène, de sorte qu'il s'introduit une constante dépendant de cette nature chimique.

Première loi. — Supposons, en présence d'un liquide, une atmosphère indéfinie de gaz sans action chimique sur lui; le gaz se dissoudra peu à peu, et la dissolution sera facilitée par l'agitation ou le développement de la surface. A une même température et à une même pression, l'unité de volume du

(¹) REGNAULT, *Relation des expériences, etc.*, t. II, p. 265.

(²) CAILLETET, *Journal de Physique*, t. IX, p. 192; 1880.

(³) ANDREWS, *Philosophical Magazine*, 1876-77.

(⁴) Les lois de la dissolution des gaz ont été énoncées pour la première fois par Henry (*Philos. Transact.*, 1803, Part I, p. 29) et Dalton (*Memoirs of literary and philos. Soc. of Manchester*, 2ᵉ série, t. I, p. 284; t. V, p. 211.

liquide dissout une quantité constante de gaz, de sorte que le volume du gaz dissous ramené à la pression extérieure est proportionnel au volume V' du liquide : $V = nV'$. C'est ce rapport n, quand le liquide est à 0°, ainsi que le gaz, que l'on nomme *coefficient de solubilité* du gaz dans le liquide.

Considérons le gaz dissous; son volume est V', son poids spécifique est d', $V'd'$ est son poids. Si on le ramène à la pression extérieure, son volume est nV', d est son poids spécifique, $nV'd$ est son poids; on peut donc écrire

$$P = V'd' = nV'd$$

ou

$$d' = nd.$$

La première de ces relations nous apprend que le poids du gaz dissous dans une quantité donnée de liquide est proportionnel à la densité ou à la pression du gaz extérieur, et à une constante qui est le coefficient de solubilité. Si h' est la pression du gaz dissous ramené au volume du liquide et h la pression extérieure, on peut, d'après la loi de Mariotte, écrire la seconde relation

$$h' = nh.$$

Donc la pression du gaz dissous, ramené au volume du liquide, est proportionnelle à la pression extérieure. En d'autres termes, le coefficient de solubilité n est indépendant de la pression et le volume de gaz dissous par l'unité de volume du liquide, ramené à la pression extérieure, est constant.

Il n'est pas nécessaire que l'atmosphère du gaz qui se dissout soit indéfinie; le gaz peut avoir un volume limité; alors, il est vrai, la pression décroîtra à mesure que la dissolution se fera, mais on arrivera toujours à un état d'équilibre tel, que la relation

$$h' = nh$$

sera vérifiée.

Partant de là, M. Bunsen [1] a pu déterminer facilement le coefficient de solubilité. Il prend une éprouvette AB (*fig.* 116)

---

(1) BUNSEN, *Gasometrische Methoden*, Braunschweig, 1857; traduit en français par M. Ch. Schneider.

placée sur la cuve à mercure. La partie supérieure de l'éprouvette est entourée d'un manchon E qu'on peut remplir d'eau à une température connue, afin de conserver une température constante et déterminée. On fait passer dans la cloche un volume V de gaz sec à la pression H et un volume V′ de liquide ; une portion du gaz est absorbée, et, lorsque la hauteur ne varie plus, on en conclut que l'équilibre est rétabli. On estime alors le volume V″ du gaz restant, sa pression H″, en mesurant la somme des hauteurs CA du mercure et DC du liquide, que l'on réduit en hauteur de mercure ; on peut alors calculer n. En effet, le poids du gaz sec est, en appelant d sa densité sous la pression 760^{mm}, $\frac{VdH}{760}$; celui du gaz restant est $\frac{V''dH''}{760}$, et celui du gaz dissous, d'après la loi énoncée, $V'\frac{d}{760}nH''$; on aura donc, en supprimant le facteur commun $\frac{d}{760}$,

$$VH = V''H'' + V'nH''.$$

De cette équation, qui est la même que celle du mélange des gaz, on peut déduire n, toutes les autres quantités qui y entrent étant données par l'observation.

Fig. 116.

Il reste à savoir entre quelles limites la première loi de la dissolution des gaz est applicable. L'expérience prouve qu'elle peut être considérée comme exacte pour les gaz très-peu solubles et jusqu'à 3^{atm}, pression au delà de laquelle on n'a guère opéré. Même dans cet intervalle la loi ne s'applique pas aux gaz très solubles, l'ammoniaque, l'acide chlorhydrique (1), l'acide sulfureux (2). Elle n'est pas même rigoureuse pour l'acide carbonique, car, d'après les recherches de MM. Khanikoff et Louguinine (3), quand la pression varie de $697^{mm},71$ à

(1) D'après MM. Roscoë et Dittmar (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, t. LVIII, p. 492).

(2) D'après M. Simms, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXVIII, p. 340.

(3) De Khanikoff et Louguinine, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 4e série, t. IX, p. 412.

809^{mm},03 et à 3109^{mm},50, les poids de gaz dissous croissent comme les nombres 1, 1,2307 et 4,7671, au lieu de varier dans le rapport 1, 1,1595 et 4,44567 des trois pressions.

Seconde loi. — Il existe une dernière loi qui a rapport à la dissolution d'un mélange de plusieurs gaz. Lorsqu'un liquide est en présence d'une atmosphère formée par le mélange de plusieurs gaz, chaque gaz se dissout comme s'il était seul, en tenant compte de la pression exercée par chacun d'eux. En d'autres termes, ici comme dans le mélange des gaz, la pression de l'un des gaz n'a aucune influence sur le gaz voisin. Ainsi, par exemple, lorsque l'air se dissout dans l'eau, l'oxygène et l'azote se dissolvent séparément avec leur coefficient de solubilité propre; seulement il faut observer que l'oxygène est, dans le mélange, à la pression de $\frac{1}{5}$ H, tandis que l'azote est à la pression de $\frac{4}{5}$ H. Quand on fait le calcul, on trouve que l'air dissous dans l'eau contient 33 pour 100 d'oxygène, ce qui s'accorde avec l'expérience.

La seconde loi de la solubilité des gaz peut être considérée comme exacte dans les mêmes limites que la première.

A l'aide de la méthode décrite précédemment, M. Bunsen a déterminé comment varie le coefficient de solubilité n d'un gaz avec la température : il diminue lorsque la température s'élève. On peut, en général, le représenter par une formule à trois termes

$$n = a - bt + ct^2,$$

les constantes a, b, c étant déterminées par l'expérience.

Coefficients de solubilité de quelques gaz dans l'eau d'après M. Bunsen.

NATURE DU GAZ.	*a.*	*b.*	*c.*
Oxygène	0,04116	0,001090	0,0000226
Azote................	0,02035	0,00053887	0,000011156
Acide carbonique......	1,79669	0,07761	0,0016424
Oxyde de carbone	0,23087	0,00081632	0,000016421
Gaz des marais........	0,05449	0,0011807	0,000010278
Gaz oléfiant......... ..	0,25629	0,00913631	0,000188108
Hydrogène (1).........	0,0193	"	"
Protoxyde d'azote......	1,30521	0,045362	0,0006483
Acide sulfhydrique.. ..	4,3706	0,083687	0,0005213
Acide sulfureux.......	79,789	2,6277	0,02935

(1) Le coefficient de solubilité de l'hydrogène dans l'eau paraît indépendant de la température entre 0° et 20°.

Pour l'ammoniaque, M. Bunsen a employé la formule à quatre termes

$$n = 1049,63 - 29,496\, t + 0,67867\, t^2 - 0,0095621\, t^3.$$

CHAPITRE VI.

MACHINES A RARÉFIER ET A COMPRIMER L'AIR.

Machine pneumatique à un seul cylindre. — Machine à deux corps. — Robinet. — Récipients. — Platine. — Degré de vide. — Calcul des épuisements. — Dispositif de Babinet. — Machine de Bianchi. — Machine de M. Deleuil. — Machine de M. Carré. — Machine pneumatique à mercure. — Machine de compression. — Pompe à main. — Grande machine de compression.

Les expérimentateurs ont à chaque instant besoin d'enlever l'air que contient un espace fermé ou de comprimer des quantités considérables de gaz dans des enceintes résistantes ; ils y parviennent au moyen des pompes pneumatiques et de compression, que nous avons souvent supposées connues et que nous allons décrire en détail.

MACHINE PNEUMATIQUE A UN SEUL CYLINDRE ([1]). — Concevons un cylindre creux bien régulier et parfaitement alésé (*fig.* 117), dans lequel il y ait un piston mobile dont le contour extérieur

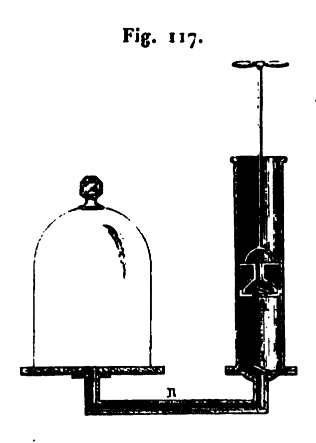
---

([1]) La machine pneumatique à un seul corps de pompe a été imaginée par Otto de Guericke, lequel réalisa par son moyen les expériences du crève-vessie, du baroscope, des hémisphères de Magdebourg, celles qui démontrent que le son ne se propage pas dans le vide, que l'air est pesant, etc. Nous avons vu qu'il se servait aussi de sa machine pour l'installation d'un baromètre à eau [*Ottonis de Guericke experimenta nova* (*ut vocantur*), *Magdeburgica ;* Amsterdam, 1663].

La platine de la machine pneumatique fut imaginée par Papin (*A new digestor or engine for softing bones*, 1687). Boyle imagina de réunir deux pistons se mouvant en sens inverses dans deux corps de pompe, par le moyen d'une corde passant sur une poulie. Hawksbee substitua à cette disposition celle de la roue dentée et des crémaillères, qui est encore en usage (*Pogg. Gesch. der Physik*, p. 423, 470, 473).

soit exactement appliqué contre les parois du cylindre, qui puisse s'élever ou s'abaisser à frottement, et qui soit percé d'un trou muni d'une soupape A ouvrant de bas en haut. Imaginons de plus qu'il y ait sur la base du cylindre une autre soupape B dirigée dans le même sens, ouvrant ou fermant un conduit R par lequel l'appareil communique avec le récipient dans lequel on veut faire le vide. Au moment où l'on élèvera le piston, la soupape A se fermera par l'effet de la pression atmosphérique, l'espace AB augmentera, et, l'air qu'il contient prenant une pression moindre, celui qui est dans le récipient soulèvera la soupape B et pénétrera sous le piston. Cette action se continuera jusqu'au moment où le piston sera arrivé au sommet du cylindre, après quoi on l'abaissera. La soupape B commencera par se fermer, puis l'air compris entre le piston et cette soupape se comprimera, et il arrivera un moment où il acquerra une élasticité supérieure à celle de l'atmosphère : alors il ouvrira la soupape A, s'échappera, et le piston reviendra se placer sur la base du cylindre dans la position qu'il occupait primitivement. On voit donc qu'en soulevant le piston d'abord et qu'en l'abaissant ensuite on raréfie d'abord l'air du récipient et l'on en rejette ensuite une partie dans l'atmosphère, et, comme on peut continuer indéfiniment la même opération, il semble que l'on pourra diminuer indéfiniment la pression de l'air dans le réservoir.

Fig. 117.

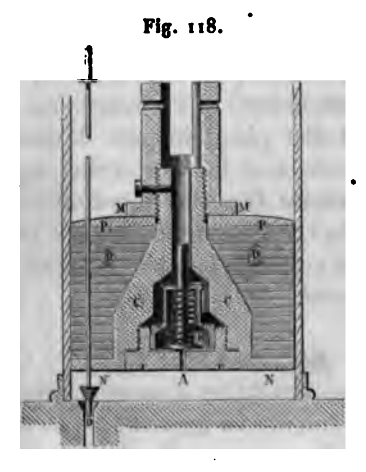


Mais il n'en est pas précisément ainsi, car le gaz du récipient ne pourra affluer dans le corps de pompe qu'en soulevant la soupape B, et la limite du vide sera atteinte aussitôt que l'élasticité de ce gaz sera devenue égale à la résistance de cette soupape B. Cette première imperfection de la machine primitive a nécessité des modifications dont nous allons donner une figure et une description détaillée (*fig.* 118).

Le piston contient intérieurement un noyau en métal com-

posé d'un tube épais CC et d'une base élargie NN; autour de ce tube et sur cette base sont empilées des rondelles de cuir découpées DD que l'on a imbibées d'huile, et au-dessus d'elles est posé un couvercle métallique PP que l'on serre au moyen d'un écrou MM. On lime le contour de ces cuirs superposés pour en former une surface cylindrique lisse et à peu près égale à la dimension du corps de pompe. Il est facile ensuite de l'ajuster exactement, car, toutes les fois qu'on viendra à serrer l'écrou, le diamètre du piston augmentera, et il décroîtra si l'on diminue la pression des disques de cuir; c'est là un moyen aussi précis que simple pour régler exactement la surface extérieure du piston et faire en sorte qu'il ferme exactement, sans opposer pour cela une résistance trop grande au jeu de la pompe.

Fig. 118.



A l'intérieur du tube creux se voit la soupape ou plutôt le clapet B : c'est un petit bouton plat dont la base, bien rodée, repose sur la plaque A et bouche exactement un petit trou dont elle est percée; il est maintenu adhérent par un ressort à boudin très-léger qui presse sur lui, s'enroule autour d'une tige qui le surmonte, et prend un autre point d'appui sur un couvercle fixe. Pour soulever ce clapet, il faudra que l'air intérieur exerce sur la base du bouton un excès de pression au moins égal à son poids augmenté de l'élasticité du ressort; mais poids et ressort sont très-légers.

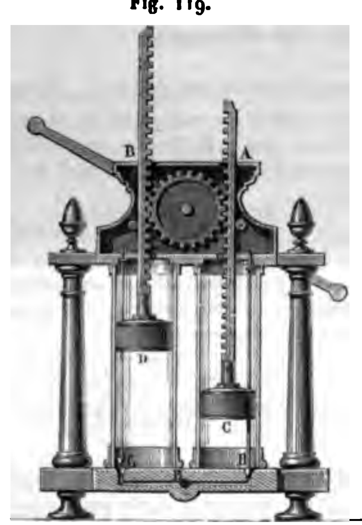
On a supprimé la soupape qui fermait le conduit du récipient, et on l'a remplacée par le mécanisme suivant, qui n'en a pas les inconvénients. On perce le piston d'un trou cylindrique PN qui traverse les deux bases métalliques et toutes les rondelles, et l'on y introduit une tige de laiton qui peut glisser dans l'intérieur avec assez de frottement pour ne laisser aucune issue à l'air. Quand le piston descend, il entraîne cette

tige avec lui, jusqu'au moment où elle rencontre la base du corps de pompe, et alors elle vient appliquer sur l'ouverture D un bouchon qui la ferme. Pour plus de sûreté, le trou a la forme d'un entonnoir, le bouchon celle d'un cône qui s'y adapte exactement, et un peu d'huile versée dans l'appareil suffit pour rendre l'adhérence parfaite. Pendant tout le temps que le piston descend, il appuie sur cette tige, la maintient appliquée en D et glisse sur elle de haut en bas ; quand on vient ensuite à le relever, il commence par soulever la tige et par ouvrir la communication avec le récipient; mais, aussitôt que cela est fait, le sommet supérieur de la tige rencontre le couvercle du corps de pompe qui l'empêche d'aller plus loin; elle devient fixe, et le piston, glissant encore tout le long d'elle, remonte jusqu'en haut. Cette ingénieuse disposition, qui ouvre et ferme mécaniquement le conduit, laisse donc l'air du récipient pénétrer librement dans le corps de pompe, quelque faible que soit devenue son élasticité.

MACHINE A DEUX CORPS. — On n'a pas tardé à reconnaître que ces machines à un seul cylindre avaient un très-grave inconvénient. Au moment où le vide commence à devenir complet, il faut, pour soulever le piston, non-seulement vaincre la résistance des frottements, mais encore équilibrer la pression de l'air atmosphérique qui appuie sur le piston. C'est un effort qui dépasse 103^{kg} quand la section est égale à 1^{dq} et qui, nul quand on commence le vide, croît très-rapidement pendant qu'on le fait, jusqu'à rendre la manœuvre impossible. Pour remédier à cette difficulté, on a disposé l'un auprès de l'autre deux corps de pompe pareils C et D (*fig.* 119), tous deux en rapport avec le même récipient par un conduit unique E. Les deux pistons sont surmontés de deux tiges à crémaillère A, B, et dans l'espace laissé libre entre elles est une roue dentée qui les engrène. Enfin une manivelle à deux branches, terminée par deux poignées que l'expérimentateur saisit à deux mains, sert à mettre en mouvement la roue dentée. Si l'on tourne dans un sens, en abaissant la main droite par exemple, on fait descendre le piston de droite et remonter celui de

gauche, et l'on a soin de n'arrêter ce mouvement qu'au moment où l'on éprouve la résistance opposée par la base du corps de pompe. On change ensuite le sens du mouvement, et l'on donne aux deux pistons une marche inverse. Voici maintenant quel est l'avantage de cet accouplement de deux machines : en premier lieu il permet d'aller deux fois plus vite, et secondement il détruit, dans la mesure du possible, l'effet

Fig. 119.



de la résistance atmosphérique, car la pression exercée par l'atmosphère à la face supérieure des pistons tend à les faire descendre l'un et l'autre, et les forces qu'elle exerce se composent en une résultante unique appliquée sur l'axe de la roue dentée; dès lors, cette action atmosphérique se compense elle-même pendant tout le temps de l'opération, et l'on n'a plus à vaincre à chaque instant, en dehors des frottements, que la différence des pressions exercées par l'air raréfié sur la base inférieure des pistons ([1]).

([1]) Proposons-nous de calculer le travail de la différence des pressions supportées par le piston pendant la marche ascendante et descendante. D'après

RÉCIPIENTS. — PLATINE. — La machine pneumatique doit pouvoir aisément se mettre en communication avec les divers

---

le dispositif employé, le travail net à effectuer par la force extérieure qui meut le piston est égal et de signe contraire au précédent.

Soient

H la pression atmosphérique;
y celle de l'air du corps de pompe;
S la section du piston;
h la longueur de sa course;
$B = Sh$ le volume du corps de pompe;
A celui du récipient;
enfin x la distance variable de la base du piston à la base du corps de pompe.

Quand on déplace le piston d'une quantité ∂x, la pression y du gaz confiné agit et exécute un certain travail; la pression atmosphérique H exécute un travail de signe contraire; le travail élémentaire total est

$$(1) \qquad \partial \mathfrak{C} = -(H - y) S \, \partial x.$$

Considérons d'abord le travail effectué pendant la marche ascendante du piston. En appliquant la loi de Mariotte à l'air confiné dans le récipient et dans le corps de pompe, et en désignant par P la pression dans le récipient quand le piston est au bas de sa course, on a

$$(2) \qquad y(A + Sx) = PA,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} = -HS + \frac{PAS}{A + Sx}.$$

Puisque ∂x est positif, le premier membre de cette expression représente, à la limite, la dérivée de $\mathfrak{C}$ par rapport à x. En passant aux fonctions primitives, on a

$$\mathfrak{C} = -HSx + PA\,L.(A + Sx) + C.$$

La constante C est déterminée par la condition que $\mathfrak{C}$ soit nul pour $x = 0$:

$$C = -PA\,L.A,$$

$$(3) \qquad \mathfrak{C} = -HSx + PA\,L.\frac{A + Sx}{A}.$$

Quand le piston est parvenu au haut de sa course, la valeur $\mathfrak{C}_1$ du travail exécuté s'obtient en remplaçant x par h dans l'équation (3) :

$$\mathfrak{C}_1 = -HSh + PA\,L.\left(\frac{A + Sh}{A}\right),$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \mathfrak{C}_1 = -BH + PA\,L.\left(\frac{A + B}{A}\right).$$

Pendant la course descendante du piston, y n'est plus représenté par l'équa-

[redacted]

récipients qu'on peut avoir besoin de lui joindre. A cet effet, elle est fixée sur une table solide (*fig.* 120); les conduits des

---

tion (2). On a en effet, quand le piston est au haut de sa course, une masse d'air occupant le volume B du corps de pompe sous la pression $P\frac{A}{A+B}$; elle occupe plus tard le volume Sx sous la pression y telle que

$$y = P\frac{AB}{A+B}\frac{1}{Sx}, \qquad (2 \textit{ bis})$$

$$\frac{\delta\mathfrak{T}}{\delta x} = -HS + P\frac{AB}{A+B}\frac{1}{x},$$

δx étant négatif. Cette expression représente, à la limite, la dérivée de $\mathfrak{T}$ par rapport à x changée de signe; on a donc

$$-\mathfrak{T} = -HSx + P\frac{AB}{A+B}L.x + C.$$

Ce travail est exécuté entre la valeur maximum de x, $x = h$ et une valeur minimum x_1 que l'on détermine en cherchant la position du piston pour laquelle la soupape s'ouvre. Pour cela il suffit de faire $y = H$ dans l'équation (2 *bis*), et l'on trouve

$$x_1 = \frac{1}{H}\frac{PA}{A+B}h.$$

Le travail $\mathfrak{T}_2$ correspondant à la descente du piston est alors

$$\mathfrak{T}_2 = HB - \frac{PAB}{A+B}\left[1 - L.\left(H\frac{A+B}{PA}\right)\right]. \qquad (4 \textit{ bis})$$

Le travail T pendant la marche ascendante et descendante est

$$T = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = -\frac{PAB}{A+B}\left[1 + L.\left(H\frac{A+B}{PA}\right)\right] + PA\,L.\left(\frac{A+B}{A}\right). \qquad (5)$$

On peut au besoin déduire de cette expression le travail total nécessaire pour faire le vide. Soit H la pression initiale dans le récipient; on aura, pour le premier coup de piston,

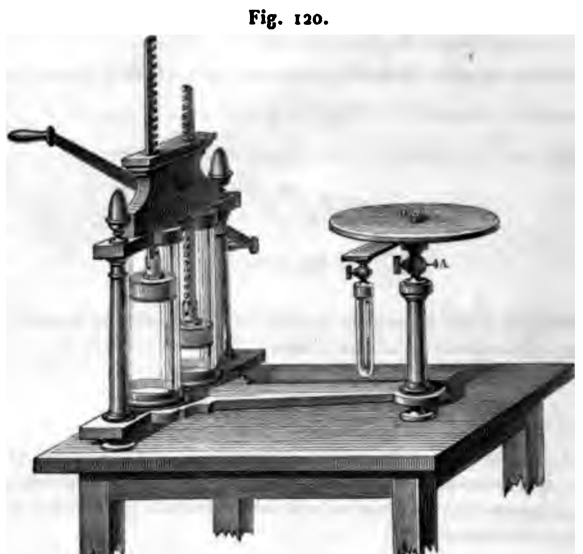
$$T_1 = -\frac{ABH}{A+B} - \frac{ABH}{A+B}L.\left(\frac{A+B}{A}\right) + AH\,L.\left(\frac{A+B}{A}\right);$$

la pression P se trouvant alors réduite à $\frac{AH}{A+B}$, on a, pour le second coup de piston,

$$T_2 = -\frac{ABH}{A+B}\frac{A}{A+B} - \frac{ABH}{A+B}\frac{A}{A+B}L.\left(\frac{A+B}{A}\right)^2 + AH\frac{A}{A+B}L.\left(\frac{A+B}{A}\right),$$

deux corps de pompe, réunis en un tronc unique, viennent

Fig. 120.



aboutir au centre O d'un plateau, où ils se terminent par un

---

et de même

$$T_3 = -\frac{ABH}{A+B}\left(\frac{A}{A+B}\right)^2 - \frac{ABH}{A+B}\left(\frac{A}{A+B}\right)^2 L.\left(\frac{A+B}{A}\right)^3 + AH\left(\frac{A}{A+B}\right)^2 L.\left(\frac{A+B}{A}\right),$$

....

Pour un nombre infini de coups de piston, le travail U sera

$$(6)\quad U = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots = -\frac{ABH}{A+B}\left[1 + \frac{A}{A+B} + \left(\frac{A}{A+B}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$-\frac{ABH}{A+B}\left[1 + \frac{2A}{A+B} + 3\left(\frac{A}{A+B}\right)^2 + 4\left(\frac{A}{A+B}\right)^3 + \ldots\right] L.\left(\frac{A+B}{A}\right)$$

$$+ AH\left[1 + \frac{A}{A+B} + \left(\frac{A}{A+B}\right)^2 + \ldots\right] L.\left(\frac{A+B}{A}\right).$$

Le premier terme de U a pour valeur $-AH$; le second et le troisième se détruisent. On a donc

$$(7)\qquad U = -AH.$$

Ce résultat est indépendant des dimensions du corps de pompe.

Le travail à exécuter par la force appliquée aux pistons sera $-U = AH$.

Nous démontrerons plus tard, par une voie beaucoup plus simple, que cette expression est générale, quel que soit le procédé employé pour faire le vide.

bouton à vis sur lequel on peut fixer tous les appareils dans lesquels on a besoin de faire le vide, et ils portent à cet effet un écrou qui s'accorde avec le bouton de la machine. Enfin le plateau au centre duquel vient déboucher ce bouton terminal est recouvert d'une glace bien plane, dont la surface a été adoucie à l'émeri fin et sur laquelle on peut appliquer des cloches rodées, en prenant seulement la précaution de garnir leurs bords avec un peu de suif. Par ce moyen, leur adhérence devient parfaite, et le vide se fait aussi bien dans leur intérieur que si elles faisaient corps avec la machine.

ROBINET. — Mais, quand le vide a été fait, il est absolument impossible d'enlever les cloches qui sont maintenues sur la platine par l'énorme pression atmosphérique qu'elles supportent; on sent dès lors la nécessité d'avoir un robinet pour laisser rentrer l'air après qu'on l'a enlevé. On conçoit, en outre, que non-seulement il faut pouvoir ramener l'air quand on le désire, mais encore empêcher sa rentrée pendant tout le temps que l'on veut maintenir le vide. Or, comme les pistons et les soupapes ne peuvent être hermétiquement fermés et qu'ils laissent toujours filtrer un peu d'air, il est nécessaire de supprimer toute communication entre eux et le récipient aussitôt qu'on cesse de manœuvrer la machine. C'est un même robinet qui suffit à ce double besoin; il est placé en A (*fig.* 120) et dessiné en coupe (*fig.* 121) dans le trajet du tube CV, qui va du récipient V au corps de pompe C. Il est traversé de part en part par un canal M, qui peut à volonté ouvrir ou fermer CV, et il est en outre percé d'un conduit coudé HE, par lequel il puise de l'air dans l'atmosphère pour l'introduire soit dans le récipient V, soit dans le corps de pompe C, suivant la position qu'on lui donnera; on peut fermer ce conduit par un bouchon métallique rodé P.

Pour bien comprendre le jeu de ce robinet, coupons-le par une section perpendiculaire à son axe (*fig.* 122, nos 1, 2, 3); si nous le tournons dans la première position, nous établirons par le canal M une communication entre le corps de pompe C et le récipient V, nous pourrons faire le vide, et une lettre O gravée sur la face supérieure de la clef indiquera à l'opérateur

que le robinet est *ouvert*. Dans la situation n° 2, le récipient V ne communique plus avec la pompe, il ne reçoit pas l'air qu'elle laisse rentrer, et la lettre F qui se lit sur la partie supérieure

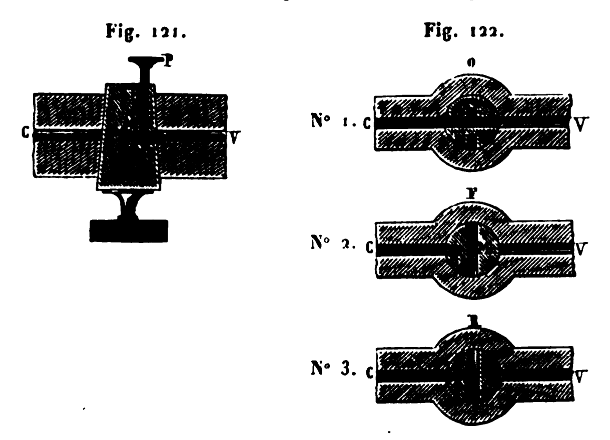


Fig. 121. Fig. 122.

de la clef avertit que la machine est *fermée*. Enfin l'on peut placer le robinet comme il est représenté n° 3, ce qui réunit le récipient à l'atmosphère par le conduit HE, et la lettre R, qui signifie *rentrée*, indique que l'air peut être ramené dans la cloche en enlevant le bouchon P.

Fig. 123.

DEGRÉ DE VIDE. — Il faut maintenant savoir quel est à un moment donné le degré de vide obtenu, et à cet effet toute machine porte un baromètre (*fig.* 123); il est enveloppé d'une éprouvette de verre qui est en communication avec le récipient, de façon qu'au moment où l'on fait le vide dans celui-ci on le fait également dans la portion limitée d'atmosphère qui entoure le baromètre. On voit donc le niveau baisser dans le tube fermé F et monter dans le tube ouvert G jusqu'au moment où, le vide étant parfait, il n'y a plus aucune différence de niveau. A chaque instant la pression de l'air est représentée par la différence de hauteur des deux colonnes. Généralement, ce baromètre est tronqué, c'est-à-dire qu'on

donne à la branche FH une hauteur de $0^m,30$ à $0^m,40$ seulement; dès lors, le baromètre ne commence à baisser qu'au moment où la pression de l'air devient inférieure à une colonne de mercure égale à FH, et l'appareil ne sert à juger le degré du vide que lorsque ce vide est presque complet.

Quelques machines anciennes possèdent un baromètre complet, mais on y a renoncé, et, toutes les fois qu'il faut mesurer avec précision la pression de l'air dans l'appareil, M. Regnault conseille de joindre aux enceintes que l'on vide un appareil spécial, indépendant de la machine et qu'il nomme *manomètre barométrique*. Il se compose d'une cuvette de fonte (*fig.* 124), qui est divisée en deux compartiments par une cloison; dans l'une des auges plonge un baromètre parfait A de section très-grande, et dans l'autre se rend un tube B ouvert à ses deux extrémités et mis en relation par le haut avec les appareils dans lesquels on raréfie l'air. Avant d'opérer, on ajoute assez de mercure pour couvrir la cloison médiane et faire communiquer les auges. Au moment où le vide se fait, le mercure monte dans le tube ouvert, et la pression de l'air restant est marquée par la différence de hauteur du mercure dans les deux tubes, différence que l'on mesure au cathétomètre. Si l'on veut au même moment connaître la pression atmosphérique, on mesure la différence des niveaux entre le sommet A du baromètre et l'extrémité supérieure de la pointe M, après avoir fait affleurer sa base avec le mercure du réservoir, et l'on ajoute à cette différence la hauteur de la vis. Toutes les fois que l'on a besoin de mesurer la pression, c'est cet appareil qu'il faut consulter; si l'on ne veut que juger approximativement le degré de vide auquel on arrive, l'éprouvette de la machine est suffisante.

Fig. 124.

CALCUL DES ÉPUISEMENTS. — Quel degré de raréfaction peut-on

produire avec une machine pneumatique? C'est une question dans laquelle il faut à la fois tenir compte et des conditions théoriques et de la bonne confection de l'instrument. A ne considérer que le point de vue abstrait, elle est facile à traiter. Soient A la capacité du réservoir, B celle du corps de pompe; admettons qu'il n'y ait qu'un piston, qu'il soit préalablement abaissé, et que la quantité d'air contenue alors dans le récipient A soit à une pression P quelconque. Quand le piston se soulève, cet air occupe le volume A + B sous une pression x_1, qui, d'après la loi de Mariotte, est

$$x_1 = \frac{A}{A+B} P.$$

Quand le piston s'abaisse, l'air est expulsé du corps de pompe et il demeure dans le récipient à la pression x_1. L'effet d'un corps de pompe a donc été de réduire la pression de l'air du récipient dans le rapport $\frac{A}{A+B}\cdot$ L'effet de n coups de pompe sera de le réduire dans le rapport $\left(\frac{A}{A+B}\right)^n$:

$$x_n = \left(\frac{A}{A+B}\right)^n P.$$

La pression x_n dans le récipient tend vers zéro d'autant plus vite que la fraction $\frac{A}{A+B}$ est plus petite, c'est-à-dire que le corps de pompe est plus grand.

Toutefois, le calcul qui précède ne répond pas aux conditions pratiques réalisées dans les machines pneumatiques, car les meilleures ne peuvent diminuer la pression de l'air du récipient au delà de 1^{mm} ou 2^{mm}. Il n'est pas difficile de voir en quoi notre calcul est incomplet.

Dans une machine, quelque bonne qu'elle puisse être, il y a des joints nombreux qui ne sont point parfaits : ce sont les contacts entre les pistons et les cylindres, c'est la soupape, c'est la tige qui ferme la base du cylindre, ce sont les soudures, les robinets, c'est enfin le métal lui-même qui est souvent percé de conduits imperceptibles, mais pénétrables. Dès lors,

pendant qu'on enlève de l'air par le jeu de la machine, il en rentre par tous les joints. Au premier moment, l'épuisement est plus rapide que la rentrée; mais il se ralentit peu à peu, et il arrive une époque où les deux actions se compensent; alors la limite est atteinte, et un plus long travail ne produit plus d'effet.

Limitée déjà par cette première imperfection, la puissance de la machine est encore restreinte par une autre cause. Pour que le vide puisse avancer, il faut en effet que l'air puisé dans le récipient à chaque course ascendante atteigne, après que le piston est ensuite abaissé, assez d'élasticité pour soulever le clapet. Cela arriverait si la base du piston pouvait adhérer exactement au fond du cylindre; mais il reste toujours entre ces deux pièces et sous le clapet assez d'espace (espace nuisible) pour loger de l'air qui n'est point expulsé, et il arrive un moment où ce gaz, qui se dilate quand le piston monte, ne sort pas quand il descend; alors encore on arrive à la limite du vide possible.

Soient

e l'espace nuisible;
a la pression exercée par la soupape;
H la pression atmosphérique.

L'air logé dans l'espace nuisible est à la pression $H + a$; répandu dans le corps de pompe, il y posséderait une tension ε

$$\varepsilon = \frac{e}{B}(H + a);$$

tant que la pression P de l'air du récipient sera supérieure à ε, il passera de l'air du récipient dans le corps de pompe quand on soulèvera le piston, et, par suite, la pression diminuera dans le récipient, mais en restant supérieure à ε [1]. L'effet de l'espace nuisible est donc de substituer à une limite de vide nulle une limite de vide finie, égale à $\frac{e(H + a)}{B}$.

---

[1] La pression x_1, quand le piston est au haut de sa course, est donnée par

DISPOSITIF DE BABINET. — On doit à Babinet une disposition qui recule notablement cette limite du vide. Elle consiste dans l'addition d'un nouveau robinet qui se place habituellement dans l'axe même du tuyau qui réunit les conduits des deux corps de pompe; il est percé d'abord d'un trou transversal CD, ensuite d'un conduit longitudinal o, et, quand il occupe une première position (*fig.* 125, n° 1), il ne change aucunement les communications habituelles; mais quand on le tourne de 90° (n° 2), tout est modifié. Le corps B continue d'être en communication avec le récipient par le conduit oE, mais le corps A en est séparé. Quand on soulève le piston B, l'air arrive; quand on le baisse, il est chassé dans le corps A, qui est alors ouvert, par un petit tube latéral mpn qui traverse le

---

la loi du mélange des gaz

$$(1)\qquad (A+B)x_1 = AP + e(H+a),$$

$$x_1 = \frac{A}{A+B}P + \frac{e(H+a)}{A+B}.$$

Si $P > \frac{e(H+a)}{B}$, on a

$$x_1 > \frac{e(H+a)}{A+B}\left(\frac{A}{B}+1\right),$$

c'est-à-dire

$$x_1 > \frac{e(H+a)}{B}.$$

L'équation (1) permet d'ailleurs de faire le calcul de l'épuisement en tenant compte de l'espace nuisible. On a, en effet,

$$x_1 = \frac{A}{A+B}P + \frac{e(H+a)}{A+B},$$

$$x_2 = \frac{A}{A+B}x_1 + \frac{e(H+a)}{A+B},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_n = \frac{A}{A+B}x_{n-1} + \frac{e(H+a)}{A+B}.$$

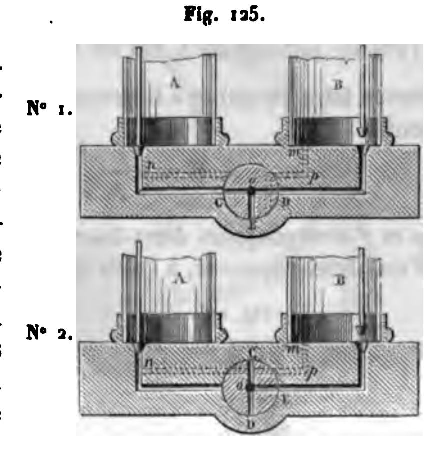
Il suffit d'éliminer entre ces équations $x_2, x_3, \dots$; on obtient

$$x_n = \left(\frac{A}{A+B}\right)^n P + \frac{e(H+a)}{A+B}\left[1 + \frac{A}{A+B} + \dots + \left(\frac{A}{A+B}\right)^{n-1}\right].$$

Le premier terme de la valeur de x_n tend vers zéro avec n; c'est la valeur que posséderait la pression si l'on ne tenait pas compte de l'espace nuisible. Le second a pour limite $\frac{e(H+a)}{B}$.

robinet. En abaissant ensuite le piston dans le cylindre A, l'air qu'on y a amené y reste emprisonné, puisque la tige mobile ferme la base. Voici donc le jeu de la machine : le corps B n'a plus pour fonction que d'enlever l'air au récipient et de le chasser dans le corps A; là il s'accumule peu à peu, et bientôt il y acquiert assez de force pour soulever la soupape. Comme celle-ci produit une légère explosion quand elle se soulève, on entend très-clairement l'action qui se produit. Au premier moment, la soupape de A s'ouvre toutes les fois qu'elle descend, plus tard elle ne s'ouvre que de deux coups en deux coups, ensuite de trois en trois, et enfin elle ne s'ouvre plus du tout; c'est qu'alors l'air qui se condense dans *mpn* et sous le piston B, quand il est abaissé, reprend une pression égale à celle du récipient quand on relève le piston B. A ce moment, la puissance de la machine est à sa limite, et les épuisements ne font que contre-balancer les rentrées anomales. Si celles-ci sont négligeables, la modification de Babinet améliore beaucoup la machine.

Fig. 125.



En effet, soient ρ le rapport de l'espace nuisible à la capacité du corps de pompe A, ρ' le même rapport pour le corps de pompe B. Si l'on pouvait atteindre la limite du vide, l'air du récipient posséderait une pression y égale à celle que prend, en se répandant dans le corps de pompe B, l'air confiné dans son espace nuisible. La pression de cet air dans l'espace nuisible serait donc $y\frac{1}{\rho'}\cdot$ D'autre part, puisque la limite de vide est supposée atteinte, il ne peut passer de l'air de B dans A, quand le piston B est en bas de sa course; car alors, quand on soulèverait de nouveau le piston B, la pression dans B serait infé-

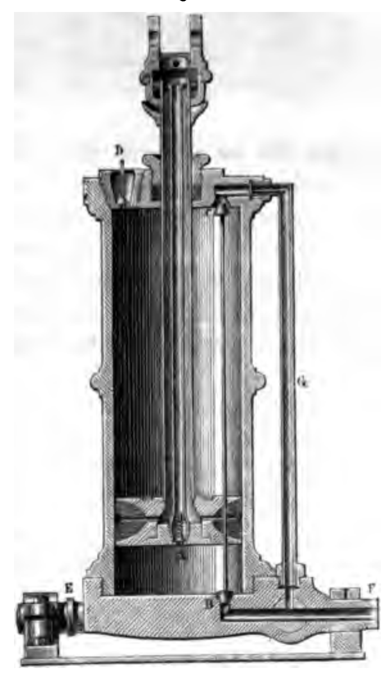
rieure à y et ce corps de pompe pourrait de nouveau faire le vide dans le récipient. Il faut donc que l'air de A possède justement la pression $y\frac{1}{\rho'}$ quand, le piston A étant au haut de sa course, les deux corps de pompe communiquent. Refoulé dans l'espace nuisible de A, cet air aura une force élastique $y\frac{1}{\rho}\frac{1}{\rho'}$ et devra faire équilibre à la pression atmosphérique H. On a donc enfin

$$H = y\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho'}, \quad y = \rho\rho' H.$$

ρ et ρ' sont toujours deux fractions extrêmement petites. Aussi l'on obtient souvent, à l'aide des machines auxquelles la modification de M. Babinet est appliquée, un vide tel, qu'il n'est plus possible de saisir de différence dans la hauteur des deux colonnes du mercure.



Fig. 126.



MACHINE DE BIANCHI. — La machine que nous venons de décrire est celle qui est employée dans tous les laboratoires : elle laisse bien peu à désirer; cependant on la remplace avantageusement, dans bien des cas, par celle de Bianchi. Cette machine n'a qu'un corps de pompe fermé aux deux bouts et que le piston partage en deux parties fonctionnant séparément. La communication avec le récipient se fait par deux tubes aboutissant chacun à l'une des deux bases du cylindre en C et B (*fig.* 126), et une seule tige glissante vient alternative-

ment fermer les deux orifices par le moyen de bouchons coniques. Deux soupapes d'expulsion sont disposées, l'une en D, sur le couvercle supérieur, l'autre en A, dans la tige du piston,

Fig. 127.



qui est creuse; elles sont faites comme les soupapes déjà décrites. Si l'on soulève le piston, il puise l'air par sa partie inférieure et il le chasse par le compartiment supérieur; si on l'abaisse, les rôles changent : c'est la capacité supérieure qui reçoit l'air, c'est l'inférieure qui expulse celui qu'elle avait

reçu. Bien qu'il n'y ait qu'un corps de pompe, on obtient le même effet que s'il y en avait deux, puisque la même course donne une double action, et la pression atmosphérique se compense aussi bien que précédemment, ou plutôt elle ne s'exerce pas sur le piston.

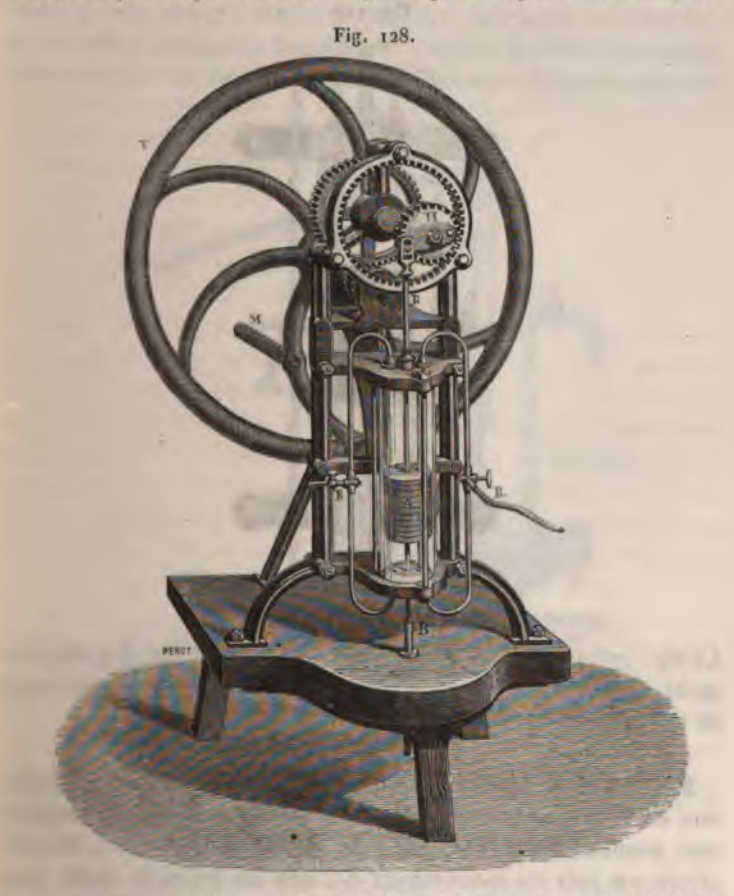
On trouve dans cette machine à la fois autant d'avantages et plus de simplicité que dans l'autre. On y trouve encore une autre supériorité : c'est celle de son mécanisme, dont il nous reste à parler. Le cylindre est posé sur un axe tournant EF (*fig.* 127), et la tige du piston est attachée à la manivelle H d'un volant. Quand on tourne celui-ci, le piston s'élève ou s'abaisse en même temps qu'il oscille, et le cylindre mobile s'incline et oscille avec lui. Le mouvement alternatif de l'ancienne machine est donc remplacé par un mouvement de rotation, ce qui est toujours plus simple, et la vitesse est rendue constante par le moyen d'un volant très-lourd. Tout l'appareil étant en fonte, on peut augmenter autant qu'on le veut les dimensions du cylindre, ce qui permet de faire le vide plus rapidement et dans de plus grandes enceintes. Quant au tube d'aspiration, qui est formé d'une spirale recouverte de caoutchouc, il part de l'extrémité F, il est long et flexible, et on peut le mettre en relation avec tous les appareils où l'on veut faire le vide sans les déplacer.

MACHINE DE M. DELEUIL (¹). — On sait que les gaz circulent difficilement à travers les conduits capillaires et que cette difficulté s'exagère beaucoup si les conduits présentent des étranglements et des dilatations alternatifs. Il résulte de là que, si le piston d'une machine était muni d'un semblable tube mis en communication avec l'atmosphère, il ferait tout aussi bien le vide, car les rentrées ou les sorties d'air pendant l'élévation ou l'abaissement du piston seraient insignifiantes. Frappé de cette idée, M. Deleuil construit un piston métallique plein A (*fig.* 128), très-long, qui ne touche point au cylindre, mais qui n'en est séparé que par un espace de $\frac{1}{50}$ de millimètre, et qui

(¹) DELEUIL, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LX, p. 571; *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. V, p. 174.

est sillonné de rainures horizontales. Par ce moyen, M. Deleuil supprime les huiles et le frottement, par conséquent l'usure et l'échauffement, sans nuire à la bonne marche de l'instrument, attendu que la pellicule d'air qui sépare le piston du corps de

Fig. 128.



pompe est sensiblement immobile et n'éprouve que des dilatations et des compressions alternatives. La machine est à un seul corps et à double effet; le mouvement est donné par une tige BB' qui traverse les deux fonds, ce qui empêche les oscillations du piston. Une seconde tige CC' qui glisse à frottement dans le piston ouvre et ferme par deux bouchons coniques les

reçu. Bien qu'il n'y ait qu'un corps de p
même effet que s'il y en avait deux, pui
donne une double action, et la pres-
compense aussi bien que précédemn
s'exerce pas sur le piston.

On trouve dans cette machine à l
plus de simplicité que dans l'aut
autre supériorité : c'est celle de
reste à parler. Le cylindre est
(*fig.* 127), et la tige du pisto
d'un volant. Quand on tour
s'abaisse en même temps q
s'incline et oscille avec lui
cienne machine est donc
tion, ce qui est toujours
constante par le moyen
étant en fonte, on peu
mensions du cylindre
dement et dans de
d'aspiration, qui e-
chouc, il part de
peut le mettre e
faire le vide sa



semble de l'instrument. Le mouve-
piston au moyen de l'engrenage

MACHINE D'
difficilemen
ficulté s'ex
étrangleme
si le pi
en comm
le vide.
ou l'a
cell
(*fi*
n

Pour opérer rapidement la congéla-
dans le vide, M. Carré emploie
de pompe P (*fig.* 130), dont le
à l'aide du levier L. Une sou-
fait communiquer à travers
corps de pompe avec sa partie
S fait communiquer celle-
disposition présente un double
n'est soumis sur ses deux
et le travail employé à



ıu minimum (voir p. 240, en note). En
^rieure du corps de pompe joue le
machine pourvue du dispositif de
·st réduite à la même valeur
des soupapes est automa-
ifice qu'elles sont desti-
·levées par la pression



du piston contre les bases du corps de pompe, quelque faible que soit la pression de l'air contenu dans l'appareil.

La boîte B contient de l'acide sulfurique, qui absorbe la vapeur d'eau quand on fait le vide dans la carafe D. Un agitateur dont la tige s'adapte au levier F renouvelle constamment la surface absorbante, de manière à annuler sensiblement la pression produite par la vapeur. L'appareil peut d'ailleurs servir à toutes les expériences auxquelles on emploie la machine pneumatique ordinaire. Une platine, que l'on peut mettre en communication avec la pompe par un tube de

caoutchouc, recevra par exemple la cloche E dans laquelle on voudra faire le vide.

MACHINE PNEUMATIQUE A MERCURE ([1]). — Le vide barométrique étant bien plus parfait que celui que l'on peut obtenir avec un piston se mouvant dans un corps de pompe, l'idée de faire une machine pneumatique fondée sur l'expérience de Torricelli a été mise en pratique par divers constructeurs, et en particulier par Geissler ([2]). Nous allons donner une description de cette machine, telle que M. Alvergniat l'a modifiée et perfectionnée.

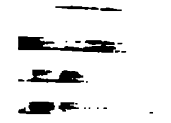
Un réservoir B (*fig.* 131) communique par un tube de caoutchouc I suffisamment long avec un tube baromét... terminé à sa partie supérieure par un renflement oblong ... forme la chambre barométrique. Le réservoir B est la cu... La chambre barométrique A est terminée par un rob... trois voies D qui permet d'établir la communication ... l'atmosphère extérieure au moyen du second robinet ... l'entonnoir R, soit avec l'appareil dans lequel on veu... vide, lequel est mis en communication avec le robin... le trajet, on a placé un petit réservoir H contenant ... sulfurique concentré, destiné à dessécher le gaz ; ce... tion est indispensable si l'on veut arriver à un ... Enfin un manomètre tronqué indique la pression.

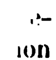
Donnons maintenant la manœuvre de l'app... vette B, soutenue par une chaîne sans fin et équi... contre-poids qui descend dans le bâti de l'instr... élevée par le jeu d'une manivelle jusqu'à un ni... que la chambre A, laisse couler du mercure da... et en chasse l'air à travers le robinet D par ... fait, on met la chambre barométrique en com... l'appareil dans lequel on veut faire le vide ... net à trois voies D ... alors descend... moyen de la ma... mercure des...

([1]) En 1857. L'i... baromètre ... est très ancienne.

([2]) Cette dis... de la ... dorff (*Ann.* ...



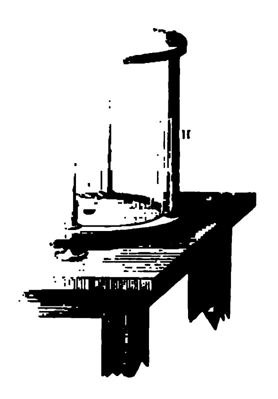




ion

, de la





ux corps de pompe dont les
erses comme dans une machine
le l'atmosphère n'intervient plus
, et la totalité du travail dépensé
nalogie de leurs fonctions, les deux
avoir des formes très différentes;
ion telle que celle qui est représen-
trouve encore dans quelques cabi-

cessaire pour que le vide soit complet. Cette machine fait le vide à moins de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

MACHINE DE COMPRESSION [1]. — Après avoir décrit en détail la machine qui raréfie les gaz, nous allons faire connaître celle qui servira à produire l'effet opposé, la machine de compression. On peut dire qu'il suffira de changer le sens de toutes les soupapes pour transformer la pompe pneumatique en pompe de compression. Supposons, par exemple, que les soupapes S et S' (*fig.* 132) s'ouvrent de haut en bas. Quand on soulèvera le piston, le vide se fera dans le cylindre, S' se fermera par la pression P du gaz enfermé dans le récipient, S s'ouvrira par l'effort de l'atmosphère, et toute la capacité A du corps de pompe se remplira d'air. Quand on viendra ensuite à baisser le piston, ce gaz prendra une élasticité plus grande, fermera S, ouvrira S' et s'introduira dans le récipient B. La pression de l'air, qui y était P, deviendra $P + \frac{A}{B} H$. On répétera ensuite l'opération autant de fois qu'on le voudra : à chaque course ascendante on prendra à l'atmosphère une quantité constante d'air; à chaque marche descendante on la fera entrer dans le réservoir, et la masse d'air enfermée, par suite sa pression, croîtra suivant les termes d'une progression arithmétique dont la raison sera $\frac{A}{B} H$. Cette action aura une limite que l'on atteindra forcément par les mêmes causes que dans la machine pneumatique : d'une part, il y aura des fuites croissantes et qui finiront par égaler les introductions; d'autre part, tout l'air puisé dans le cylindre A finira par se loger dans l'espace ε laissé sous le piston, en y acquérant justement une élasticité égale à celle du gaz déjà condensé; alors la soupape S' ne

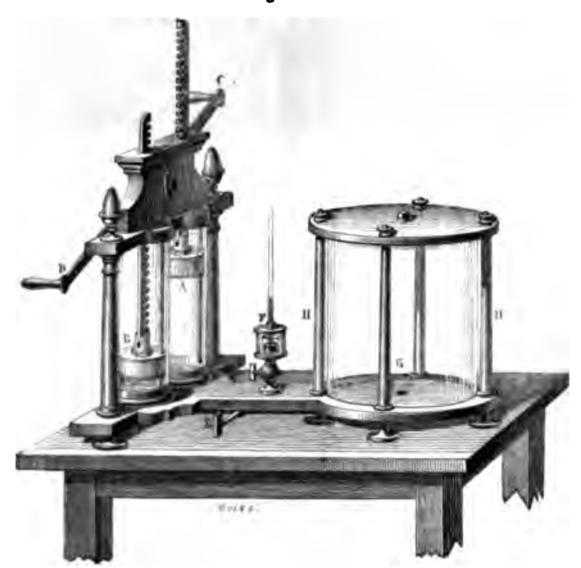
Fig. 132.

(1) La pompe de compression a été imaginée par Boyle (POGGENDORFF, *Gesch. der Physik*, p. 472).

s'ouvrira plus, et la pression du gaz dans le récipient sera $\frac{A}{\varepsilon}$ H : ce sera la limite de la compression. On voit, de plus, que l'effort qu'il faudra exercer pour faire pénétrer l'air ira en augmentant; car il faudra ouvrir la soupape B, et l'air confiné qui la ferme résistera d'autant plus qu'il sera plus comprimé. Plus le piston aura d'étendue, plus la difficulté deviendra grande. Il faudra donc lui donner la plus petite section possible.

On ne peut d'ailleurs espérer de diminuer le travail de la

Fig. 133.

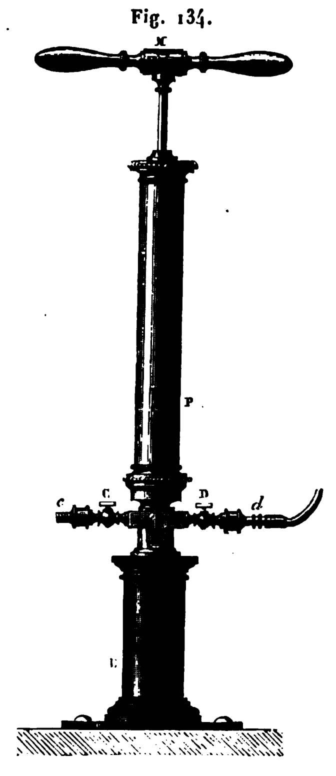


compression en accouplant deux corps de pompe dont les pistons se meuvent en sens inverses comme dans une machine pneumatique, car la pression de l'atmosphère n'intervient plus ici pour gêner le mouvement, et la totalité du travail dépensé est utilisée. Aussi, malgré l'analogie de leurs fonctions, les deux sortes d'appareils devront avoir des formes très différentes : une machine de compression telle que celle qui est représentée *fig.* 133, et que l'on trouve encore dans quelques ate-

nets de Physique, serait aussi mauvaise que la machine pneumatique du même modèle est bonne; elle n'aurait pas de solidité et serait une cause de danger sans être un instrument utile.

POMPE A MAIN. — La machine de compression la plus employée est une simple pompe à main (*fig.* 134). Elle se

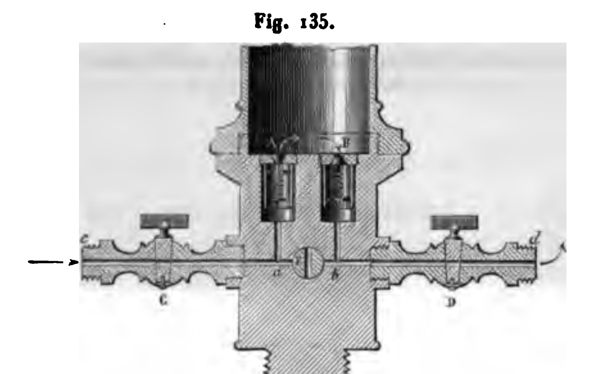
Fig. 134.



place sur le sol où elle repose par une masse métallique E, dont la base est large; elle n'a qu'un corps de pompe P, et le piston, qui est plein, se termine par un manche horizontal de bois tourné M. L'expérimentateur pose les deux pieds sur le rebord de la base, saisit le manche à deux mains et le soulève ou l'abaisse alternativement. Il y a deux clapets

A et B (*fig.* 135); tous deux sont placés à la base du cylindre et affleurent avec sa surface : l'un A se meut de bas en haut et communique avec un tube d'aspiration *ac*, il s'ouvre quand on élève le piston; l'autre B est disposé en sens inverse, il ouvre le conduit *bd* quand on descend le piston. En résumé, si deux réservoirs sont mis en rapport avec *c* et *d*, l'un

Fig. 135.



recevra à chaque coup de piston le gaz qui sera pris dans l'autre; le premier se videra, le second s'emplira. Cet appareil est à la fois une pompe de compression et une pompe aspirante. Dans le trajet des deux conduits *ac* et *bd* sont placés deux robinets C et D, qui les ferment au besoin, et un troisième robinet E, placé entre eux, sert, quand on l'ouvre, soit à rendre l'air dans le récipient *c*, soit à le laisser sortir du réservoir *d*.

GRANDE MACHINE A COMPRESSION. -- Avec une extrême simplicité de forme et une grande modicité de prix, l'appareil précédent suffit dans la plupart des cas. Si l'on veut une machine plus puissante, destinée à comprimer ou à dilater les gaz dans de grandes enceintes, on ne change rien à cette construction; seulement on réunit deux ou trois corps de pompe semblables (*Pl. I, fig.* 2). On les fixe solidement, on met tous les conduits d'aspiration en rapport avec une sphère O et tous les tubes de compression avec un autre réservoir pareil J. Toutes

les tiges de piston reçoivent le mouvement d'un axe commun, et une manivelle munie d'un volant sert à faire tourner régulièrement cet axe. Tout cet appareil est établi sur le sol, où il est boulonné, et toutes les parties sont reliées solidement entre elles par de forts madriers; il est construit comme une machine industrielle, avec plus de solidité que d'élégance, et l'on peut s'en servir pour obtenir des pressions de 30^{atm}. C'est l'appareil qui a servi à Regnault quand il étudiait la loi de Mariotte, et que nous retrouverons quand nous parlerons des vapeurs.

CHAPITRE VII.

APPAREILS DIVERS.

Pressions dans un liquide en mouvement. — Tourniquet hydraulique. — Fontaine de Héron. — Fontaine intermittente. — Siphon. — Trompe.

PRESSIONS DANS UN LIQUIDE EN MOUVEMENT. — Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fluides en équilibre, dans lesquels chaque élément est soumis sur ses faces opposées à des pressions normales égales. Si l'on supprimait ou si l'on diminuait l'une des deux pressions, le liquide se mettrait en mouvement dans le sens de la plus forte. Pour s'en convaincre, il suffit de percer un orifice dans la paroi d'un vase : le liquide s'écoule, et la direction du jet est normale au plan de l'orifice. La vitesse de l'écoulement est, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grande que la pression qui le produit est plus considérable, c'est-à-dire que l'orifice est situé plus bas ; mais il n'y a aucune proportionnalité entre les deux grandeurs. Soit h la distance du niveau du liquide de densité d à l'orifice : la pression qui produit l'écoulement, rapportée à l'unité de surface, est $p = hd$; la vitesse est donnée, pour le cas d'un orifice percé dans une paroi sans épaisseur, par la formule

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2gp}{d}}$$

due à Torricelli (1), et que nous démontrerons ailleurs. Pour faire la théorie des appareils que nous allons décrire, il suffit, en effet, de connaître la direction du mouvement produit par

---

(1) TORRICELLI. *Trattato del moto dei gravi* ; Firenze, 1641.

des pressions normales inégales; il n'est pas indispensable d'en connaître la vitesse.

TOURNIQUET HYDRAULIQUE. — Plaçons sur un flotteur de liége (*fig.* 136) un vase plein d'eau qui est muni d'un conduit latéral A. Quand celui-ci est bouché, la résultante des pressions exercées par le liquide sur les parois est verticale, et le vase n'a aucune tendance à se déplacer horizontalement; mais, si l'on ouvre l'orifice, on supprime la pression qui s'exerçait contre la paroi dans le sens A'A, le liquide s'écoule et le vase se meut en sens contraire de l'écoulement. De même le canon recule par l'effet de la pression des gaz de la poudre, tandis que le projectile est lancé en avant.

Fig. 136.

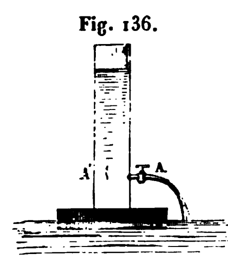
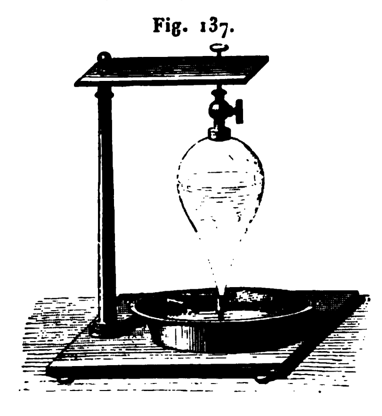


Fig. 137.



Le tourniquet hydraulique (*fig.* 137) est fondé sur le même principe. C'est un vase plein d'eau qui est mobile autour d'un axe vertical, qui porte à son sommet un robinet et à sa base deux tubes horizontaux recourbés et très-étroits. Tant que le robinet est fermé, l'eau est maintenue dans le vase par la pression atmosphérique; quand il est ouvert, elle s'écoule par l'extrémité des tubes; ceux-ci reculent par la réaction, et l'appareil tourne autour de son axe.

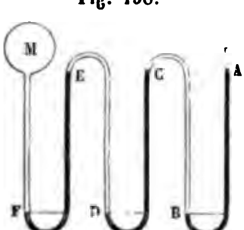
FONTAINE DE HÉRON ([1]). — Quand un gaz est superposé à un liquide, il exerce une pression qui se transmet dans toute la masse de ce liquide et sur tous les éléments des parois du vase

([1]) Héron avait disposé des vases à réaction fondés sur l'emploi de la vapeur. Il connaissait déjà l'usage du siphon. Tous ses appareils sont décrits dans un de ses Ouvrages, qui a pour titre *Spiritualia seu pneumatica*, et qui nous est parvenu.

jusqu'au fond. Quand, inversement, c'est un liquide qui est superposé à un gaz, le même effet se produit ; chaque élément pris dans le gaz reçoit la pression exercée par le liquide. A ce fait général il faut ajouter une remarque importante : c'est que dans le premier cas, le liquide étant lui-même pesant, chaque tranche supérieure comprime les inférieures, et aux pressions qui résultent du gaz superposé s'ajoutent celles que la pesanteur détermine dans le liquide. La somme va donc en augmentant de haut en bas, tandis que, le poids des gaz étant négligeable par rapport à celui des liquides, le gaz qui reçoit une pression la transmet dans tous les sens sans la modifier sensiblement. Cette remarque expliquera certains appareils que nous allons décrire.

Concevons, par exemple, une série de tubes recourbés ABCDEF (*fig.* 138) contenant des colonnes de mercure AB,

Fig. 138.



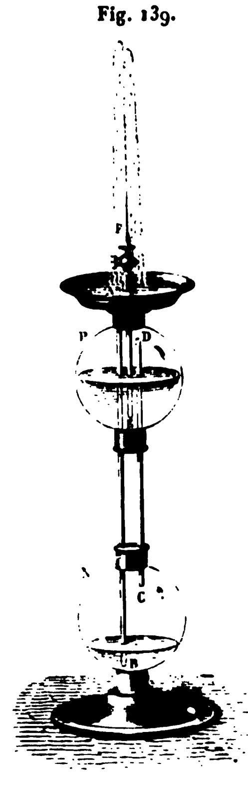
CD, EF, et de l'air dans toutes les autres parties. Nous voulons chercher la pression dans chacun de ces espaces et dans le vase final M. De A en B, la pression augmente dans le mercure jusqu'à être représentée par le poids de la hauteur h ; elle se transmet par la surface B dans tout l'espace BC rempli de gaz, sans diminuer ni augmenter, et elle vient s'exercer en C absolument comme si la colonne AB y était directement placée. A partir de ce point jusqu'en D, la pression augmente et devient $2h$, puis se transmet en E sans altération, par l'intermédiaire du gaz, et enfin de E en F elle devient $3h$. Ainsi la pression dans l'espace M est égale à la somme des hauteurs de mercure, absolument comme si elles étaient superposées [1].

---

[1] Cette disposition avait été imaginée par Amontons pour réduire la lon-

La fontaine de Héron (*fig.* 139) n'est qu'une application particulière de cette loi de transmission. Soit A un bassin plein d'eau, prolongé par un tube AB jusqu'à une capacité N pleine d'air. Le liquide transmet en N la pression atmosphérique augmentée d'une colonne d'eau égale à la différence de niveau AB. Le gaz qui remplit l'espace N transmet cette pression par le conduit CD jusque sur le liquide que contient un troisième espace P. Ainsi il y a la même pression en P qu'en N, et, si un tube EF s'élève à partir de P, on verra le liquide y monter d'une hauteur égale à AB, ou bien, si ce tube est coupé en F, l'eau jaillira.

Fig. 139.



Supposons, par exemple, que le vase N soit situé au niveau du sol (*fig.* 140), qu'il reçoive de l'eau provenant d'une source très élevée M et que le réservoir P soit placé au fond d'une mine. La pression qui sera transmise par le tube CD sur le niveau de l'eau dans P sera égale au poids de l'atmosphère augmenté de MN, et elle fera monter l'eau au-dessus de P par le tube EF jusqu'à une hauteur égale à MN. Cette eau pourra se déverser sur le sol, pourvu que la profondeur de la mine soit au plus égale à MN. En laissant continuer l'écoulement, le réservoir N s'emplira d'eau et P s'emplira d'air. Quand cela aura lieu, on ouvrira le vase N pour le vider et P pour le remplir d'eau prise en B au fond de la mine. Les choses se retrou-

gueur du baromètre. On remarquera que la sensibilité de l'appareil se trouverait aussi réduite, puisque le déplacement de chaque colonne liquide, B par exemple, ne serait plus qu'une fraction de la variation totale de la pression (Poggendorff, *Geschichte der Physik*, p. 501).

veront dans leur état primitif, et l'on recommencera l'épuisement. C'est la machine de Schemnitz.

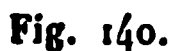
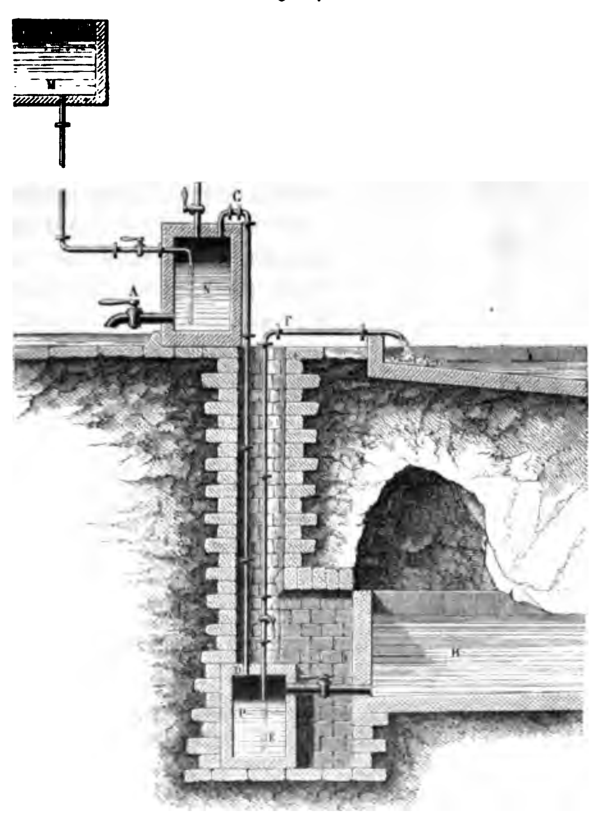


Fig. 140.



Voici un second appareil qui fonctionne d'après les mêmes actions.

FONTAINE INTERMITTENTE. — Un réservoir que l'on peut emplir d'eau et fermer ensuite par un bouchon K (*fig.* 141) se termine à sa partie inférieure par plusieurs petites ouvertures A, B. Un tube P*p*, qui débouche en *p* à la partie supérieure du vase, sert à le supporter dans une cuvette MN, et son extrémité inférieure

P s'ouvre à une très-petite distance du fond de la cuvette. Il est clair que la pression de l'atmosphère se transmet par l'intérieur de cette colonne et vient s'exercer sur CD. De CD en AB, cette pression s'augmente du poids de la colonne CA. Par suite, la pression qui s'exerce vers l'extérieur en A et B est égale à la pression atmosphérique augmentée de CA; comme la pression dirigée vers l'intérieur est seulement égale à celle de l'atmosphère, l'eau sortira sous l'influence d'un excès de pression mesuré par CA. Mais l'eau tombant dans le bassin MN s'y accumule et bientôt s'élève jusqu'à l'ouverture P, qu'elle bouche; à ce moment, la pression atmosphérique cesse de s'exercer dans la colonne et sur CD, et, comme l'eau continue de s'écouler, l'espace occupé par l'air augmente, sa pression diminue, et l'on voit le niveau s'élever peu à peu dans le tube jusqu'en E. Alors la pression en ce point est H — PE (H étant la pression atmosphérique); elle est la même sur CD, et en A elle est représentée par H — PE + CA. Quand PE est devenu égal à CA, le liquide reçoit en A la pression de l'atmosphère de dehors en dedans et de dedans en dehors. Alors l'écoulement cesse.

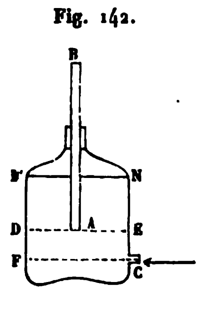
Fig. 141.



Il y a au bassin un tube d'écoulement, mais qui débite moins d'eau que les ouvertures A et B; peu à peu cependant l'eau s'écoule, fait baisser le niveau dans MN jusqu'au-dessous de l'ouverture P. Alors l'air atmosphérique y pénètre, s'insinue dans le tube, y rétablit la pression initiale, et l'appareil, revenu à son état primitif, reproduit les mêmes actions, c'est-à dire que l'eau recommence à couler par les ouvertures A et B jusqu'à ce qu'une seconde occlusion de l'orifice P vienne l'arrêter.

VASE DE MARIOTTE. — Le vase de Mariotte [1] est un autre appareil qui s'explique de lui-même. C'est un flacon contenant de l'eau et surmonté d'un bouchon dans lequel passe un tube AB (*fig.* 142); il est percé en C d'un orifice latéral étroit. Si au commencement de l'expérience le liquide est au niveau commun MN dans le vase et dans le tube, la pression est égale à celle de l'atmosphère sur ce niveau, et sur la couche FC elle est augmentée de la hauteur NC. Le liquide s'écoulera donc par l'orifice C sous l'influence d'un excès de pression mesuré par NC. Mais, aussitôt qu'il commencera à sortir, l'espace occupé par l'air augmentera dans le flacon et la pression diminuera; on verra donc le niveau baisser de plus en plus dans le tube AB et arriver à l'extrémité A.

Fig. 142.



Jusque-là, la pression intérieure a diminué progressivement et l'écoulement s'est fait en se ralentissant peu à peu; mais, aussitôt qu'on atteint cette limite, l'action change. En effet, quand une nouvelle quantité de liquide s'écoulera, la pression continuera à diminuer dans le flacon, et par suite le niveau dans le tube tendra à baisser encore : on verra une bulle d'air descendre de A en prolongeant le canal et baisser de plus en plus; bientôt elle se contournera et remontera dans le flacon pour rejoindre l'air qu'il contient déjà; elle sera suivie d'une seconde et d'une troisième, etc. A partir de ce moment, il y a deux phénomènes distincts : un écoulement continu de liquide qui tend à diminuer la pression intérieure, et une rentrée continue de gaz qui tend à l'augmenter. Pendant ce temps, la couche DE est à la pression de l'atmosphère dans toute son étendue; la pression en CF est celle de l'atmosphère augmentée de la hauteur EC, et l'écoulement du liquide se fait comme si le niveau dans le flacon demeurait constamment fixé en

---

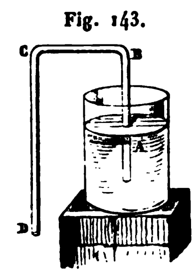
[1] MARIOTTE, *Traité du mouvement des eaux*. Le vase de Mariotte avait été imaginé pour montrer les effets de la pression atmosphérique. Il a été employé plus tard pour produire un écoulement constant.

DE ; cet écoulement sera rapide si la hauteur CE est grande, et sa vitesse diminuera si C se rapproche de E.

Pour résumer, désignons par H la pression de l'atmosphère en A : c'est la pression de la couche DE tout entière. Celle qui s'exerce sur FC est H + EC, et la différence des pressions intérieure et extérieure est égale à EC ; elle peut être positive, nulle ou négative si C est au-dessous de E, ou confondu avec E, ou placé au-dessus de lui, et, dans ce dernier cas, de l'eau rentrerait par l'orifice et le liquide s'élèverait dans le tube AB jusqu'au niveau E. Dans tous les cas, la pression sur MN est H — NE : c'est celle de l'air confiné (¹).

SIPHON. — Comme dernier exemple de ces sortes d'actions, nous citerons le siphon (*fig.* 143) ; c'est un tube à deux courbures ABCD et dont les deux branches AB et CD ont des longueurs inégales h et h'. Il est préalablement rempli d'eau. Plongé en A dans un vase contenant le même liquide, son autre extrémité D s'ouvre librement dans l'air. Les choses étant dans cet état, la pression atmosphérique s'exerce au niveau du liquide en A et tend à faire monter le liquide dans AB ; au point B elle est $H - h$ et dirigée de A en B. D'un autre côté, la pression qui tend à chasser le liquide de B en C est $H - h'$ au point C. Ainsi, sur le même niveau BC, deux pressions inégales agissent sur le liquide en sens inverses et leur différence est $H - h - (H - h')$, ou $h' - h$ agissant de B vers C.

Fig. 143.



Si h' est $> h$, l'eau coulera et tombera par l'orifice D avec

(¹) Le vase de Mariotte des cabinets de Physique est en général muni de plusieurs orifices percés à différents niveaux.

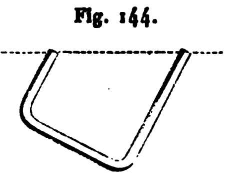
Quand on débouche plusieurs ouvertures, il se produit des phénomènes variés d'écoulement de l'eau et de rentrée de l'air, dont on se rendra compte aisément en étudiant les pressions qui s'exercent dans les deux directions opposées sur chaque orifice et à l'extrémité A du tube.

Ainsi soient deux orifices, l'un O au-dessus de A, l'autre C au-dessous ; l'eau s'écoulera par C, l'air restera par O, et le niveau de l'eau dans le tube AB, devenu inutile, se maintiendra vis-à-vis de O.

une vitesse constante si les niveaux ne changent pas. Quand $h = h'$, l'équilibre aura lieu, et enfin, si l'on suppose $h' < h$, le liquide contenu dans le siphon rentrera dans le vase.

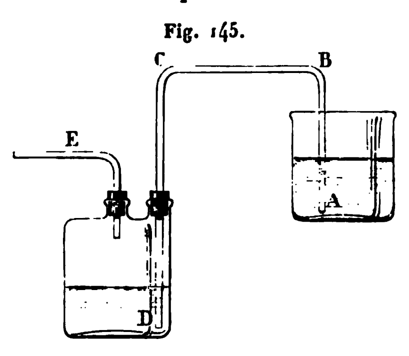
Il est d'ailleurs évident que, si BC se trouvait à une hauteur plus grande que H au-dessus de l'un ou de l'autre des niveaux, la pression atmosphérique ne pourrait plus y amener les liquides; il se ferait un vide barométrique en haut du siphon et il ne fonctionnerait plus. Le même effet aurait lieu dans le vide. On remarquera encore que l'écoulement ne sera pas constant si le siphon est fixe, car le niveau baissera peu à peu dans le vase, puisqu'il se vide; mais, si le siphon était flottant sur le liquide, il baisserait avec lui, et, les pressions restant constantes ainsi que les hauteurs des branches, l'écoulement conserverait la même rapidité pendant toute l'opération.

Fig. 144.



Pour amorcer un siphon étroit, il suffit de le plonger dans une cuve pleine d'eau ou de le remplir en versant l'eau par l'une des branches, tandis que l'on maintient les deux orifices au même niveau en inclinant le siphon, comme l'indique la *fig.* 144. On bouche alors avec le doigt l'extrémité de la longue branche, on retourne le siphon, et l'on fait plonger la petite branche dans le vase que l'on veut vider.

Fig. 145.

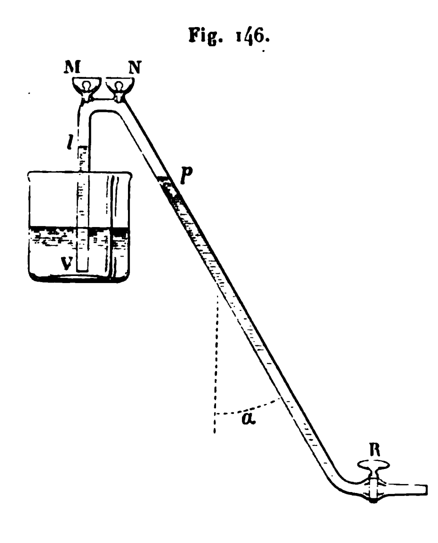


On peut encore mettre en place le siphon plein d'air et diminuer la pression que cet air exerce au niveau du liquide dans A en aspirant, avec la bouche ou à l'aide d'une pompe, soit par l'orifice D, soit par un tube latéral. Dans ce dernier cas, on doit évidemment maintenir l'orifice fermé jusqu'à ce que le siphon soit amorcé; on pourrait aussi engager momentanément l'extrémité D (*fig.* 145) dans un flacon contenant de l'eau, au-dessus de laquelle on comprimerait l'air en soufflant par un tube latéral E. L'air du siphon chassé

par l'air comprimé se dégagerait à travers le liquide de A.

Pour transvaser les liquides dangereux, comme l'acide sulfurique, on diminue la pression de l'air du siphon à l'aide d'une colonne de même liquide introduite par le haut dans la grande branche, qui doit alors être suffisamment longue. Le siphon (*fig.* 146) est muni, à son extrémité inférieure, d'un robinet R, que l'on ferme; puis on introduit le liquide par l'orifice N : l'air de la grande branche s'échappe par le trou M, et la petite branche demeure pleine d'air. Fermons alors M et N et ouvrons R, l'écoulement se produira et sera continu, pourvu que, la pression à l'extrémité antérieure *p* de la bulle soit toujours plus faible qu'à la partie postérieure *l*, quelle que soit la position de la bulle : il suffit évidemment que cette condition se trouve réalisée quand la bulle possède la plus grande longueur possible, c'est-à-dire quand son extrémité *l* est au sommet de la petite branche. La hauteur verticale du liquide de *p* en R doit alors être supérieure à la hauteur de la petite branche [1].

Fig. 146.



Le siphon peut être employé à l'intérieur d'un liquide, par exemple pour transvaser du mercure d'un vase A supérieur dans un vase B, au sein d'une cuve à eau. Il suffit, pour que l'écoulement se produise, que la densité D du liquide à transvaser soit supérieure à la densité *d* du fluide ambiant. Soient,

---

(1) Soient
a la longueur de la petite branche supposée verticale;
b la longueur de la grande branche;
α l'angle qu'elle fait avec la verticale;
H la pression atmosphérique, évaluée en colonne du liquide.
La masse d'air qui occupait la longueur *a* sous la pression H aura sa lon-

en effet, P et P′ les pressions qui s'exercent aux surfaces de séparation A et B, h la différence des deux niveaux. La pression transmise de bas en haut à la tranche mn, au niveau du vase A, est P; la pression transmise de haut en bas est $P' - hD = P - h(D - d)$, qui sera plus faible, pourvu que $D > d$.

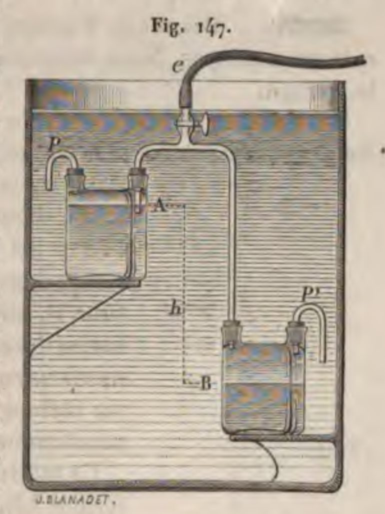


Fig. 147.

Si cette condition n'était pas remplie, le siphon fonctionnerait en sens inverse. On peut s'en convaincre en réunissant par un siphon deux vessies contenant de l'eau et plongeant tout le système dans une cuve à mercure. On fait souvent l'expérience à l'aide du pétrole dans une cuve à eau, et l'on remplace les vessies par deux flacons bouchés A et B (*fig.* 147), à l'intérieur desquels la pression du liquide ambiant est transmise à l'aide des tubes recourbés p et q. On amorce le siphon en aspirant par le tube e, muni d'un robinet que l'on ferme ensuite et l'on voit le vase B se remplir d'eau, tandis que le pé-

---

gueur x maximum quand la pression transmise du côté du vase V sera la plus faible, c'est-à-dire quand l'extrémité postérieure de la bulle sera en N.

La longueur x est donnée par la loi de Mariotte

$$Ha = x(H - a).$$

Il reste dans la grande branche une colonne liquide de longueur $b - x$, et la pression transmise du côté opposé à V est

$$H - (b - x)\cos\alpha = H - \left(b - \frac{Ha}{H - a}\right)\cos\alpha,$$

qui doit être inférieure à $H - a$, pour que l'écoulement continue; il faut donc que l'on ait

$$b - \frac{Ha}{H - a} > \frac{a}{\cos\alpha},$$

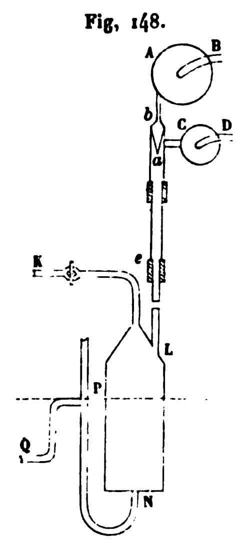
$$b > \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{Ha}{H - a}.$$

trole en excès dans A s'écoule par le tube *p* et vient flotter à la surface de la cuve.

TROMPE. — Beaucoup d'autres machines sont fondées sur les mêmes principes. Nous donnerons seulement la description de la trompe.

On appelle ainsi une machine soufflante qui peut aussi être disposée de manière à produire le vide. La *fig.* 148 donne le détail de la partie supérieure de l'instrument. A représente la boîte à air aspiré; l'air y est amené par le tube B. L'eau arrive dans la boîte à eau C au moyen du tube D, puis va couler autour de l'ouverture *a* du cône *ba*, en entraînant dans son mouvement l'air de la boîte A. On a donc un mélange d'air et d'eau qui parcourt constamment le tube vertical *be*.

Fig. 148.



Ce mélange arrive dans le réservoir inférieur LN, où s'opère la séparation. L'air se loge dans le haut du réservoir et y prend une pression supérieure à la pression atmosphérique. L'eau employée s'écoule par le tube NPQ. Le tube K sert à l'écoulement du gaz, qui se fait avec une très-grande régularité.

Si l'orifice K est fermé, l'air s'accumule dans le réservoir et la pression augmente. On peut, au contraire, se servir de la trompe comme machine pneumatique; il suffit de mettre le récipient en communication avec le tube B.

On peut remplacer l'eau par le mercure. La hauteur de l'appareil est, par suite, considérablement diminuée, et il est possible d'opérer sur des gaz parfaitement secs. C'est alors la machine de Sprengel [1], avec laquelle on peut faire le vide à moins de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

---

[1] SPRENGEL, *Journal of chemical Society*, 2ᵉ série, t. III, et *Ann. de Pogg.*, t. CXXIX, p. 564.

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER FASCICULE DU TOME PREMIER.

INTRODUCTION.

INSTRUMENTS DE MESURE. — HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de la Mécanique. — Pesanteur.

CHAPITRE II.

Mesure des quantités physiques; instruments généraux de mesure.

CHAPITRE III.

Hydrostatique.

CHAPITRE IV.

Équilibre des gaz. — Baromètre.

CHAPITRE V.

Élasticité des gaz.

CHAPITRE VI.

Machines à raréfier et à comprimer l'air.

CHAPITRE VII.

Appareils divers.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU PREMIER FASCICULE.

4676 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



DEUXIÈME FASCICULE.

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE.



COURS
DE PHYSIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE.

INTRODUCTION.

On considère habituellement les corps comme formés de molécules susceptibles de s'écarter ou de se rapprocher les unes des autres et de faire équilibre par leurs actions réciproques aux forces extérieures qu'on applique à leur ensemble. Nous ne préjugeons rien de la nature simple ou complexe, de la forme, des dimensions de ces molécules, de leur état de repos ou de mouvement, enfin de la loi de leurs attractions ou de leurs répulsions. Ce sont autant d'éléments qui demeurent provisoirement indéterminés. A mesure que l'expérience nous révélera des lois nouvelles, nous serons conduits à préciser en quelques points la conception générale qui nous sert de point de départ.

Quelques-uns des phénomènes qui vont nous occuper, la diffusion des liquides, par exemple, ou leur frottement intérieur, établissent, de manière à ne laisser subsister aucun doute, que les molécules des corps sont douées d'un mouvement d'agi-

tation, dont l'étude de la chaleur nous révélera plus tard toute la généralité. Toutefois, un grand nombre de phénomènes moléculaires peuvent s'interpréter en considérant les molécules des corps comme des centres de force immobiles agissant à distance les uns sur les autres, comme le Soleil agit sur la Terre, ou comme les corps électrisés entre eux. C'est à ce dernier point de vue que se sont placés les mécaniciens pour faire les théories de la capillarité et de l'élasticité. Peut-être la première conception rend-elle superflue la seconde; nous verrons, par exemple, comment la théorie des gaz ([1]) ramène, à l'aide d'hypothèses très-simples, les phénomènes de leur élasticité au choc de leurs molécules entre elles et contre les parois des vases qui les enferment. En tout cas, on n'est pas encore parvenu à faire une bonne théorie mécanique des solides et des liquides, et l'on peut dire que, dans l'état actuel de la Science, il importe plus de recueillir et de coordonner, même provisoirement, des faits nouveaux que d'interpréter les phénomènes par des théories moléculaires plus ou moins contestables et toujours incomplètes. Nous ne demanderons donc aux théories mathématiques en usage que d'enregistrer les lois auxquelles l'expérience nous aura conduits et de nous en révéler des conséquences éloignées, que nous puissions de nouveau soumettre au contrôle souverain de l'expérimentation.

([1]) *Voir* t. II, deuxième fascicule, le Chapitre relatif à la théorie des gaz.

CHAPITRE PREMIER.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

FIGURES D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES SOUSTRAITS A L'ACTION DE LA PESANTEUR.

Phénomènes généraux de la capillarité. — Hypothèse de l'attraction moléculaire. — Pression moléculaire. — Travaux des forces moléculaires. — Constante capillaire. — Tension superficielle des liquides.

Effets de la tension superficielle. — Sa mesure directe. — Formule de Laplace. — Expériences de M. Plateau. — Systèmes laminaires : 1° systèmes rigides; 2° systèmes à arêtes flexibles; 3° pressions produites par les lames liquides courbes. — Angle sous lequel trois milieux liquides se rencontrent; condition de possibilité. — Phénomènes divers expliqués par la tension superficielle. — Valeurs de la tension superficielle de divers liquides.

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX DE LA CAPILLARITÉ. — Dans l'étude que nous avons faite des lois générales de l'équilibre des liquides, nous avons négligé certaines actions qui se produisent au voisinage de la surface libre ou des parois des vases; elles donnent lieu à des phénomènes très-variés, parmi lesquels ceux qui se produisent dans des tubes très-étroits, dits *capillaires*, ont d'abord fixé l'attention des physiciens, d'où le nom de *capillarité* imposé à leur ensemble.

Léonard de Vinci (¹) savait déjà que, quand on plonge un tube de verre dont le canal intérieur est très-étroit dans un vase plein d'eau, que l'on aspire le liquide par le haut et qu'on

(¹) D'après Libri (*Histoire des Sciences mathématiques*), qui avait eu entre les mains les manuscrits de l'illustre peintre. Léonard de Vinci, né en 1413, mourut en 1519.

le laisse ensuite retomber de lui-même, il descend d'abord, puis se fixe en A (*fig.* 1), à un niveau plus élevé que dans le vase BC. La surélévation que l'on remarque est considérable si le canal est capillaire; elle diminue s'il est plus large, et elle devient à peu près insensible quand le diamètre intérieur du tube atteint environ 20mm. L'expérience peut se faire avec autant de facilité au moyen d'un siphon renversé dont l'une des branches est large, tandis que l'autre est étroite (*fig.* 2); elle réussit quand, au lieu d'un tube, on plonge dans le liquide deux lames de verre très-rapprochées.

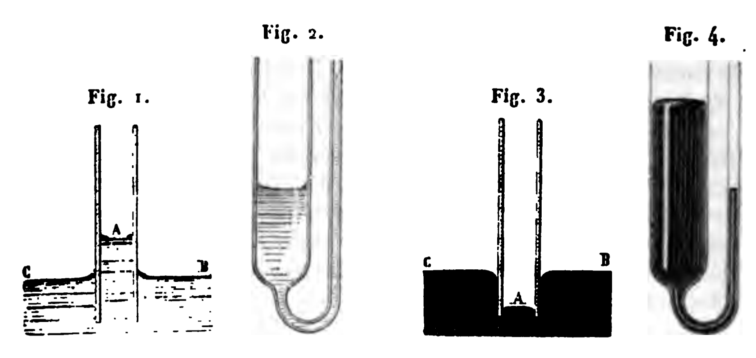


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Quand on remplace l'eau par du mercure, l'ascension se change en dépression (*fig.* 3 et 4)(¹). Mais le mercure s'élève dans un tube de cuivre amalgamé, et l'eau s'abaisse dans un tube de verre graissé. Enfin l'on remarque qu'à l'intérieur des tubes capillaires le ménisque, c'est-à-dire la surface terminale des liquides, n'est pas plan; il est concave quand ils s'élèvent au-dessus du niveau général (*fig.* 1 et 2), convexe quand ils sont déprimés (*fig.* 3 et 4). L'appareil représenté *fig.* 5 est fréquemment employé pour montrer l'ensemble de ces apparences.

On voit que, d'une manière générale, la loi de l'égalité de niveau ne se vérifie pas dans les tubes capillaires communicants : les surfaces ne sont pas au même niveau moyen, et

(¹) La dépression du mercure a été observée pour la première fois par Voss (*De Nili aliorumque fluminum origine;* Hagæ, 1666). — POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*, p. 410.

elles ne sont pas planes. Pour s'en rendre compte il n'y a pas lieu de faire intervenir la pression atmosphérique, car la présence de l'air modifie très-peu ces phénomènes, et déjà les académiciens de Florence (1) avaient établi que les ascensions capillaires se produisent même dans le vide.


Fig. 5.



On reconnaît que ni l'épaisseur plus ou moins grande des parois des tubes, ni leur forme générale n'ont d'influence sur les phénomènes capillaires. L'ascension ou la dépression ne dépendent que de la nature des surfaces en contact au point précis où s'arrête le liquide et du diamètre du tube dans la région infiniment voisine.

HYPOTHÈSE DE L'ATTRACTION MOLÉCULAIRE. — Tels sont, dans leurs caractères généraux, les phénomènes que Laplace (2)

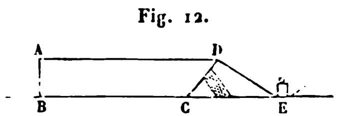
(1) Poggendorff, *Geschichte der Physik*, p. 319.
(2) Clairaut (*Théorie de la figure de la Terre*) tentait déjà d'interpréter les

D'après ce qui précède, on peut assimiler une surface liquide dont la constante capillaire est A à une membrane soumise en tous ses points à une tension égale à A par unité de longueur.

L'idée d'assimiler une surface liquide à une membrane tendue est déjà fort ancienne. Dès 1751, Segner [1] observait qu'une goutte de mercure posée sur un plan de verre est sphérique et qu'elle résiste à toute déformation comme le ferait un petit ballon gonflé d'air. En 1805, Young [2] considère les ménisques capillaires comme des surfaces élastiques, ce qui revient à faire usage de la formule de Laplace que nous démontrerons ultérieurement. Plus tard, Lamarle [3] et surtout Athanase Dupré [4] ont donné à la théorie capillaire, fondée sur la notion de la tension superficielle des liquides, un très-large développement. Entre autres choses, on doit à Athanase Dupré des expériences qui mettent en évidence les effets de la tension superficielle et permettent, jusqu'à un certain point, d'en déterminer la grandeur.

EFFETS DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — SA MESURE DIRECTE. — 1° L'une des parois CD d'un vase rectangulaire ABCD (*fig.* 12),

Fig. 12.



très-peu profond, est mobile autour de son arête inférieure C; cette paroi métallique et très-mince est maintenue dans une position inclinée en dehors par un fil tendu DE et une cale C. On verse de l'eau dans le vase de manière à amener la surface au niveau supérieur de la lame qui doit être mouillée partout. Dans ces conditions, la pression hydrostatique tend à

(1) SEGNER, *De figuris superficierum fluidorum*.

(2) YOUNG, *An essay on the cohesion of fluids* (*Phil. Trans.*, 1805).

(3) LAMARLE, *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXV et XXXVI.

(4) DUPRÉ, *Théorie mécanique de la chaleur*, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série.

l'adhérence de ces disques qu'à une attraction réciproque. Ces deux expériences suffisent pour montrer que les molécules des solides s'attirent énergiquement quand elles sont très-rapprochées.

Quand elles sont à la plus petite distance possible, elles s'attirent encore plus et il en résulte la *cohésion* des solides, dont nous étudierons ultérieurement les effets.

Réciproquement, une compression énergique, en rapprochant suffisamment les unes des autres les diverses parcelles d'un corps pulvérulent, a pour effet de le transformer en un solide et de produire la cohésion. D'après M. Walthère Spring [1], des pressions de 4000^{atm} à 6000^{atm} soudent en blocs homogènes les limailles de plomb, de bismuth, de zinc, d'aluminium, de cuivre et d'antimoine, et l'on remarque en général que la structure des blocs obtenus par compression, même aux dépens de certaines poudres amorphes, révèlent des traces plus ou moins nettes de cristallisation.

Il est plus facile encore de constater l'attraction moléculaire chez les liquides que dans les solides, car elle se montre dans une foule de phénomènes. Une goutte de mercure qui tombe sur une table devrait s'y étaler si elle n'obéissait qu'à la pesanteur; or tout le monde sait qu'elle se rassemble en une petite sphère, ce qui serait entièrement impossible s'il n'existait une force attractive entre ses molécules; et quand on admet cette force, la forme de la goutte s'explique exactement comme celle des corps célestes, par l'attraction. Il est même évident que le globule de mercure se comporte comme si les molécules n'étaient point soumises à la pesanteur, puisqu'il reste sphérique : cela veut dire qu'à ces petites distances l'attraction moléculaire est bien plus considérable que le poids, lequel n'intervient pour déformer le globule que quand la quantité de mercure augmente beaucoup ; alors il s'aplatit, tout en gardant sur ses bords la forme convexe que lui donne l'attraction. On voit par là que, si l'on veut, dans tous les cas,

---

(¹) W. Spring. — *Recherches sur la propriété que possèdent les corps de se souder sous l'influence de la pression* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 5ᵉ série, t. XXII, p. 170; 1881.

expliquer la figure d'équilibre des liquides, il ne faut pas se contenter d'étudier l'effet que la pesanteur et la pression de l'atmosphère exercent sur eux : il faut encore tenir compte de l'attraction moléculaire, que nous avons négligée jusqu'ici.

Voici encore une expérience aussi simple et aussi instructive que la précédente. On plonge une baguette de verre dans l'eau, on la retire ensuite, et l'on voit se rassembler à l'extrémité une goutte liquide qui s'allonge en larme et reste suspendue. Comme la partie inférieure de cette goutte ne tombe pas, il faut bien admettre qu'elle est soutenue par l'attraction des molécules liquides supérieures. La goutte tout entière étant de plus suspendue au verre contre lequel elle pèse de tout son poids pour se détacher, il faut qu'elle y soit maintenue par une adhérence supérieure à ce poids, c'est-à-dire qu'il y ait entre le verre et le liquide une force d'attraction considérable, et, comme l'expérience réussit dans le vide, ces effets ne peuvent être expliqués par la pression.

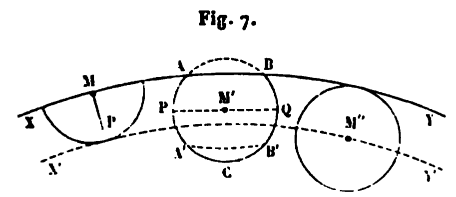
D'après ces faits, nous admettrons avec Laplace (¹) qu'il y a des forces attractives : 1° entre les molécules voisines d'un même liquide; 2° entre un solide et le liquide qui le touche. Nous supposerons qu'elles décroissent très-rapidement quand la distance augmente, qu'elles deviennent négligeables quand cette distance atteint une limite que l'on nomme le *rayon de l'attraction sensible*, et que nous chercherons ultérieurement à mesurer. Enfin nous négligerons l'effet de la compressibilité des liquides.

PRESSION MOLÉCULAIRE. — Concevons une masse liquide terminée par une surface quelconque XY, et étudions en particulier l'action exercée sur une molécule M placée sur cette surface; cette molécule sera attirée par toute la portion du liquide contenue dans une demi-sphère décrite du point M comme centre avec le rayon de l'attraction sensible, ce qui produira une résultante unique P, normale à la surface. Si la molécule considérée est dans l'intérieur, en M', la portion ac-

(¹) *Mécanique céleste*, liv. II. Supplément (*Théorie des phénomènes capillaires*).

tive du liquide est contenue dans ACB, que l'on peut décomposer en trois parties par trois plans équidistants AB, PQ, A'B', parallèles à la surface AB. L'attraction exercée par ABPQ est détruite par PQA'B', et tout se passe comme si la molécule n'était sollicitée que par le liquide A'B'C, ce qui donnera une force P' encore normale à la surface, mais moindre que P. Enfin, quand la molécule sera placée en M", à une profondeur égale à la limite d'attraction ou à une profondeur plus grande, elle sera sollicitée également dans tous les sens par des forces qui se détruiront.

Fig. 7.



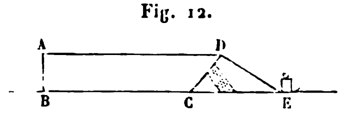
Si donc nous décrivons une surface X'Y' qui soit en tous ses points à une distance de XY égale au rayon de l'attraction sensible, et si nous considérons les molécules comprises entre XY et X'Y', nous voyons qu'elles sont toutes soumises à des forces qui agissent normalement de l'extérieur à l'intérieur, forces qu'on peut comparer à celles de la pesanteur. Or, l'effet de ces dernières est de produire des pressions qui croissent avec la profondeur, qui se transmettent de haut en bas et qui augmentent à mesure qu'on s'éloigne de la surface. Par conséquent, l'effet des forces moléculaires devra être analogue. La différence entre les deux cas consiste en ce que les forces de la pesanteur sont les mêmes pour toutes les molécules du liquide, tandis que l'action attractive exercée sur chaque molécule est variable; elle est maxima sur XY, et elle diminue jusqu'à devenir nulle quand la profondeur augmente jusqu'à X'Y'. D'où il résulte que toutes les forces moléculaires feront naître une pression croissante de XY à X'Y', qui deviendra constante au-dessous de X'Y' et qui se transmettra dans toutes les parties du liquide. Laplace lui donne le nom de *pression moléculaire*. Cherchons si les diverses formes que peut prendre la surface terminale peuvent la faire varier.

D'après ce qui précède, on peut assimiler une surface liquide dont la constante capillaire est A à une membrane soumise en tous ses points à une tension égale à A par unité de longueur.

L'idée d'assimiler une surface liquide à une membrane tendue est déjà fort ancienne. Dès 1751, Segner (¹) observait qu'une goutte de mercure posée sur un plan de verre est sphérique et qu'elle résiste à toute déformation comme le ferait un petit ballon gonflé d'air. En 1805, Young (²) considère les ménisques capillaires comme des surfaces élastiques, ce qui revient à faire usage de la formule de Laplace que nous démontrerons ultérieurement. Plus tard, Lamarle (³) et surtout Athanase Dupré (⁴) ont donné à la théorie capillaire, fondée sur la notion de la tension superficielle des liquides, un très-large développement. Entre autres choses, on doit à Athanase Dupré des expériences qui mettent en évidence les effets de la tension superficielle et permettent, jusqu'à un certain point, d'en déterminer la grandeur.

EFFETS DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — SA MESURE DIRECTE. — 1° L'une des parois CD d'un vase rectangulaire ABCD (*fig.* 12),

Fig. 12.



très-peu profond, est mobile autour de son arête inférieure C : cette paroi métallique et très-mince est maintenue dans une position inclinée en dehors par un fil tendu DE et une cale C. On verse de l'eau dans le vase de manière à amener la surface au niveau supérieur de la lame qui doit être mouillée partout. Dans ces conditions, la pression hydrostatique tend à

(¹) SEGNER, *De figuris superficierum fluidorum.*

(²) YOUNG, *An essay on the cohesion of fluids* (*Phil. Trans.*, 1805).

(³) LAMARLE, *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXV et XXXVI.

(⁴) DUPRÉ, *Théorie mécanique de la chaleur*, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série.

I. Prenons deux tubes communicants; coupons la branche étroite en B (*fig.* 9) par une cassure régulière et horizontale, et versons de l'eau goutte à goutte par la branche large. Nous amenons bientôt le liquide en B; sa forme y devient successivement concave, plane et convexe, et l'expérience montre que son niveau est successivement supérieur, égal ou inférieur à celui de la grande branche. Les trois cas de la capillarité se succèdent ainsi dans le même appareil et avec le même liquide.

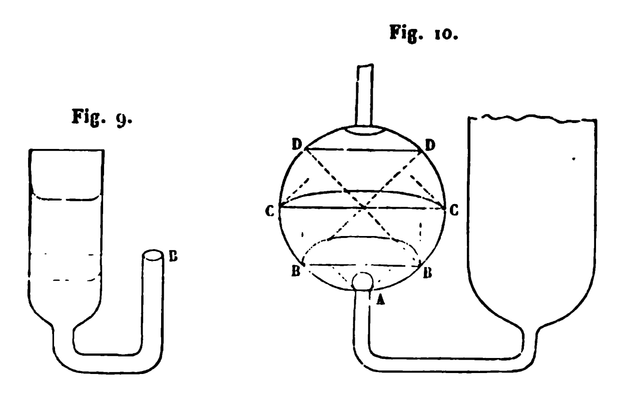


Fig. 9. Fig. 10.

II. L'expérience suivante produit plus régulièrement les mêmes résultats (*fig.* 10). Le vase dont on se sert est semblable au précédent, avec cette différence que l'on a soufflé une petite sphère dans le tube capillaire. On y verse peu à peu du mercure, qui s'élève dans la sphère et fait avec sa surface un angle de raccordement qui, comme nous l'établirons plus tard, est constant et égal environ à 45°. Au point A, le mercure se termine par un bouton très-convexe; en passant par les niveaux BB et CC, il s'aplatit peu à peu et, arrivé en DD, où la surface de la sphère est inclinée à 45°, il est horizontal; plus haut enfin il devient concave : on constate que ces trois formes correspondent à une dépression, une égalité ou une ascension de niveau dans la sphère par rapport au tube communicant.

TRAVAUX DES FORCES MOLÉCULAIRES. — CONSTANTE CAPILLAIRE DES LIQUIDES. — Ainsi la théorie de Laplace conduit à des résultats en parfait accord avec l'expérience; mais on peut

arriver à l'explication des phénomènes par une voie plus synthétique et à la fois plus rigoureuse, qui a été tracée par Gauss ([1]), et que nous suivrons désormais.

On peut reprocher à la théorie de Laplace d'imposer, dès son origine, la notion d'une pression moléculaire exercée, en outre de la pression hydrostatique, à l'intérieur d'une masse liquide terminée par une surface plane. Or, on ne peut démontrer expérimentalement l'existence de cette pression, qui, introduite à l'origine dans les calculs, s'élimine ensuite d'elle-même et ne figure pas dans les résultats : on ne peut, en effet, constater par l'expérience autre chose que la différence de deux pressions moléculaires.

La théorie synthétique de Gauss n'est pas sujette à une telle critique, car elle a pour point de départ un fait purement expérimental. Considérons un liquide en équilibre et déformons sa surface en exerçant sur lui une action mécanique convenable : un certain travail doit être exécuté par les forces extérieures, et le liquide, dès qu'on l'abandonne à lui-même, revient à sa forme primitive : les forces intérieures mises en jeu par la déformation produisent alors un travail égal et contraire au précédent. Ainsi, du mercure qu'on appelle par aspiration au niveau général de la cuvette dans un tube capillaire se déprime dès qu'on rétablit la pression atmosphérique à l'intérieur du tube ; une goutte de mercure qu'on écrase sous une baguette de verre revient à la forme sphérique, etc.

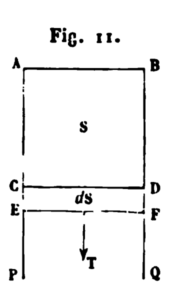
Si l'on attribue le travail produit par la contraction d'une surface liquide à l'action de forces moléculaires, il est aisé de reconnaître qu'il doit être très-sensiblement proportionnel à l'extension dS qu'avait subie la surface. En effet, les molécules sur lesquelles la résultante des actions moléculaires n'est pas nulle sont comprises dans la couche active où Laplace met l'origine de la pression moléculaire, et, tant que le rayon de courbure moyen n'est pas excessivement petit, le nombre N de ces molécules par unité de surface libre peut être regardé comme constant. Considérons une molécule appartenant à la

([1]) Gauss, *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (*Werke*, t. V, p. 29).

surface, et supposons que, par suite d'une contraction, elle pénètre à l'intérieur de la masse liquide; les forces capillaires auxquelles elle est soumise ne produiront de travail qu'autant qu'elle demeurera comprise dans la couche active. Nous admettrons que, quand elle passe de la surface à l'intérieur en traversant entièrement la couche active, le travail total $\mathfrak{T}$ a une valeur unique et bien déterminée quelle que soit la trajectoire de la molécule (¹). Or, quand la surface varie de $-dS$, $N dS$ molécules ont disparu de la couche active, et le travail des forces capillaires est $N\mathfrak{T} dS = A dS$. Il est donc proportionnel à la contraction de la surface. A est une constante caractéristique de la nature du liquide.

Tension superficielle des liquides. — On peut donner à la constante A une signification particulière en se fondant sur les considérations suivantes. Quand une membrane tendue de surface S subit une contraction $-dS$, les forces moléculaires exécutent un travail proportionnel à la contraction et que nous pouvons représenter par $A dS$. Supposons en particulier que cette membrane est rectangulaire, fixée invariablement en AB (*fig.* 11) et qu'elle peut glisser le long de deux tiges AP, BQ dont la distance est invariable. Le long du côté libre EF est appliquée une tension uniforme dont la valeur est T par unité de longueur, c'est-à-dire $T.\overline{EF}$ pour le côté EF tout entier. Quand la membrane se contracte de dS, le côté EF vient en CD et le travail de la tension est en valeur absolue

Fig. 11.



$$T.EF.CE = T dS.$$

On doit donc avoir $T = A$, c'est-à-dire que la tension superficielle par unité de longueur est numériquement égale au travail exécuté par la contraction de la membrane et rapporté à l'unité d'aire.

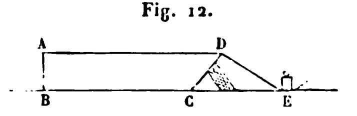
(¹) Cela revient à admettre que les forces capillaires ont un potentiel.

D'après ce qui précède, on peut assimiler une surface liquide dont la constante capillaire est A à une membrane soumise en tous ses points à une tension égale à A par unité de longueur.

L'idée d'assimiler une surface liquide à une membrane tendue est déjà fort ancienne. Dès 1751, Segner (¹) observait qu'une goutte de mercure posée sur un plan de verre est sphérique et qu'elle résiste à toute déformation comme le ferait un petit ballon gonflé d'air. En 1805, Young (²) considère les ménisques capillaires comme des surfaces élastiques, ce qui revient à faire usage de la formule de Laplace que nous démontrerons ultérieurement. Plus tard, Lamarle (³) et surtout Athanase Dupré (⁴) ont donné à la théorie capillaire, fondée sur la notion de la tension superficielle des liquides, un très-large développement. Entre autres choses, on doit à Athanase Dupré des expériences qui mettent en évidence les effets de la tension superficielle et permettent, jusqu'à un certain point, d'en déterminer la grandeur.

EFFETS DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — SA MESURE DIRECTE. — 1° L'une des parois CD d'un vase rectangulaire ABCD (*fig.* 12),

Fig. 12.



très-peu profond, est mobile autour de son arête inférieure C; cette paroi métallique et très-mince est maintenue dans une position inclinée en dehors par un fil tendu DE et une cale C. On verse de l'eau dans le vase de manière à amener la surface au niveau supérieur de la lame qui doit être mouillée partout. Dans ces conditions, la pression hydrostatique tend à

(¹) SEGNER, *De figuris superficierum fluidorum.*

(²) YOUNG, *An essay on the cohesion of fluids* (*Phil. Trans.*, 1805).

(³) LAMARLE, *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXV et XXXVI.

(⁴) DUPRÉ, *Théorie mécanique de la chaleur*, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série.

coucher CD sur CE; mais la tension superficielle du liquide agit en sens contraire et, grâce à la faible profondeur, l'emporte sur la pression. Il suffit donc de brûler le fil, et l'on voit la paroi CD tomber en dedans dans la direction CB.

2° On prépare une solution de savon ou mieux un liquide visqueux (liquide glycérique de M. Plateau), dont nous donnerons bientôt la recette. On mouille ensuite avec ce liquide une lame de laiton AB verticale (*fig.* 13), à laquelle est adapté un fil métallique léger OC, mobile à charnière autour du point O. La lame et le fil étant bien mouillés, et le fil en OD, si l'on amène celui-ci en OC, et qu'on l'abandonne ensuite, il est ramené en OD par la lame liquide comme par une membrane fortement tendue. Ces deux expériences sont dues à M. Athanase Dupré [1].

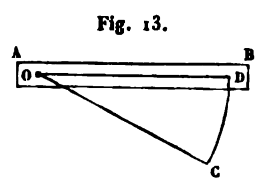


Fig. 13.

3° Une lame du même liquide est maintenue dans un cadre rectangulaire en fils de fer, qu'elle mouille. On y dépose un anneau de fils de cocon et l'on perce la lame intérieurement à l'anneau. Celui-ci se tend alors brusquement et prend une forme rigoureusement circulaire. Cette expérience est due à M. Van der Mensbrugghe [2].

4° Un fil de coton est tendu horizontalement entre deux points distants d'environ 0m,12. Un tube de verre, de 0m,10 de longueur et de 0m,001 de diamètre extérieur, est garni à chacune de ses extrémités d'un anneau en fil de fer mince et supporte, par un fil de cocon attaché en son milieu, un petit plateau de papier. Le tube étant placé contre le fil, on interpose un liquide qui mouille le fil et le tube, et celui-ci demeure suspendu. On peut maintenant charger le plateau de sable fin jusqu'à ce que le tube se détache. Le poids en milligrammes du système suspendu, divisé par la longueur du tube en millimètres, fournit une mesure de la tension superficielle de la lame. Comme, d'ailleurs, la lame liquide agit par ses deux faces

(1) DUPRÉ, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 226 (Paris, 1869), et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. IX, p. 373.

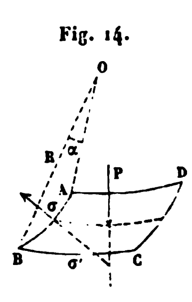
(2) VAN DER MENSBRUGGHE, *Sur la tension des lames liquides* (*Académie des Sciences de Bruxelles*, t. XXII, p. 308; t. XXIII, p. 448, etc.).

opposées, le résultat obtenu doit être divisé par 2 et correspond alors à la tension superficielle d'une surface liquide unique.

Nous indiquerons par la suite des procédés moins directs, mais plus précis, pour mesurer la valeur de cette constante caractéristique.

FORMULE DE LAPLACE. — Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la forme d'équilibre d'une surface liquide. Considérons un élément rectangulaire ABCD (*fig.* 14) découpé sur la surface par quatre plans normaux infiniment voisins, et écrivons que toutes les forces qui agissent sur cet élément ont une résultante normale à la surface et égale à zéro. Soient σ et σ' les côtés AB et BC du rectangle, R et R' leurs rayons de courbure, α et α' les angles sous lesquels ces côtés sont vus de leurs centres de courbure respectifs, enfin p la pression normale à la surface du liquide rapportée à l'unité de surface.

Fig. 14.



On a

$$\sigma = R\alpha,$$
$$\sigma' = R'\alpha',$$

et la pression P supportée par l'élément est

$$P = p\sigma\sigma' = pRR'\alpha\alpha'.$$

D'autre part, les forces que l'élément subit le long du côté AB par suite de la tension superficielle ont une résultante ARα normale à σ et tangente à la surface; la projection de cette force sur la normale ON élevée à l'élément de surface en son milieu est, à la limite,

$$AR\alpha \cos\left(\frac{\varpi}{2} - \frac{\alpha'}{2}\right) = AR\frac{\alpha\alpha'}{2}.$$

Le côté DC parallèle fournit de même une composante AR$\frac{\alpha\alpha'}{2}$, les côtés AD et BC chacun AR'$\frac{\alpha\alpha'}{2}$. La somme de

[redacted]

toutes ces projections devant être égale et de signe contraire à P, on a

$$pRR'\alpha\alpha' = AR\alpha\alpha' + AR'\alpha\alpha'$$

ou

$$(1) \qquad p = A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

On sait, d'ailleurs, que la somme entre parenthèses est constante en un même point d'une surface, quelle que soit la direction arbitraire des plans rectangulaires AB et BC; par suite, on peut désigner par R et R' les rayons de courbure principaux au point de la surface considéré.

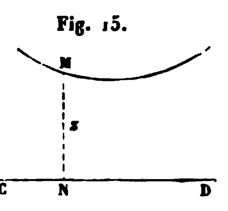


Fig. 15.

Menons actuellement au sein de la masse liquide un plan CD horizontal (*fig.* 15), et soient P la pression dans ce plan, z la distance d'un point quelconque M de la surface libre au plan CD, ρ le poids spécifique du liquide; on a, d'après les principes de l'Hydrostatique,

$$p = P - \rho z,$$

et l'équation de la surface capillaire devient

$$(2) \qquad A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = P - \rho z.$$

Cette formule a été démontrée par Laplace (1).

Dans le cas particulier où l'on fait abstraction de la pesanteur, l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{P}{A} = c.$$

Nous ne nous occuperons, dans ce Chapitre, que de ce cas particulièrement simple.

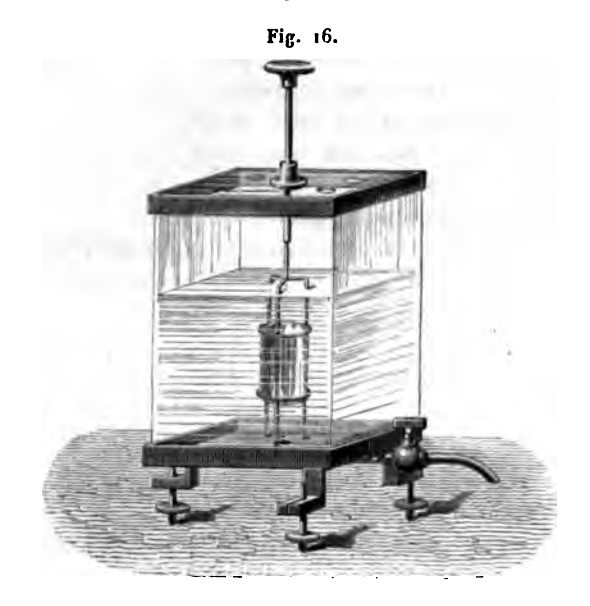
Expériences de M. Plateau. — Pour réaliser un liquide sans

(1) Le mode de démonstration que nous venons d'employer dérive de la méthode de Gauss; il est dû à M. Lippmann (*Journal de Physique théorique et appliquée*, t. IV, p. 332).

poids, M. Plateau (¹) a composé avec de l'eau et de l'alcool un mélange en proportions telles qu'il ait exactement la densité de l'huile d'olive. Par conséquent, si l'on introduit dans ce mélange une goutte d'huile, elle y sera soustraite à l'action de la pesanteur (²); elle s'y maintiendra en équilibre et n'y sera soumise qu'aux actions moléculaires exercées sur elle par elle-même, par le milieu ambiant et par les solides avec lesquels on peut la mettre en contact.

Pour être bien faites, les expériences doivent être exécutées

Fig. 16.



dans un vase parallélépipédique formé de glaces de verre réunies et mastiquées par leurs arêtes (*fig.* 16); un robinet inférieur sert à le vider au besoin, et des ouvertures convenables

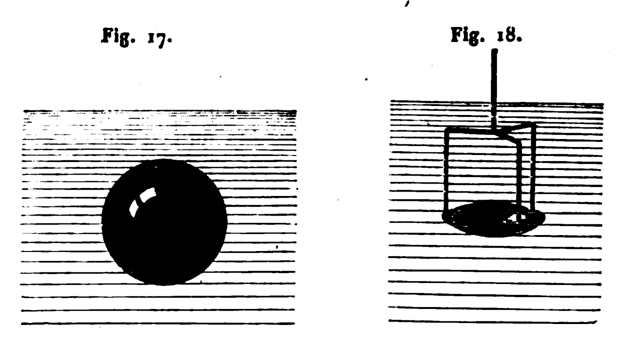
(¹) Les recherches de M. Plateau sur les figures d'équilibre des liquides ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* (t. XVI, XXIII, XXXI, etc.) et résumées dans les *Annales de Chimie et de Physique*, (3ᵉ série, t. XXX, p. 203, t. LIII, p. 26, etc.). Elles ont été réunies dans un livre publié sous le titre de *Statique des liquides*.

(²) Le terme ρz de la formule (3) est détruit par un terme égal et contraire provenant de la poussée du milieu ambiant.

percées dans le couvercle permettent d'introduire à l'intérieur quelques petits appareils indispensables. On engage au milieu du liquide mélangé l'extrémité d'une pipette pleine d'huile que l'on colore si l'on veut, et qu'on laisse peu à peu tomber; elle se réunit en masse à l'extrémité du tube, et, quand elle est en quantité suffisante, on retire la pipette en la bouchant. L'huile reste immobile à la place où elle a été déposée; elle prend la forme sphérique (*fig*. 17). Cette figure satisfait évidemment à la condition

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = c;$$

elle est en outre la figure d'équilibre la plus stable, et c'est pour cela qu'elle se forme naturellement.


Fig. 17.
Fig. 18.

Pour obtenir d'autres formes, on a recours à un artifice qui consiste à fixer certains points de la surface à des contours métalliques formés de fils de fer primitivement graissés que l'on place dans le mélange alcoolique et entre lesquels on fait arriver l'huile; celle-ci adhère à ces contours et se présente sous des formes nouvelles. Ainsi, dans un cercle elle se dispose sous la forme d'une lentille biconvexe (*fig*. 18), dont les deux surfaces ont le même rayon. Dans ce cas, on a déterminé la figure de la masse en assujettissant sa surface à passer par une circonférence fixe.

On peut disposer en face l'un de l'autre deux contours circulaires de rayon R (*fig*. 16), l'un porté sur un trépied, l'autre soutenu par une tige verticale qui traverse le couvercle et qui

permet de le soulever et de l'abaisser. Lorsqu'on remplit d'huile l'intervalle qui les sépare et qu'on règle convenablement leur distance, on obtient entre eux un cylindre parfait. En un point quelconque de sa surface extérieure les rayons de courbure principaux sont, l'un horizontal et égal à R, l'autre vertical et infini. Pour les calottes sphériques qui terminent le cylindre, les rayons de courbure sont égaux; en les désignant par R_1, nous aurons l'équation de condition

$$\frac{1}{R} = c = \frac{2}{R_1}.$$

Des mesures directes ont montré qu'en effet $R_1 = 2R$. La quantité d'huile doit être telle que la hauteur du cylindre ne dépasse pas le triple de son diamètre. M. Plateau a constaté que, peu au delà de cette limite, le cylindre devient une figure instable. Si l'huile est en quantité plus grande, on ne réussit pas à former le cylindre, la masse se sépare en deux portions égales qui demeurent adhérentes aux deux contours solides.

Mais la sphère et le cylindre ne sont que des cas très-particuliers de la forme que peut affecter une surface liquide. Si dans l'équation

$$(3) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = c$$

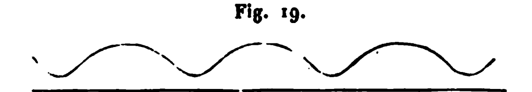
on remplace les rayons de courbure R et R' par leurs expressions en fonction des coordonnées rectangulaires du point de la surface auquel ils se rapportent, on obtient une équation aux différences partielles du second ordre qui n'a été intégrée que dans des cas très particuliers, mais qui comporte un nombre infini de solutions. M. Beer (¹) a étudié théoriquement le cas où la surface représentée par l'équation (3) est de révolution, et M. Plateau a poursuivi cette étude en s'attachant à produire expérimentalement les diverses formes prévues par la théorie.

A l'aide d'une goutte d'huile réalisons d'abord, comme dans l'expérience précédente, un cylindre limité par deux anneaux métalliques; écartons ensuite les anneaux : le liquide se creuse

(¹) Beer, *Annales de Poggendorff*, t. C, p. 459; t. CII, p. 320.

entre eux et forme une surface telle que le rayon de courbure R de la méridienne est négatif, c'est-à-dire que sa convexité est tournée vers l'axe; en même temps les calottes terminales s'aplatissent, et par suite c diminue. Pour un écartement convenable des anneaux, les calottes deviennent rigoureusement planes, et alors $c = 0$. Dans tout cet intervalle la surface de révolution correspondant à des valeurs de c de plus en plus faibles, mais positives, est désignée par M. Plateau sous le nom d'*onduloïde*. Sa forme est représentée par la *fig.* 19;

Fig. 19.

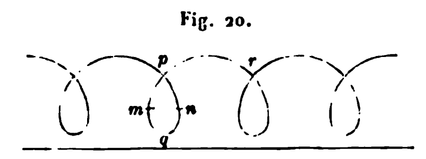


l'expérience précédente n'en donne d'ailleurs qu'une partie comprise entre deux renflements consécutifs. On pourrait obtenir la portion bombée, comprise entre deux étranglements, en faisant adhérer une masse d'huile à la surface extérieure d'un cylindre de fer placé horizontalement dans le liquide.

Pour $c = 0$, c'est-à-dire quand les bases du cylindre sont planes, la forme limite de l'onduloïde a reçu le nom de *caténoïde :* sa méridienne est en effet une chaînette. Bien entendu, l'expérience ne donne qu'une partie de cette surface, dont la méridienne est infinie.

Supposons qu'on écarte les anneaux à partir de la situation précédente : le liquide se déprime sur la base de chaque anneau en calotte sphérique creuse, et c devient négatif; la surface comprise entre les anneaux a pour méridienne une portion de *nodoïde*. La *fig.* 20 représente cette courbe, dont nous

Fig. 20.



n'avons réalisé ici qu'une portion, telle que *mqn*, appartenant à l'une des boucles. On obtient la portion bombée, *pr*, comprise entre deux boucles, en partant du cylindre et rapprochant les

anneaux au lieu de les écarter. Nous renverrons au Mémoire original [1] pour la démonstration de ces curieuses propriétés.

Toutes les expériences que nous venons de décrire exigent beaucoup de précautions, car l'égalité des densités des deux liquides tend à s'altérer par les variations de la température et par une faible action chimique qui s'exerce entre l'huile et le liquide ambiant.

On conçoit maintenant que l'on peut, par le moyen de systèmes solides convenablement disposés, déterminer, en dehors des figures de révolution précédemment étudiées, des figures très-variables. Un contour polyédral déterminera un polyèdre dont les faces seront convexes si l'huile est en excès, planes si l'on en enlève une quantité convenable, et concaves si l'on en retire davantage. Dans le cas où elles sont planes, R et R′ sont infinis et $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$ (*fig.* 21).

Avant d'abandonner ce sujet, nous signalerons encore une expérience curieuse relative à la forme d'un liquide sans pesanteur, animé d'un mouvement de rotation. Pour produire ce mouvement, on emploie une tige mince de fer traversant de haut en bas l'intérieur du vase; elle s'engage inférieurement dans un petit creux pratiqué au milieu du fond de celui-ci et porte à son extrémité supérieure une petite manivelle ; au point de cette tige correspondant à la moitié de la hauteur du vase est fixé par son centre un petit disque horizontal de fer. Le vase étant rempli de liquide alcoolique, on y forme une sphère d'huile qui enveloppe le disque et une partie de la tige, et dont le centre coïncide avec celui du disque, puis on fait tourner lentement la manivelle; on voit alors la sphère s'aplatir à ses pôles et se renfler à son équateur, de manière à représenter l'aplatissement du sphéroïde terrestre. Si l'on tourne plus vite, l'aplatissement augmente, et enfin, pour une certaine vitesse, on voit la masse se creuser à ses deux pôles, en continuant à

---

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LIII, p. 26. Dans ce Mémoire, l'auteur indique aussi le moyen de réaliser, mais seulement d'une manière passagère, une boucle entière de nodoïde *pmnq*. On forme une lentille dans un anneau, on la perce ensuite, et le liquide forme autour de l'anneau un bourrelet dont la section est une boucle de nodoïde.



s'étendre latéralement, et se transformer en un anneau par tement régulier et complétement isolé du disque (*fig.*

Fig. 21.

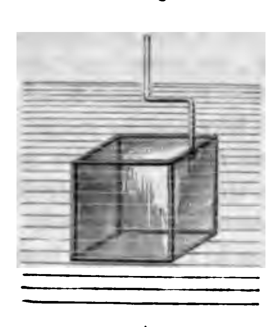
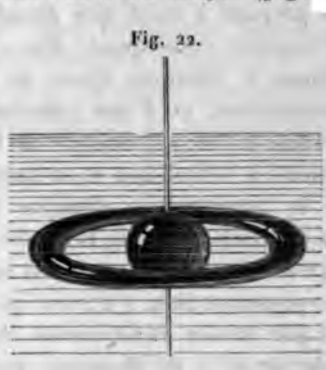


Fig. 22.



Cette expérience est quelquefois désignée, par une fausse analogie, sous le nom d'*expérience de l'anneau de Saturne.*

SYSTÈMES LAMINAIRES. — Au lieu d'opérer sur de grandes masses liquides soustraites à l'action de la pesanteur, il revient au même d'employer dans l'air des lames liquides assez minces pour que leur poids soit négligeable par rapport aux forces capillaires dont elles sont le siége. Les formes d'équilibre ainsi obtenues diffèrent infiniment peu de celles qui se produiraient si la pesanteur n'agissait pas.

Toutefois, ces lames liquides ne sauraient être indéfiniment persistantes; le liquide s'écoule peu à peu, en vertu de son poids, de la partie supérieure à la partie inférieure de la lame, qui s'amincit et finit par crever; on retarde cette rupture en employant des liquides visqueux. L'eau de savon sert de temps immémorial aux enfants à souffler des bulles assez persistantes, mais il vaut mieux employer le liquide glycérique préconisé par M. Plateau (¹). En voici la recette, modifiée par M. Terquem (²) :

On prend du savon de Marseille que l'on divise au rabot en

(¹) Plateau, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXXII, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXXI, p. 213; 1861.

(²) Terquem, *Journal de Physique*, t. II, p. 409; 1873.

morceaux très-minces et qu'on fait sécher au soleil; on le met dans un flacon avec de l'alcool à 80° (densité, 0,865), et l'on prépare à froid une dissolution saturée (marquant 74° à l'alcoomètre centésimal; D = 0,880). D'autre part, on fait un mélange à volumes égaux de glycérine à son maximum de concentration et d'eau (densité, 1,35), on prend 100^cc de ce mélange et l'on y ajoute 25^cc de la solution alcoolique de savon. On porte à l'ébullition et on continue à faire bouillir jusqu'à ce que la température dépasse 100°, de façon qu'il ne reste plus d'alcool. On laisse refroidir et l'on ajoute de l'eau distillée jusqu'à ce que le liquide ait un volume de 100^cc; enfin on filtre plusieurs fois, à travers un tampon de coton, et le liquide finit par passer entièrement clair. Une bulle creuse de ce liquide, de $0^m,1$ de diamètre, posée sur un trépied et recouverte d'une cloche, peut persister plus d'une heure.

Le liquide suivant, employé par M. Terquem (¹), est d'une préparation plus facile. Dans 1^lit d'eau distillée, on fait dissoudre à chaud 15^gr de savon de Marseille parfaitement desséché, et on filtre la dissolution jusqu'à ce qu'elle soit complétement limpide. On ajoute ensuite 30^gr de sucre pour 100^cc d'eau de savon bouillante; le liquide est conservé dans des flacons que l'on doit encore chauffer au bain-marie pour détruire tous les germes de fermentation.

Enfin on peut, d'après M. Gernez (²), employer un collodion formé de 80 à 90 pour 100 d'éther avec plus de 4 pour 100 de coton-poudre et additionné d'une quantité considérable d'huile de ricin.

Ces liquides peuvent être soufflés en bulles; on peut les faire adhérer à des charpentes formées de fils rigides ou flexibles et réaliser ainsi les expériences les plus variées.

(¹) TERQUEM, *Journal de Physique*, t. VII, p. 344.

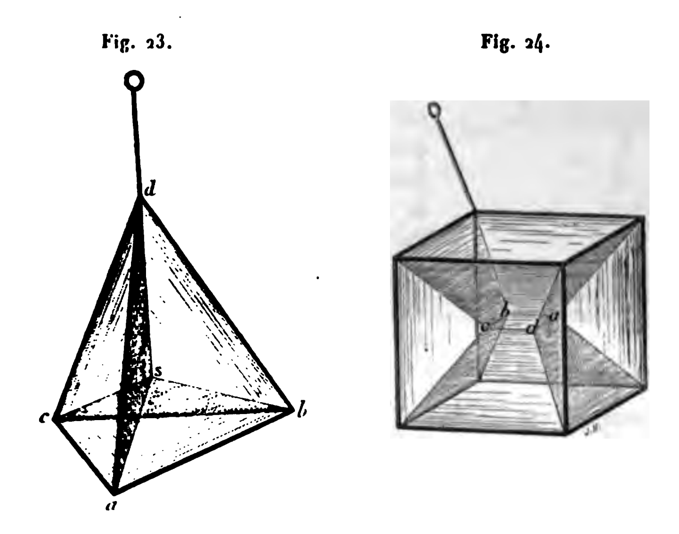
(²) GERNEZ, *Journal de Physique*, t. I, p. 324. Voici la composition centésimale de deux liquides employés par M. Gernez :

Éther	60	52
Coton-poudre	4	2,5
Alcool absolu	3	3
Huile de ricin	33	42,5
	100	100,0

[redacted]

1° *Systèmes laminaires rigides.* — Les charpentes rigides employées par M. Plateau (¹) sont formées de fils de fer qu'on doit oxyder légèrement pour que le liquide glycérique y adhère (²). On les plonge dans le liquide, et, quand on les retire, elles portent un nombre plus ou moins considérable de lames liquides disposées régulièrement et formant des sys-

Fig. 23. Fig. 24.



tèmes tantôt instables, tantôt persistants. Les *fig.* 23 et 24 indiquent les formes les plus stables correspondant au tétraèdre et au cube. On remarquera qu'en général trois lames liquides se rencontrent sur une même arête; elles sont inclinées à 120°, de telle sorte que leurs tensions se font équilibre. Quatre arêtes au plus se rencontrent en un même point.

Les lames liquides sont tantôt planes, tantôt courbes; mais, dans ce dernier cas, leurs deux courbures sont égales et de signes contraires, car, puisque la pression atmosphérique agit sur les deux faces de chaque lame, on doit, d'après l'équation

(¹) *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXX, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXII, p. 217; 1861.

(²) M. Terquem recommande l'usage de fils de laiton argentés.

morceaux très-minces et qu'on fait sécher au
met dans un flacon avec de l'alcool à 80° (dens
l'on prépare à froid une dissolution saturée (
l'alcoomètre centésimal; D = 0,880). D'autre
mélange à volumes égaux de glycérine à s
concentration et d'eau (densité, 1,35), on
mélange et l'on y ajoute 25cc de la solution a
On porte à l'ébullition et on continue à fair
que la température dépasse 100°, de f
plus d'alcool. On laisse refroidir et l'on a
jusqu'à ce que le liquide ait un volu
filtre plusieurs fois, à travers un tampo
finit par passer entièrement clair. U
quide, de 0m,1 de diamètre, posée s
verte d'une cloche, peut persister pl

Le liquide suivant, employé par
préparation plus facile. Dans 1lit
soudre à chaud 15gr de savon de
séché, et on filtre la dissolution ju
tement limpide. On ajoute ensuit
de savon bouillante; le liquide
que l'on doit encore chauffer a
les germes de fermentation.

Enfin on peut, d'après
lodion formé de 80 à 90 pou
de coton-poudre et addi
d'huile de ricin.

Ces liquides peuvent ê
adhérer à des charpente
réaliser ainsi les expéri

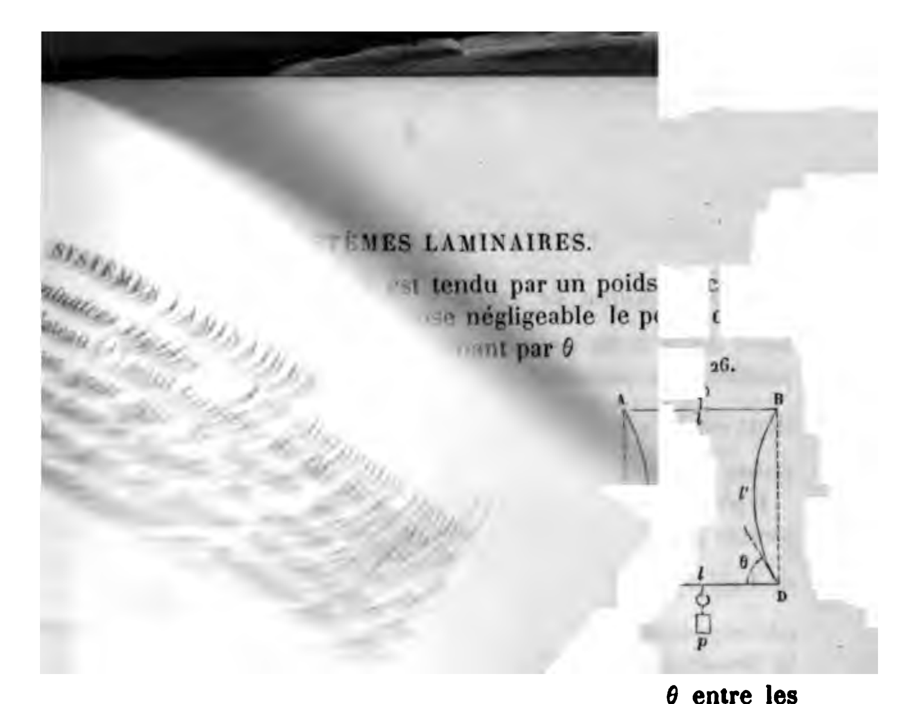
... mé par deux fils
... unis par deux fils
... est suspendu par son

(1) Terquem, *Journal de*

(2) Gernez, *Journal d*
simale de deux liquides

Éther..
Coton-
Alcool
Huil

... finiment les systèmes laminaires
... qui se solidifie par le refroidisse-
... mélange de 5 parties de colophane
... un mélange de 46 parties de
... Ce dernier mélange est employé
... vent être maintenus quelque temps à
... lent (*Philosophical Magazine*,
... t. VII, p. 318; 1878).
... t. VII, p. 406; 1878.



θ entre les

…ules par l'expérience, et les a
…constante capillaire A.

…*par les lames liquides courbes.* —
…montra le premier que la pression à
…e savon l'emporte sur la pression ex-
…e qui est en raison inverse du diamètre
…i a été vérifiée par M. Plateau ([1]). A cet
…e divers diamètres étaient soufflées à l'extré-
…entonnoir en communication avec un mano-
…On déterminait le diamètre des bulles et l'indica-
…ondante du manomètre. Si l'on veut se borner à
…existence de cette pression sans la mesurer, on peut,
…a indiqué M. Violle ([2]), préparer une bulle de liquide
…que à l'extrémité d'un tube : dès que l'on cesse de
…ller, la bulle se contracte et peut même éteindre une
…ugie présentée à l'orifice opposé du tube.

D'après la formule de Laplace, la pression produite par une

([1]) Plateau, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. XXX, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXII, p. 217; 1861.

([2]) Violle, *Journal de Physique*, t. IV, p. 313.

surface sphérique de rayon R est $\frac{2A}{R}$; mais les deux surfaces de la bulle creuse agissent dans le même sens pour produire des pressions égales, et l'excès de pression à l'intérieur est $\frac{4A}{R}$. De là un nouveau moyen pour mesurer la constante capillaire.

Il n'est pas nécessaire qu'une lame liquide soit complétement fermée pour produire une pression : il suffit, d'après la formule de Laplace, que la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ soit différente de zéro. L'expérience suivante, due à Dupré, est bien de nature à manifester la manière dont ces pressions sont engendrées. On produit une lame liquide à l'aide d'un cadre de fils rigides, et sur la lame on dépose un grain de plomb : la lame s'infléchit, forme au-dessous du grain une sorte de poche, la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ devient positive et équilibre le poids du plomb. En prenant des grains de plomb de plus en plus lourds, on voit se produire sur la lame des poches de plus en plus creuses, jusqu'à ce qu'enfin la poche s'étire en larme et se referme au-dessus du grain de plomb : celui-ci a traversé la lame sans produire de déchirure apparente.

ANGLE SOUS LEQUEL TROIS MILIEUX LIQUIDES SE RENCONTRENT. CONDITION DE POSSIBILITÉ. — Considérons trois milieux liquides 1, 2 et 3 en équilibre, qui se rencontrent suivant une arête commune, et coupons le système par un plan normal à l'arête au point O (*fig.* 27). Sur un élément de longueur ds à partir de ce point, agissent dans les plans tangents aux trois surfaces les tensions superficielles $A_{1,2}ds$, $A_{2,3}ds$, $A_{1,3}ds$, relatives à la séparation des liquides 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3. Pour l'équilibre, leur résultante doit être nulle, c'est-à-dire que $A_{1,3}$ doit être égale et opposée à la diagonale du parallélogramme OPQR construit sur $A_{1,2}$ et $A_{2,3}$. Soient α, β, γ les angles du triangle OPQ; on a

$$\frac{A_{1,2}}{\sin\alpha}=\frac{A_{2,3}}{\sin\beta}=\frac{A_{1,3}}{\sin\gamma}.$$

[redacted]

Le triangle OPQ a pour côtés les trois tensions superficielles; l'équilibre ne peut donc avoir lieu que si l'une quelconque de ces tensions est inférieure à la somme des deux autres.

Par exemple, déposons une goutte d'huile à la surface d'une masse d'eau : la somme des tensions superficielles $A_{1,2}$, $A_{2,3}$ des surfaces air-huile, huile-eau est plus faible que la tension $A_{1,3}$ relative à l'eau et à l'air. Il ne peut donc y avoir équilibre; la goutte d'huile, tirée par les bords en vertu de l'excès de $A_{1,3}$, s'étendra de plus en plus à la surface de l'eau, jusqu'à ce qu'elle soit devenue assez mince pour que les raisonnements sur lesquels nous nous sommes appuyés pour prouver l'invariabilité de la tension superficielle cessent d'être applicables. Alors l'épaisseur de la couche d'huile est de l'ordre de grandeur des rayons d'activité des molécules; on peut l'évaluer en profitant des colorations produites ([1]) et trouver ainsi une limite inférieure des rayons d'activité. Cette limite est de l'ordre de grandeur des longueurs d'ondulation de la lumière ([2]).

Fig. 27.

([1]) *Voir* t. III, 3e fascicule, le Chapitre des anneaux colorés.

([2]) M. Plateau a cherché à trouver une limite de l'épaisseur de la couche active en déterminant l'épaisseur minimum d'une bulle de savon prête à crever. La pression à l'intérieur des bulles s'est trouvée constante jusqu'au moment de la rupture survenue pour une épaisseur de $0^{mm},0001135$: le rayon de la sphère active est donc, dans ce cas, inférieur à $0^{mm},0000567$ (*Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, t. XXXIII).

M. Quincke a obtenu des nombres analogues en déposant sur du verre des couches d'argent d'épaisseur progressivement croissante et déterminant l'épaisseur minima nécessaire pour que l'angle de raccordement d'un liquide avec la surface prenne la valeur correspondant à l'argent. Les couches d'argent étaient déposées par le liquide de M. Martin compris entre deux plaques de verre qui se touchaient par un bord et légèrement inclinées : l'épaisseur de ces couches devait donc être proportionnelle en chaque point à la distance des deux lames et croître régulièrement. Dans ce cas, on a pu obtenir des épaisseurs inférieures au rayon de la sphère active, qui serait d'au moins $0^{mm},0000542$ pour la surface de contact de l'argent et de l'eau (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXVII et CXXXIX).

La longueur d'onde de la lumière jaune est de $0^{mm},0005888$, environ dix fois plus grande que les quantités ci-dessus mesurées.

Dans l'expérience précédente, l'huile peut être remplacée par un corps gras quelconque. On voit donc qu'il est très-difficile d'obtenir une surface d'eau parfaitement pure; la moindre trace d'un corps gras suffira pour modifier d'une façon appréciable la tension superficielle apparente de l'eau, par suite l'ensemble de ses propriétés capillaires.

APPLICATIONS DIVERSES. — Quand deux liquides se dissolvent, la tension superficielle de leur mélange est intermédiaire à celle des deux liquides. Il en résulte des conséquences singulières. Par exemple, si l'on porte une goutte d'éther à peu de distance au-dessus d'une surface plane d'eau, la vapeur d'éther, en se dissolvant dans l'eau, produit un liquide dont la tension superficielle est moindre, et l'équilibre est détruit; une fossette se creuse à la surface de l'eau au-dessous de la goutte; si la couche d'eau est assez mince, elle peut être entièrement percée et le fond du vase mis à nu.

Le vin exposé dans un vase ouvert perd sans cesse de l'alcool par évaporation, et sa tension superficielle augmente à mesure qu'il devient plus aqueux. Cet effet est surtout sensible sur la couche mince de liquide qui baigne les bords du vase; il en résulte que, la tension superficielle étant plus grande sur les bords, le liquide alcoolique grimpe, se mêle au liquide plus aqueux des parois, et, la tension superficielle diminuant de nouveau, finit par retomber en gouttes au fond du vase. On observe surtout cet effet sur les vins très-capiteux.

La tension superficielle de l'essence de térébenthine ou de la benzine est moindre que celle de l'huile. On s'explique par là la pratique des dégraisseurs, qui, pour faire disparaître une tache d'huile sur un linge, humectent les bords de la tache avec le dissolvant, enlèvent le liquide avec du papier buvard et continuent à humecter en se rapprochant progressivement du centre. On peut aussi profiter de la diminution de la tension superficielle résultant de l'élévation de la température; alors on couvre de papier buvard (¹) l'un des bords de la tache et on approche un fer chaud du bord opposé : le liquide grais-

(¹) MAXWELL, *Theory of heat*, p. 293; London, 1875.

seux se trouve peu à peu attiré vers la partie froide où il absorbé par le papier buvard.

VALEUR DES TENSIONS SUPERFICIELLES DE DIVERS LIQUIDES. — On évalue d'ordinaire la tension superficielle en milligrammes par millimètre de longueur [1]. Le Tableau suivant exprime, d'après ces conventions, les tensions superficielles d'un certain nombre de liquides, déterminées par M. Quincke :

LIQUIDES.	POIDS spécifique.	TENSION DE LA SURFACE séparant le liquide		
		de l'air.	de l'eau.	du mercure.
Eau	1,000	8,253[2]	0	42,58
Mercure	13,596	55,03	42,58	0
Sulfure de carbone	1,269	3,274	4,256	37,97
Chloroforme	1,488	3,120	3,010	40,71
Alcool	0,791	2,599	//	40,71
Huile d'olive	0,914	3,760	2,096	34,19
Essence de térébenthine	0,887	3,030	1,177	25,54
Pétrole	0,798	3,233	2,834	28,94
Acide chlorhydrique	1,100	7,15	//	38,41
Solution d'hyposulfite de soude	1,125	7,903	//	45,11

(1) Dans le système C.G.S. (*voir* 1er fascicule, p. 64), la tension superficielle devrait être exprimée en dynes par centimètre. Or le milligramme vaut 0dyne,981; il faudrait donc multiplier les nombres du Tableau par 0,981.10 = 9,81.

(2) D'après les meilleures expériences (Éd. Desains), la tension superficielle de la surface air-eau est un peu plus faible. Elle est égale à 7,555 à la température de 8°,5.

CHAPITRE II.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

FIGURE D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES PESANTS.

Angle de raccordement d'un liquide et d'un solide. — Forme d'un liquide pesant au voisinage d'une paroi plane : 1° paroi verticale; 2° paroi inclinée; 3° goutte de mercure sur une paroi horizontale. — Mesure expérimentale de l'angle de raccordement d'un liquide et d'un solide.

Adhésion des disques mouillés.

Lames parallèles. — Attractions et répulsions apparentes entre des lames parallèles plongeant dans un liquide. — Lames inclinées. — Mouvement d'un liquide entre deux lames inclinées.

Tubes capillaires. — Théorie élémentaire. — Corrections. — Expériences de Gay-Lussac. — Expériences d'Éd. Desains et de MM. Quet et Seguin. — Influence de la température. — Expériences de M. Wolf. — Calculs de M. Quet.

Mesure de la tension superficielle des liquides qui mouillent le verre. — Comparaison des divers procédés employés pour mesurer la tension superficielle.

Suspension des liquides dans un tube capillaire ou sur un tissu à larges mailles.

Chapelets capillaires. — Corps poreux.

Influence de la capillarité sur l'évaporation.

ANGLE DE RACCORDEMENT D'UN LIQUIDE ET D'UN SOLIDE. — Nous nous proposons actuellement de déterminer la condition de l'équilibre le long d'une arête O (*fig.* 28) suivant laquelle deux fluides rencontrent une paroi plane solide PQ. Nous supposons que les liquides adhèrent à la paroi, c'est-à-dire qu'ils sont libres de glisser à sa surface, mais non de l'abandonner en se déplaçant normalement. Cela posé, il suffit, pour l'équi-

libre, que la composante de la tension $A_{1,2}$ à la surface de séparation des deux liquides dirigée dans le plan de la paroi soit égale et de signe contraire à la différence des tensions $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ correspondant à chacune des surfaces de contact avec le solide.

Fig. 28.

Nous appellerons l'angle ROP $= \alpha$ *angle de raccordement* du fluide 2 avec la paroi ; il est déterminé par la condition

$$A_{1,3} - A_{2,3} + A_{1,2} \cos\alpha = 0,$$

$$(1) \qquad \cos\alpha = -\frac{A_{1,3} - A_{2,3}}{A_{1,2}}.$$

Si l'inégalité

$$A_{1,3} - A_{2,3} < A_{1,2}$$

n'est pas satisfaite, l'un des liquides s'étend indéfiniment à la surface de la paroi et l'on dit qu'il la mouille : ainsi l'eau mouille le verre en présence de l'air, et l'angle de raccordement α du verre et de l'eau est de 180°.

FORME D'UN LIQUIDE PESANT AU CONTACT D'UNE PAROI PLANE. — Considérons une cuve indéfinie dans laquelle plonge une paroi plane. L'équation générale de la surface capillaire est (p. 17)

$$(2) \qquad A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = P - \rho z.$$

Puisque la cuve est indéfinie, la surface libre générale, sauf au voisinage de la paroi, est plane $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0\right)$ et a pour équation

$$(3) \qquad P = \rho z.$$

Nous prendrons le plan de la surface libre pour plan des xy ; alors on a dans ce plan $z = 0$, par suite, d'après l'équation (3), $P = 0$, et l'équation (2) devient

$$(4) \qquad A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \rho z = 0.$$

Mais au voisinage d'une paroi plane le rayon de courbure R

de la surface liquide parallèlement à la paroi est infini, et l'on a définitivement

$$(5) \qquad \frac{A}{R} + \rho z = o.$$

Le rayon de courbure R est donc de signe contraire à z : quand le liquide s'élève contre la paroi, la surface liquide est concave; elle est convexe quand le liquide se déprime.

Considérons une section normale du liquide et de la paroi, et prenons pour axe des x la trace de la surface plane générale du liquide. En désignant par z', z'' les deux premières dérivées de z par rapport à x et en tenant compte du signe attribué à R d'après l'observation qui précède,

$$R = -\frac{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''},$$

$$-\frac{A z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \rho z = o.$$

C'est l'équation différentielle de la surface capillaire.

Multiplions le premier membre de cette équation par z' et remontons aux fonctions primitives, il vient

$$\frac{A}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\rho z^2}{2} = C.$$

On peut transformer cette expression en introduisant le sinus de l'angle β que la tangente en un point M quelconque fait avec la verticale. On a, en effet,

$$\sin\beta = \frac{1}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad A\sin\beta + \frac{\rho z^2}{2} = C.$$

Comme d'ailleurs, pour $z = o$, on doit avoir $\beta = 90°$, $C = +A$:

$$(6) \qquad \frac{\rho z^2}{2} = A(1 - \sin\beta).$$

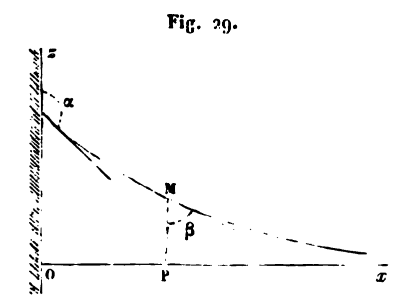
1° *Paroi verticale*. — L'ordonnée de la courbe au contact

de la paroi s'obtient en faisant $\beta = 180^\circ - \alpha$ (*fig.* 29) :

$$(7) \qquad z = \pm\sqrt{\frac{2A}{\rho}(1 - \sin\alpha)}.$$

Si $\alpha > 90^\circ$, on doit prendre le signe + devant le radical; il y a

Fig. 29.



ascension. Si $\alpha < 90^\circ$, on prendra le signe — ; il y a dépression.

Dans le cas de la paroi mouillée, c'est-à-dire pour $\alpha = 180^\circ$,

$$(8) \qquad z = +\sqrt{\frac{2A}{\rho}}.$$

On trouvera aisément le poids de liquide soulevé ou déprimé à partir du niveau général et par unité de longueur prise sur l'horizontale du plan. Ce poids est

$$P = \rho\int z\,dx = \rho\int z\,\frac{dx}{dz}\,dz = \rho\int \operatorname{tang}\beta\, z\,dz.$$

La différentiation de (6) donne d'ailleurs

$$z\,dz = -\frac{A}{\rho}\cos\beta\,d\beta,$$

$$P = A\int -\sin\beta\,d\beta;$$

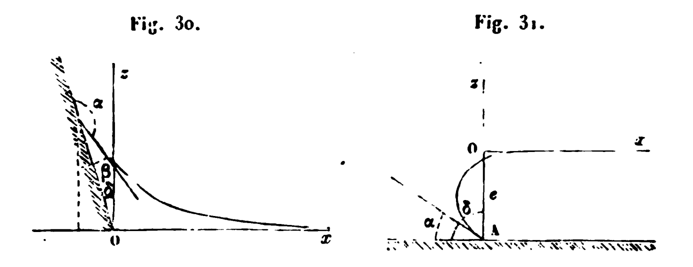
les limites de l'intégrale correspondent à la surface horizontale du liquide $\left(\beta = \frac{\varpi}{2}\right)$ et à la ligne de contact avec le plan

$\beta = \varpi - \alpha$. On a donc enfin

$$(9)\qquad P = A\int_{\frac{\varpi}{2}}^{\varpi-\alpha} - \sin\beta\, d\beta = - A\cos\alpha.$$

Le second membre de cette expression représente la composante verticale de la tension superficielle du liquide, et l'équation (9) exprime qu'elle fait équilibre au poids soulevé, ce qui était évident *a priori*.

2° *Paroi inclinée*. — Soit δ (*fig.* 30) l'angle de la paroi avec



la verticale; on a, au contact de la paroi, $\beta = 180° - \alpha + \delta$, et la formule (6) donne

$$(10)\qquad z = \pm\sqrt{\frac{2A[1-\sin(\alpha-\delta)]}{\rho}}.$$

3° *Goutte de mercure sur une paroi horizontale*. — Enfin, si la paroi est horizontale, $\delta = 90°$ (*fig.* 31) :

$$z = \pm\sqrt{\frac{2A(1+\cos\alpha)}{\rho}}.$$

Le signe + correspond encore au cas de $\alpha > 90°$, le signe — au cas de $\alpha < 90°$.

En particulier, s'il s'agit d'une masse de mercure posée sur une plaque de verre horizontale et se terminant en A (*fig.* 31) par une arête rectiligne, normale au plan de la figure, α est $< 90°$, z est négatif, et le point A où le liquide touche la paroi est au-dessous de la surface libre générale Ox. L'épaisseur

maximum du mercure est égale en valeur absolue à l'ordonnée du point A :

$$e = \sqrt{\frac{2A(1 + \cos\alpha)}{\rho}}. \qquad (11)$$

Si, au lieu de se terminer par une arête rectiligne, la masse ou la *goutte* de mercure se termine par un cercle de rayon R′ très-grand, les résultats qui précèdent sont très-sensiblement applicables et l'épaisseur de la goutte est encore représentée par l'équation (11). Ce résultat a été vérifié expérimentalement par M. Ed. Desains (¹) et par M. Quincke (²).

MESURE DE L'ANGLE DE RACCORDEMENT D'UN LIQUIDE ET D'UN SOLIDE. — Les formules (7) et (11) fournissent une méthode pour déterminer l'angle de raccordement d'un liquide et d'un solide. Supposons qu'il s'agisse du mercure : on mesurera la dépression z qu'il éprouve contre une paroi verticale de verre et l'épaisseur e d'une très-grosse goutte du même liquide posée sur un plan de verre :

$$z = \sqrt{\frac{2A(1 - \sin\alpha)}{\rho}},$$

$$e = \sqrt{\frac{2A(1 + \cos\alpha)}{\rho}}.$$

Ces deux équations déterminent A et α.

Par exemple, M. Éd. Desains (³) a trouvé $e = 3^{mm},492$ pour une goutte de $0^m,099$ de diamètre et $z = 1^{mm},51$. Il en résulterait pour A et α les valeurs

$$A = 46,195,$$

$$\alpha = 41^\circ 36' 30''.$$

(¹) Ed. Desains, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LI, p. 385.

(²) Quincke, *Ann. de Pogg.*, t. CXXXV, p. 621, et t. CXXXIX, p. 5. Le même calcul permet de déterminer l'épaisseur d'une bulle d'air formée au-dessous d'une plaque de verre dans un liquide ; l'angle de raccordement est alors celui qui correspond au liquide, et il faut encore prendre le signe + devant le radical.

(³) Ed. Desains, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LI, p. 443.

Poisson (¹) avait trouvé, d'après les observations de Gay-Lussac,

$$A = 44,364,$$
$$\alpha = 45^\circ 30'.$$

Enfin, les expériences de Danger, calculées par Bravais (²), donnent

$$A = 45,642,$$
$$\alpha = 37^\circ 52' 33''.$$

On le voit, ces diverses expériences, qui ont fourni des valeurs de A assez concordantes, donnent des valeurs de α très-notablement différentes.

D'après M. Quincke (³), l'angle de raccordement du mercure et du verre ne serait pas rigoureusement constant, mais changerait progressivement, même dans le vide, c'est-à-dire indépendamment de toute altération chimique de la surface. Nous verrons plus tard que les constantes capillaires du mercure changent avec l'état électrique des surfaces de contact : peut-être ne faut-il pas chercher ailleurs la raison du désaccord que nous constatons ici.

Dans les Tables qui servent à la réduction des observations barométriques, on fait en général le calcul pour diverses valeurs de la flèche du ménisque ou, ce qui revient au même, pour diverses valeurs de l'angle de raccordement. Chaque observateur devra employer celui de ces angles qui convient au mercure de son baromètre. M. Bravais (⁴) a reconnu que cet angle ne varie pas d'une manière sensible dans un même instrument.

ADHÉSION DES DISQUES MOUILLÉS. — Si l'on fait adhérer un disque de verre à la surface d'un liquide (*fig.* 32), qu'on le

(¹) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire.*

(²) BRAVAIS, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. V, p. 492.

(³) QUINCKE, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LV, p. 227. Ce physicien indique aussi (p. 31), pour la constante A du mercure, une valeur beaucoup plus grande que celles que nous indiquons ici.

(⁴) BRAVAIS, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. V.

soutienne horizontalement au plateau d'une balance et qu'on le soulève ensuite par des poids placés de l'autre côté, on voit l'eau s'élever avec lui comme sous le piston d'une pompe. Coupons le liquide soulevé (*fig.* 33) par un plan AB mené à une hauteur h au-dessus du niveau extérieur; la pression devra être en tous les points de ce plan égale à la pression au niveau général diminuée de h; la surface capillaire est concave, et a pour équation

Fig. 32.



$$A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=-\rho h.$$

Quand on augmente les poids, le liquide se creuse de plus en plus vers le haut et bientôt se sépare, laissant une large goutte adhérente au disque.

Le poids du liquide soulevé est égal au poids P qui tire le plateau; il est aussi égal à la résultante des tensions superficielles sur le contour $2\pi r$ de la ligne de contact. Soit α l'angle du plan tangent à la surface du liquide avec le plan CD; on a, pour déterminer α, la relation

$$2\pi r A \sin\alpha = P,$$

$$\sin\alpha = \frac{P}{2\pi r A}.$$

Interposons une goutte d'eau entre deux disques très larges (*fig.* 34) : elle s'étale entre eux et les fait adhérer l'un à l'autre. Nous supposerons que la quantité d'eau est telle qu'elle remplisse exactement l'intervalle des deux disques en formant sur leurs bords une surface cylindrique dont le rayon r est égal au leur. La pression à l'intérieur diffère très-peu de la pression extérieure, et, si l'on a soudé dans le disque supérieur un tube

Poisson (¹) avait trouvé, d'après les observati
Lussac,

$$A = 44,364,$$
$$\alpha = 45° 30'.$$

Enfin, les expériences de Danger, calcul
donnent

$$A = 45,642,$$
$$\alpha = 37° 52' 33'$$

On le voit, ces diverses expérien
leurs de A assez concordantes, d
notablement différentes.

D'après M. Quincke (²), l'an
et du verre ne serait pas rigou
rait progressivement, même
dammentde toute altérati ... pres-
rons plus tard que les
changent avec l'état él ...rieur à un crochet
être ne faut-il pas d ...g. 35); on diminue par
que nous constatons ... sépare les disques, et l'on

Dans les Tables
barométriques, on
leurs de la flèch
pour diverses v
servateur dev
mercure de
angle ne v
instrumen

Fig. 35.

ADHÉS
disqu

... creuser en ACBD. En même temps, le niveau
... tube capillaire EF. Le poids tenseur est précisé-
... poids d'une colonne liquide qui aurait pour base
... disques et pour hauteur la dépression qui se
... le tube. C'est ce qu'ont démontré les expériences

. auquel sont dues ces dispositions in-

' deux lames parallèles plongées
ont rapprochées, la distance z
dans la cuve varie extrê-
Sa valeur moyenne z est

nisque est alors

(g. 36), d la distance des
signe de R,

$$\ldots = \mathrm{R}\cos\alpha,$$

$$\rho z d = -2\mathrm{A}\cos\alpha,$$

$$z = -\frac{2\mathrm{A}\cos\alpha}{\rho d}.$$

Si $\alpha > 90^\circ$, il y a ascension; si $\alpha < 90^\circ$, il y a dépression. Pour $\alpha = 180^\circ$, on a

$$z = \frac{2\mathrm{A}}{\rho d}.$$

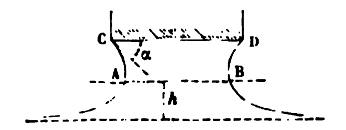
Dans tous les cas, l'ascension ou la dépression capillaire entre les lames varie en raison inverse de leur distance d.

L'équation (11') est susceptible d'une interprétation intéressante. Son premier membre exprime le poids de liquide soulevé entre les deux lames par unité de longueur, le second est la composante verticale de la tension superficielle le long des deux lignes de contact du ménisque et des lames, également par unité de longueur. L'équation (11') exprime donc que la composante verticale de la tension superficielle fait équilibre au poids soulevé, ce qui est une propriété évidente. On peut s'en servir pour retrouver cette équation.

(¹) Simon, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXII, p. 5.

capillaire, on y voit l'eau monter au même r
plongeait dans une cuve librement ouverte
nant les disques à une distance invariable t
et enlevons avec une pipette une partie de l'

Fig. 33.



nous voyons le liquide se
tour ACBD, c'est-à-dire que l
disques. En même temps, le
pillaire d'une quantité équ
sion.

On peut encore susp
et tirer l'inférieur par
là la pression dans le

...ARENTES ENTRE DES LAMES PLON-

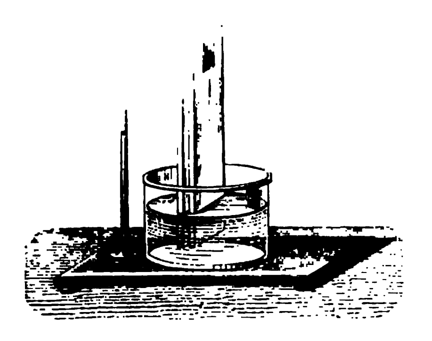
...ginons que les deux lames sont
... liquide, comme l'indique la *fig.* 38,
...rocher ou s'éloigner l'une de l'autre,
... qui agissent sur elles dans le sens hori-

... de deux lames mouillées par le liquide
... dessus de Q et au-dessous de P les deux
... la part de l'air ou du liquide, des pressions

voit le ...
baisse d ...
ment ég ...
la surf ...
produi ...

...noncée par l'équation (11) ne s'applique qu'à la condi- ...ent. Quand l'écartement des lames est sensible, on doit ...mule plus complète qui a été indiquée par M. Quet (*Rapport* ... *capillarité*) et d'après laquelle z est toujours supérieur à ... qui est justement la valeur limite de z pour $d = \infty$.

...traires qui se font équilibre. Mais entre P ...ée par le liquide de l'intérieur à l'exté... ...ression atmosphérique, et, par suite, ...es se rapprochent. On peut repré... ...près les lois ordinaires de l'Hy... ...s aux divers points de la paroi ...le prismatique RPQS ayant ...istance au plan général de



la surface libre. Le prisme MQS représente l'effet total du ménisque en Q, le prisme PMR′ l'effet du ménisque en P. Le prisme tronqué SQPR est l'effet résultant des deux ménisques.

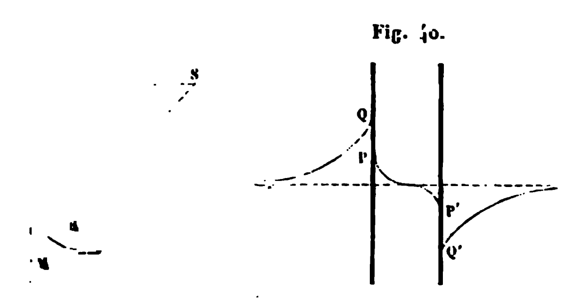
On verra de même que deux lames non mouillées (*fig.* 37) sont pressées plus fort, de P en Q, par le liquide que par l'atmosphère; elles doivent donc s'attirer.

Mais si l'on emploie (*fig.* 40) deux lames dont l'une est mouillée, tandis que l'autre ne l'est pas, elles paraissent se repousser. Le calcul montre en effet que dans ce cas les extrémités P, P′ du ménisque à l'intérieur des lames sont comprises entre les extrémités Q, Q′ des ménisques extérieurs (¹).

(¹) *Voir* Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire.*

...e P et Q par l'atmosphère est ...ient du liquide extérieur, et de ...uide de P' en Q' l'emporte sur celle

Fig. 40.



...ière. Les deux effets tendent à éloigner les lames ...aire (¹).

...ULARITÉS. — Pour démontrer expérimentalement que ...r d'un liquide entre deux lames parallèles est en rai... ...verse de la distance qui les sépare, on a quelquefois re-

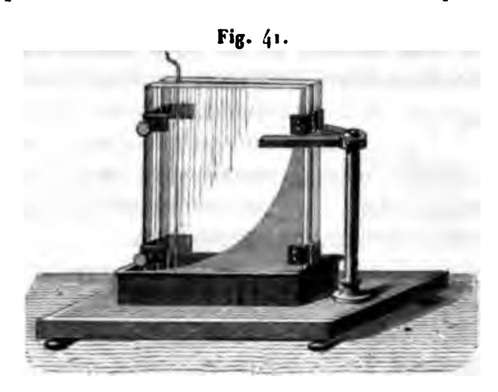
(¹) On observe fréquemment à la surface des liquides des phénomènes ...ction ou de répulsion apparente qui s'expliquent de la même manière. ...corps mouillés par le liquide se rassemblent, et il en est de même ...rps non mouillés, mais les deux espèces de corps se repoussent.

L'expérience suivante, signalée par Mariotte (*Traité du mouvement des ...*; Paris, 1700), montre bien qu'il faut chercher la cause de ces phéno... ...mènes dans la forme des ménisques au contact des corps qui paraissent s'at... ...tirer ou se repousser. On prend deux vases de verre A et B que l'on remplit ...d'eau, l'un A à moitié, l'autre B complétement et de telle sorte que l'eau ...forme au-dessus du bord un ménisque convexe. On voit les bulles d'air qui peuvent se trouver à la surface se coller au bord du vase A et garder le milieu dans le vase B. De petites balles de verre creuses, et en général tous les petits corps *mouillés*, se comportent de la même manière, tandis que de petites boules de cire d'Espagne ou de toute autre substance *non mouillée* se disposent d'une manière inverse; elles se placent au milieu dans le vase A et au bord dans le vase B.

Pour interpréter ces phénomènes, il suffit de remarquer que la surface du liquide forme un ménisque concave contre la paroi du vase A comme au contact des corps flottants mouillés, convexe contre la paroi de B comme au contact des corps non mouillés. Il y a attraction entre le corps flottant et la paroi quand les deux portions du ménisque qui les sépare ont des courbures de même sens (*fig.* 36 et 37), et répulsion dans le cas contraire (*fig.* 40), comme pour deux lames plongeant dans un même liquide et pour les mêmes raisons.

cours à une expérience ingénieuse imaginée par Taylor [1]. Deux glaces planes réunies par des charnières sont disposées de façon que leur intersection soit verticale et qu'elles fassent

Fig. 41.



entre elles un très-petit angle β (*fig.* 41). Considérons un point P (*fig.* 42) à la base de l'une des lames, situé à une distance $AP = x$ de l'intersection. La distance PQ des deux lames en ce point est $x \tang\beta$, et si l'on admet que la hauteur du liquide en MP est la même qu'entre deux lames parallèles situées à la distance PQ [2], elle doit avoir pour valeur

Fig. 42.

$$y = -\frac{A\cos\alpha}{\rho x \tang\beta},$$

c'est-à-dire qu'il y a entre la hauteur y et la distance x au sommet de l'angle des deux lames la relation

$$xy = -\frac{A\cos\alpha}{\rho\tang\beta}.$$

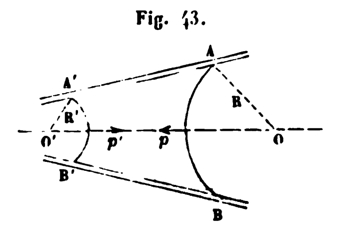
(1) *Transactions philosophiques*, 1712. Cette expérience fut répétée l'année suivante par Hawksbée, à qui on l'attribue d'ordinaire (POGGENDORFF, *Geschichte der Physik*).

(2) Cette hypothèse revient à négliger la courbure du ménisque parallèlement aux lames par rapport à sa courbure perpendiculairement au plan des lames. L'erreur qui en résulte pour les hauteurs y est extrêmement minime tant que celles-ci sont considérables, c'est-à-dire dans presque toute l'étendue de la courbe visible.

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère ayant pour axes les axes choisis. L'expérience réalise cette courbe avec beaucoup de régularité.

MOUVEMENT D'UN LIQUIDE ENTRE DEUX LAMES INCLINÉES. — Quand, entre deux lames inclinées, on dépose une goutte liquide, on voit celle-ci gagner le sommet de l'angle si le liquide mouille les lames ou s'éloigner de ce sommet si le liquide ne les mouille pas.

Fig. 43.



Pour nous rendre compte de ces mouvements, étudions les forces qui tendent à déplacer la goutte. Supposons d'abord que le liquide mouille les lames (*fig.* 43), et désignons par p la pression extérieure, par R et R les valeurs absolues des rayons de courbure perpendiculaires aux plans des lames.

D'après la formule de Laplace, la pression transmise à l'intérieur de la goutte dans le sens oo' par le ménisque AB est $p - \frac{A}{R}$. Elle tend à chasser la goutte vers le sommet des lames. La pression $p - \frac{A}{R'}$ s'exerce en sens contraire, par le ménisque A'B', et, puisque $R' < R$, elle est insuffisante pour faire équilibre à la première; la goutte se déplacera donc jusqu'à ce qu'elle atteigne le sommet.

Si les ménisques sont convexes, les pressions qu'ils transmettent sont $p + \frac{A}{R}$, $p + \frac{A}{R'}$, et leur résultante déplace la goutte vers la base des lames, où le ménisque extérieur se bombe de manière à rétablir l'équilibre (¹).

TUBES CAPILLAIRES.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES TUBES CAPILLAIRES. — Les phénomènes présentés par les tubes capillaires méritent une atten-

(¹) On observe les mêmes mouvements dans des tubes coniques (*fig.* 44). Leur

tion particulière, à cause de l'importance des recherches théoriques et expérimentales auxquelles ils ont donné lieu. C'est principalement en vue de ces phénomènes que Laplace créa sa théorie générale de la capillarité, et c'est à des mesures effectuées sur des tubes qu'ont eu recours tous les physiciens qui, comme Gay-Lussac, Hagen, Éd. Desains et M. Quet, se sont préoccupés de soumettre la théorie au contrôle d'une expérimentation rigoureuse.

Nous considérerons un tube capillaire suffisamment étroit pour que l'on puisse physiquement négliger la hauteur du ménisque par rapport à l'ascension ou à la dépression moyenne z, et confondre le ménisque avec une calotte sphérique de rayon R. L'équation générale de la surface capillaire devient alors

$$\frac{2A}{R} + \rho z = 0. \tag{13}$$

Soient r le rayon OP du tube (*fig.* 45), α l'angle de raccordement, on a, en tenant compte des signes,

$$r = R\cos\alpha,$$

et l'équation (13) devient

$$-\frac{2A\cos\alpha}{r} = \rho z,$$

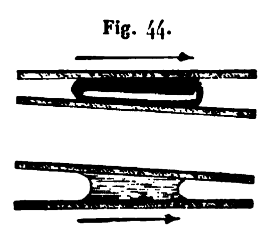
$$z = -\frac{2A\cos\alpha}{\rho r}. \tag{14}$$

Si $\alpha > 90°$, z est positif; le ménisque liquide est concave et

---

explication est la même et nous n'y reviendrons pas : il suffit, en effet, de

Fig. 44.

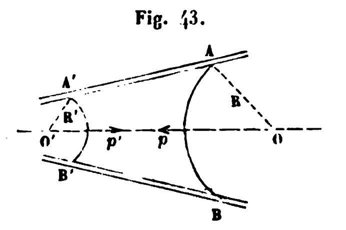


remplacer $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ par $\frac{2}{R}$, $\frac{2}{R'}$ dans l'expression des pressions transmises.

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère ayaı les axes choisis. L'expérience réalise cette courb(coup de régularité.

MOUVEMENT D'UN LIQUIDE ENTRE DEUX LAMES I Quand, entre deux lames inclinées, on dépose u quide, on voit cell sommet de l'angle mouille les lame de ce sommet si l mouille pas.

Fig. 43.



Pour nous re ces mouveme forces qui ten goutte. Supposons d'abord que le liquide (*fig.* 43), et désignons par p la pression e les valeurs absolues des rayons de courb aux plans des lames.

D'après la formule de Laplace, la pre térieur de la goutte dans le sens oo est $p - \frac{A}{R}$. Elle tend à chasser la gou lames. La pression $p - \frac{A}{R'}$ s'exerce ménisque A'B', et, puisque $R' < R$, faire équilibre à la première; la gou qu'à ce qu'elle atteigne le sommet.

Si les ménisques sont convexes mettent sont $p + \frac{A}{R}$, $p + \frac{A}{R'}$, goutte vers la base des lames, bombe de manière à rétablir l'é

TUBES CA

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES TU mènes présentés par les tub

(¹) On observe les mêmes mouven

CORRECTIONS. — Quand on veut soumettre à un contrôle expérimental rigoureux la théorie des tubes capillaires, il est nécessaire de tenir compte de la hauteur du ménisque. Tant que le tube est suffisamment étroit, il suffit de retrancher du poids P soulevé dans le tube (équation 16) le poids de la calotte sphérique de rayon r correspondant au ménisque. Dans le cas particulier d'un liquide qui mouille le tube ($\alpha = 180°$), la calotte est hémisphérique et pèse $\frac{2}{3}\pi r^3 \rho$. L'ascension capillaire est donc

$$z = 2\left(\frac{A}{\rho r} + \frac{r}{3}\right).$$

Cette correction, indiquée par Laplace, suffit dans les cas ordinaires. Pour des tubes plus larges, Hagen [1] a proposé de considérer le ménisque comme une portion d'ellipsoïde, et c'est ce qu'a fait notamment M. Éd. Desains [2]. Enfin, M. Quet [3] a résolu complétement la question, même pour le cas des tubes très-larges, dans un Mémoire dont les résultats seuls ont été publiés. Après avoir montré comment on peut intégrer, dans le cas général, l'équation de la surface capillaire à l'intérieur d'un tube cylindrique ou entre deux plaques verticales, il a calculé des formules qui donnent exactement la flèche du ménisque et la distance de sa base au plan de la surface libre.

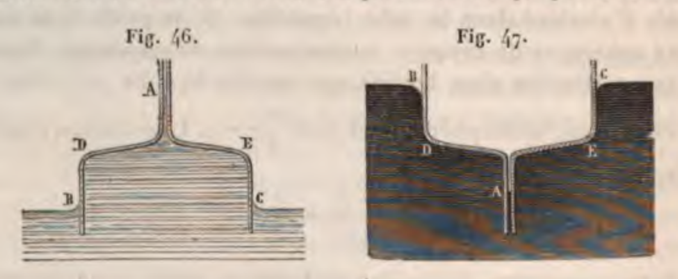
EXPÉRIENCES DE GAY-LUSSAC. — On peut aisément vérifier que l'ascension ou la dépression capillaire ne dépendent que des propriétés de la surface terminale, comme le supposent les raisonnements qui précèdent. Par exemple, dans les tubes ABCDE des *fig.* 46 et 47, l'ascension ou la dépression est la même que si les tubes avaient partout le même diamètre qu'au point A. Une trace de matière étrangère déposée en A modifie les propriétés superficielles du liquide et du tube (la tension superficielle et l'angle de raccordement), et par suite la grandeur de

(1) HAGEN, *Académie de Berlin*, 1845.
(2) ÉD. DESAINS, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LI, p. 385; 1857.
(3) QUET, *Rapport sur les progrès de la capillarité*. Paris, 1867.

l'ascension ou de la dépression ; partout ailleurs la présence de corps étrangers est indifférente.

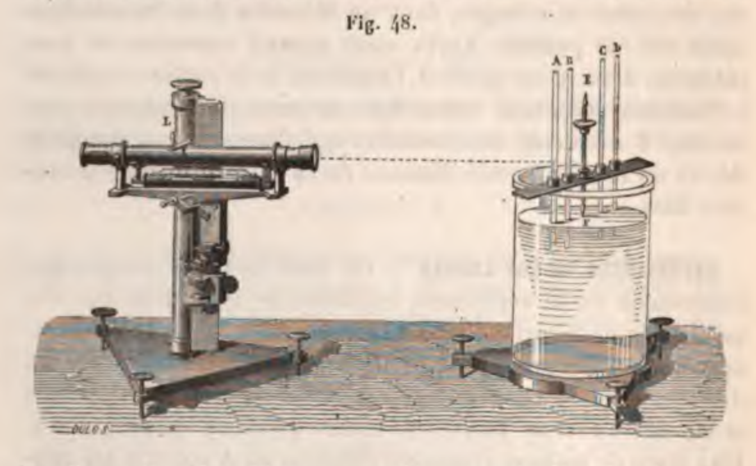
On peut donc désormais opérer avec des tubes cylindriques, qu'on devra s'efforcer de rendre parfaitement propres, et avec

Fig. 46. Fig. 47.



des liquides purs ; on vérifiera la loi des diamètres et la relation des ascensions dans un tube ou entre deux plaques de même substance ayant un écartement égal au diamètre du tube. On calculera ainsi la valeur de la constante $A \cos \alpha$ pour

Fig. 48.



les divers liquides. C'est ce que fit en particulier Gay-Lussac, qui le premier vérifia les résultats de la théorie de Laplace. Gay-Lussac (¹) prit un large vase de verre (*fig*. 48), dont il fit user les bords à l'émeri sur un plan, afin de les bien dresser ;

(¹) Laplace, *Mécanique céleste*, l. X, Supplément : *Théorie capillaire*.

[redacted]

puis il mit ce vase plein de liquide sur un support à vis calantes et régla l'horizontalité du plan qui contient les bords; il plaça sur ces bords une lame métallique percée de plusieurs trous dans lesquels étaient fixés verticalement les tubes à essayer A, B, C, D; enfin une vis à deux pointes E, F, dont on connaissait la longueur, s'enfonçait dans un écrou et pouvait affleurer par le bas avec la surface du liquide extérieur.

Une sorte de cathétomètre placé à distance visait alternativement les sommets des colonnes liquides élevées dans les tubes et la pointe E de la vis d'affleurement; on en déduisait le niveau extérieur du liquide et l'on avait la mesure des élévations.

Chacun des tubes avait été choisi parmi ceux qui offrent le diamètre intérieur le plus constamment égal dans toute sa longueur; on avait mesuré son diamètre par la pesée de la colonne de mercure qui le remplissait; l étant sa longueur, P son poids, on calculait le rayon r par la formule

$$\pi r^2 l D = P.$$

On avait lavé ces tubes avec de l'acide sulfurique concentré, on les avait rincés ensuite avec de l'eau distillée, puis avec le liquide que l'on voulait éprouver.

Voici quelques-uns des résultats obtenus :

	Diamètre $2r$.	Élévation z.	Produit $2rz$.
	mm	mm	mm
Eau.........	1,29	23,16	29,87
	1,90	15,58	29,60
Alcool..........	1,29	9,18	11,84
	1,90	6,08	11,55
Lames et eau ...	1,069	13,57	14,52

On remarquera d'abord, en ce qui concerne les tubes, que pour un même liquide, eau ou alcool, le produit du diamètre par l'élévation est constant, ce qui est l'énoncé de la loi de Jurin.

En second lieu, deux lames parallèles, maintenues à une très-petite distance l'une de l'autre, ayant été plongées dans l'eau et la différence de niveau ayant été mesurée, on a fait le produit de la distance par l'élévation : il a été sensiblement égal à la moitié de celui qu'avaient donné les tubes, conformément à la loi de Laplace.

Expériences de Éd. Desains et de MM. Quet et Seguin. — Les expériences de Gay-Lussac n'avaient subi d'autre correction que celle de Laplace, et n'avaient pu être étendues à des tubes très-larges. D'autre part, des expériences intéressantes, mais fautives, de Simon ([1]) (de Metz) avaient jeté des doutes sur l'exactitude de la loi de Jurin dans le cas des tubes très-fins. Il était donc nécessaire de reprendre le travail de Gay-Lussac, en lui donnant plus d'extension. C'est ce que fit Éd. Desains ([2]).

Ce physicien mesura le diamètre des tubes par la méthode de Gay-Lussac : il introduisait dans les tubes une colonne de mercure dont il déterminait la longueur à l'aide d'une machine à diviser et dont il évaluait le poids P à la balance. Il tenait compte des ménisques terminant aux deux extrémités la colonne de mercure, en se servant, à cet effet, d'une Table publiée par Danger. Pour des tubes plus larges, on prend de l'eau au lieu de mercure; le tube, fermé par un bout, est d'abord pesé avec une certaine quantité d'eau, on le dresse ensuite verticalement devant un cathétomètre, et on vise la partie inférieure du ménisque creux; ajoutant ensuite une nouvelle colonne d'eau, on relève une seconde fois la position du ménisque, et on a la longueur d'un cylindre équivalent à la colonne liquide; l'un des ménisques compense l'autre. Il ne reste plus qu'à peser de nouveau le tube, et on a tous les éléments nécessaires pour le calcul exact du diamètre.

Pour la mesure des ascensions capillaires, Éd. Desains prend un trépied à vis calantes, percé en son milieu d'une ouverture dans laquelle il assujettit le tube à l'aide d'un bouchon. Il le rend vertical à l'aide de deux fils à plomb, puis place sous le tube une soucoupe pleine d'eau, de telle sorte que le liquide forme au-dessus des bords une surface convexe. Il descend une pointe jusqu'auprès de la surface de l'eau dans la soucoupe et vise au cathétomètre successivement cette pointe et son image; la position moyenne de la lunette donne exactement le niveau de l'eau dans la soucoupe. Il ne reste plus, pour trouver l'ascen-

(1) Simon, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXII, p. 5; 1851.
(2) Éd. Desains, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LI; 1857.

. qu'à viser la partie inférieure du ménisque dans

Les tubes très-étroits sont rarement des cylindres; on peut admettre que ce sont des cônes à section elliptique. Pour étudier la section de ces tubes, Éd. Desains projetait, à l'aide d'un microscope et d'une chambre claire, leur image grossie sur une feuille de papier sur laquelle il mesurait le diamètre du trou intérieur : le rapport du plus grand et du plus petit diamètre obtenus en faisant tourner le tube sur lui-même est le rapport des deux axes de l'ellipse de section; on s'en sert pour déterminer théoriquement l'ascension capillaire. On mesure aussi l'angle au sommet des cônes auxquels appartiennent les tubes, mais cet angle s'est toujours trouvé trop faible pour qu'il ait été nécessaire d'en tenir compte dans le calcul.

Pour les tubes larges, qui sont très-sensiblement circulaires, il n'y avait d'autre correction à faire que celle qui se rapporte à la forme du ménisque. M. Desains l'effectuait en assimilant celui-ci à un demi-ellipsoïde de révolution, comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

En résumé, les expériences d'Éd. Desains ont établi que la théorie de la capillarité suffit à rendre compte de tous les phénomènes; elles ont fixé la valeur de la constante capillaire de l'eau à 7,555 à la température de 8°,5. A cette température, l'eau s'élève à $30^{mm},05$ dans un tube de $0^{m},001$ de diamètre.

MM. Quet et Seguin [1] ont réalisé de nouvelles expériences sur le même sujet et obtenu un très grand nombre de mesures sur des tubes dont le plus large avait $27^{mm},85$ de diamètre et entre des lames dont les plus écartées étaient à une distance de $11^{mm},20$. Ils y ont joint les résultats de Gay-Lussac et de Éd. Desains, et appliqué à ce vaste ensemble de mesures excellentes les formules de M. Quet pour la correction du ménisque. L'accord de la théorie et de l'expérience s'est toujours réalisé à quelques centièmes de millimètre près. On peut donc admettre que la théorie des phénomènes capillaires est absolument rigoureuse.

(1) QUET, *Rapport sur les progrès de la capillarité*. Paris, 1867.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — EXPÉRIENCES DE M. WOLF. — CALCULS DE M. QUET. — L'influence de la température sur l'ascension de l'eau dans les tubes capillaires a été étudiée par Brunner (¹) et par M. Wolf (²). Nous nous occuperons surtout du travail de ce dernier expérimentateur. La cuvette et le tube capillaire étaient entièrement plongés dans un manchon de cuivre rempli d'eau, à travers lequel avaient été réservées deux fenêtres pour faire au cathétomètre la lecture des niveaux. Entre 0° et 25°, la variation de température n'était autre que la variation naturelle de la température du laboratoire; mais, pour des températures plus hautes, on produisait dans le manchon une circulation continue d'eau chauffée dans un ballon à une température variable. On s'astreignait à faire affleurer l'eau à un point invariable du tube et l'on relevait ou l'on abaissait celui-ci de petites quantités suivant le besoin.

M. Wolf a représenté le résultat de ses expériences par des formules paraboliques, telles que

$$z = a - bt + ct^2, \tag{15}$$

l'une pour des températures comprises entre 0° et 25°, l'autre pour des températures plus élevées. D'après Laplace, la hauteur z devrait varier en raison inverse de la densité ρ de l'eau et du diamètre $r(1 + \alpha t)$ du tube dilaté par la chaleur. M. Wolf a trouvé que la diminution indiquée par la formule empirique est beaucoup plus rapide qu'elle ne devrait l'être d'après cette théorie. La même conséquence résulte des expériences de Brunner sur l'eau, l'éther et l'huile d'olive. Comme aux températures ordinaires l'eau mouille le verre et que l'angle de raccordement est constamment égal à 180°, il faut que la tension superficielle A diminue quand la température s'élève.

M. Quet a montré que, si l'on fait intervenir dans le calcul de l'attraction moléculaire la variation de la distance moyenne de deux molécules résultant de l'action de la chaleur, on peut prévoir une diminution de la constante capillaire A, et que la

---

(¹) BRUNNER, *Annales de Poggendorff*, t. LXX, p. 481.

(²) WOLF, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XLIX, p. 230.

loi de cette diminution est bien d'accord avec le résultat des expériences de MM. Brunner et Wolf.

M. Wolf a étudié expérimentalement un autre cas très-intéressant de l'action de la chaleur. Un tube capillaire T est maintenu par des ressorts à l'intérieur d'un tube fermé F, contenant le liquide sur lequel on veut expérimenter, de l'éther par exemple. Quand on chauffe ce tube au bain d'huile, on voit le liquide baisser dans le tube T, et vers 190° ou 191° le niveau de l'éther est le même à l'intérieur et à l'extérieur. On constate en même temps que le ménisque a perdu peu à peu sa courbure et qu'il est devenu tout à fait plan. Vers 200°, le liquide se réduit complétement en vapeur; puis, si l'on abaisse la température, on voit le liquide reparaître, et, pendant le refroidissement, les phénomènes se succèdent dans l'ordre inverse de celui qu'ils affectaient dans la période d'échauffement. M. Wolf a trouvé les mêmes apparences en remplaçant l'éther par du sulfure de carbone, de l'huile de naphte ou de l'alcool.

Pour expliquer l'aplatissement du ménisque observé dans ces nouvelles expériences, il ne suffit plus d'invoquer la diminution de la constante capillaire du liquide : il faut encore rendre compte de la variation de l'angle de raccordement, qui est passé progressivement de 180° à 90°. On y parvient en remarquant que, à mesure que la température s'élève, la densité de la vapeur qui surmonte le liquide augmente avec sa pression, et qu'au voisinage immédiat de la température de volatilisation totale le liquide et sa vapeur ont sensiblement la même densité et les mêmes propriétés physiques : l'angle de raccordement doit donc avoir la même valeur pour le liquide et sa vapeur, c'est-à-dire qu'il est droit et que la surface de séparation est plane. M. Quet a appliqué le calcul à ces phénomènes remarquables, et donné des formules propres à représenter les actions capillaires dans les conditions les plus générales.

MESURE DE LA TENSION SUPERFICIELLE DES LIQUIDES QUI MOUILLENT LE VERRE. — L'observation des ascensions dans les tubes capillaires fournit le moyen le plus précis que l'on connaisse pour

mesurer la tension superficielle des liquides qui mouillent le verre. En désignant par ρ la densité du liquide, par r le rayon du tube, par z l'ascension capillaire, et en supposant l'angle de raccordement égal à 180° exactement (1), on a

$$A = \frac{\rho r z}{2}.$$

Des observations de ce genre ont été faites par de nombreux expérimentateurs, tels que Brunner (2), Hagen (3), Frankenheim (4), MM. Wilhelmy (5), Mendeleeff (6) et Bède (7). Le Tableau ci-contre, que nous reproduisons à titre de renseignement, a été dressé par M. Wüllner d'après leurs observations.

M. Valson a employé le même procédé pour étudier l'influence exercée sur la tension superficielle de l'eau par les substances salines qu'elle peut contenir en dissolution (8).

---

(1) S'il n'en était pas rigoureusement ainsi, les nombres du Tableau ci-contre donneraient seulement les valeurs $- A \cos\alpha$. D'après M. Quincke, l'angle de raccordement serait rarement égal à 180° exactement, mais cette conclusion ne paraît pas très bien établie.

(2) Brunner, *Annales de Poggendorff*, t. LXX, p. 481.

(3) Hagen, *Abh. der Berliner Akademie*, 1845.

(4) Frankenheim, *Cohäsionslehre*. Breslau, 1835.

(5) Wilhelmy, *Annales de Poggendorff*, t. CXIX, p. 177; t. CXXI, p. 44; t. CXXII, p. 1.

(6) Mendeléeff, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L, p. 52, et t. LI, p. 97.

(7) Bède, *Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles*, t. XXX.

(8) Valson, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XX, p. 361. M. Valson a comparé des dissolutions salines normales contenant, pour 1lit d'eau, un nombre de grammes de chaque sel égal à son équivalent. Il a reconnu que l'on pouvait représenter les variations produites dans les hauteurs capillaires en attribuant à chaque acide et à chaque base un module caractéristique, de telle sorte que le module attribué à un sel quelconque soit la somme des modules de l'acide et de la base dont il est formé.

Quand on fait dissoudre dans l'eau des poids variables d'un même sel, la hauteur capillaire h est une fonction linéaire $a - bp$ du poids p de sel contenu dans 100gr de la dissolution, tout au moins tant que le poids de sel dissous n'est pas extrêmement considérable; a est la hauteur capillaire correspondant à l'eau pure. En désignant par e l'équivalent du sel, son module est égal à be.

LIQUIDE.	POIDS spécifique.	A.	TEMPÉRATURE.	OBSERVATEUR.
Eau	1,000	7,666	0°	Brunner.
	//	7,558	//	Hagen.
Acide sulfurique	1,849	6,333	14,5	Frankenheim.
	1,522	7,610	17,5	Id.
	1,127	7,556	//	Id.
Acide chlorhydrique	1,153	7,149	//	Id.
Acide nitrique	1,500	4,275	16,0	Id.
	1,271	6,768	19,0	Id.
	1,117	7,098	//	Id.
Solution de sel marin	1,200	8,400	//	Id.
» de nitrate de potasse.	1,137	7,276	//	Id.
» » de soude.	1,373	8,512	//	Id.
Alcool absolu	0,7933	2,325	18°-24°	Wilhelmy.
Alcool étendu	0,810	2,361	17	Frankenheim.
	0,895	2,775	//	Id.
	0,967	3,727	//	Id.
Alcool amylique	0,8181	2,427	18°-24°	Wilhelmy.
	//	2,445	//	Mendeléeff.
	//	2,426	//	Bède.
Éther	0,725	1,815	18°-24°	Wilhelmy.
	//	1,737	20	Brunner.
	//	1,796	//	Mendeléeff.
	//	1,892	//	Bède.
Acétone	0,8124	2,581	18°-24°	Wilhelmy.
Acide acétique	1,0511	2,973	//	Id.
Acétate d'éthyle	0,8814	2,564	//	Id.

COMPARAISON DES DIVERS PROCÉDÉS EMPLOYÉS POUR LA MESURE DE LA TENSION SUPERFICIELLE. — Deux sortes de procédés nous ont servi pour la mesure de la constante capillaire des liquides : les uns, fondés sur l'emploi des systèmes laminaires, nous ont permis de mesurer directement la tension superficielle des liquides plus ou moins visqueux ; les autres utilisant l'observation des ascensions ou des dépressions capillaires, s'appliquent de préférence aux liquides les plus fluides : les uns et les autres donnent des résultats concordants pour les liquides de faible viscosité, comme l'eau de savon ; mais on ne saurait affirmer qu'ils fournissent des nombres tout à fait compa-

rables pour des liquides aussi différents que le liquide glycérique et l'eau distillée. En effet, pour les liquides qui possèdent une viscosité propre considérable (laquelle appartient à toute la masse), la tension superficielle apparente mesurée par les systèmes laminaires doit être trop forte ; d'autre part, ce genre de mesure oblige à laisser pendant assez longtemps la surface sur laquelle on expérimente en contact avec l'air, dont les poussières viennent la salir et où elle répand par son évaporation quelques-uns des éléments qui la constituent. Cette surface acquiert ainsi des propriétés différentes de celles d'une surface fraîche, d'où les variations, souvent considérables, signalées par tous les expérimentateurs ([1]).

Le procédé par les tubes capillaires met à l'abri de tous ces inconvénients ; mais il n'est pas toujours possible d'y recourir, et pour un certain nombre d'applications usuelles on a dû chercher des procédés plus expéditifs. Hagen ([2]) proposa le premier de mesurer le poids des gouttes fournies par l'écoulement lent d'un liquide à travers un tube capillaire et d'en déduire la tension superficielle. On peut tout au moins mesurer ainsi le rapport des tensions superficielles de deux liquides, en se fondant sur les considérations suivantes.

Quand une goutte se forme à l'extrémité d'un tube de rayon r, elle possède à sa partie inférieure un rayon de courbure R, et la pression à son intérieur l'emporte de $\frac{2A}{R}$ sur la pression atmosphérique. Si la pression hydrostatique est supérieure à cette quantité, la goutte grossit jusqu'à ce que, son poids l'emportant sur la tension superficielle, le liquide se rompe et la goutte tombe. Il en résulte d'abord que le poids de la goutte doit être proportionnel au périmètre d'attache, c'est-à-dire, entre certaines limites, proportionnel au diamètre de l'orifice d'écoulement : cette loi a été énoncée par Tate et vérifiée par M. Duclaux ([3]).

([1]) MARANGONI, *Nuovo Cimento*, nouvelle série, t. III, 1878.

([2]) HAGEN, *Ueber Oberflächen der Flüssigkeiten* (*Annales de Poggendorff*, t. LXXX, p. 559).

([3]) DUCLAUX, *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXI, p. 378.

Au lieu de comparer les poids des gouttes d'un même liquide qui s'écoule par divers orifices, on peut comparer les poids de gouttes de liquides différents issues d'un même orifice : dans les mêmes limites, ces poids seront proportionnels aux tensions superficielles et en fourniront une mesure relative. M. Duclaux a montré que le résultat ainsi obtenu coïncide avec celui que fournissent les autres méthodes. Le nouveau procédé offre l'avantage d'une extrême rapidité pour la comparaison de liquides commerciaux et peut parfois se substituer utilement aux mesures aréométriques, par exemple pour constater dans l'eau la présence d'une faible quantité d'alcool ([1]); mais il est sujet à toutes les causes d'erreur

---

([1]) La pipette recommandée par M. Duclaux a 5^{cc} de capacité; elle est munie d'un petit orifice latéral et donne exactement 100 gouttes quand on la remplit d'eau distillée à 15°. Le Tableau suivant, extrait du Mémoire de M. Duclaux, permettra d'apprécier la sensibilité du procédé qu'il recommande :

Titre alcoolique.	Température.			
	5°.	10°.	15°.	20°.
0,00	98,0	99	100	101
0,25	100,0	101	102	103
0,5	101,5	102,5	103,5	104,5
0,75	103,5	104,5	105,5	106,5
1,00	105	106	107	108
2,00	110,5	111,5	113	114,5
3,00	115,5	116,5	118	120
4,00	119,5	121	123	125
5,00	123,5	125	127	129
6,00	127	129	131	133
7,00	130	132	134	136,5
8,00	133	135,5	137,5	140
9,00	137	139	141,5	144
10,00	140,5	142,5	145	147,5
15,00	155	157,5	160	163
20,00	169,5	172,5	175,5	177,5
30,00	200,0	202	204,0	205
40,00	225,5	226,5	227,5	228,5
50,00	240,0	241,0	242	242,5
60,00	248,0	249,0	249,5	250
70,00	253,0	253,5	254	254,5
80,00	256,0	256,5	257	257,5
90,00	258	258,5	259	260,0

inhérentes aux méthodes qui exposent la surface en expérience au contact prolongé de l'air (*voir* p. 58).

M. Quincke (1) a appliqué la méthode de l'écoulement par gouttes à des substances fondues contenues dans des tubes de diamètre connu ou même à des fils métalliques portés progressivement par une de leurs extrémités à leur température de fusion. Dans ce dernier cas, l'application de la méthode ne paraît guère justifiée. Toutefois, nous reproduisons, à titre de renseignement curieux, quelques-uns des résultats publiés par l'auteur.

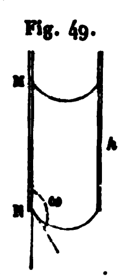
SUBSTANCES.	POINT de fusion.	CONSTANTE capillaire A.	DENSITÉ à la température de fusion.	$\frac{2A}{\rho}$.
Platine	2000°	169,04	18,915	17,86
Or	1200	100,22	17,099	11,71
Zinc (dans CO^2)	360	87,68	6,900	25,42
Étain	230	59,85	7,144	16,75
Plomb (dans CO^2)	330	45,66	10,952	8,339
Argent	1000	42,75	10,002	8,549
Sodium (dans CO^2)	90	25,75	0,972	52,97
Borax	1000	21,60	2,5	17,28
Verre	1000	18,09	2,380	15,21
Azotate de potasse	339	9,954	2,04	9,759
Soufre	111	4,207	1,966	4,280
Phosphore	43	4,194	1,833	4,575
Cire	68	3,40	0,963	7,061

Pour fournir un terme de comparaison, nous rappellerons que, d'après les excellentes mesures d'Éd. Desains, la constante capillaire de l'eau est 7,555, celle du mercure 46,195.

SUSPENSION D'UN LIQUIDE DANS UN TUBE CAPILLAIRE OU SUR UN TISSU A LARGES MAILLES. — Remplissons un tube capillaire par aspiration dans une cuvette contenant un liquide qui le mouille

(1) QUINCKE, *Annales de Poggendorff*, t. CXXV, p. 621, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XVI, p. 502; 1869.

et retirons le tube avec précaution. Une colonne liquide reste suspendue et forme, à l'extérieur du tube, un ménisque bombé se raccordant avec le premier élément de paroi suivant un certain angle ω. Il doit y avoir équilibre entre le poids P du liquide et la somme F des composantes de la tension superficielle à la partie supérieure et à la partie inférieure de la colonne. Or, en désignant par h sa hauteur, par r le rayon du tube, on a


Fig. 49.

$$P = \varpi r^2 h;$$

la tension superficielle en M a pour valeur $2A\varpi r$, et sa composante verticale en N, $-2A\varpi r\cos\omega$. Donc

$$F = 2A\varpi r(1 - \cos\omega);$$

comme, d'ailleurs, on doit avoir $P = F$,

$$h = \frac{2A}{r}(1 - \cos\omega).$$

Cette hauteur sera maximum pour $\omega = \varpi$ et égale au double de l'ascension capillaire dans le tube ([1]).

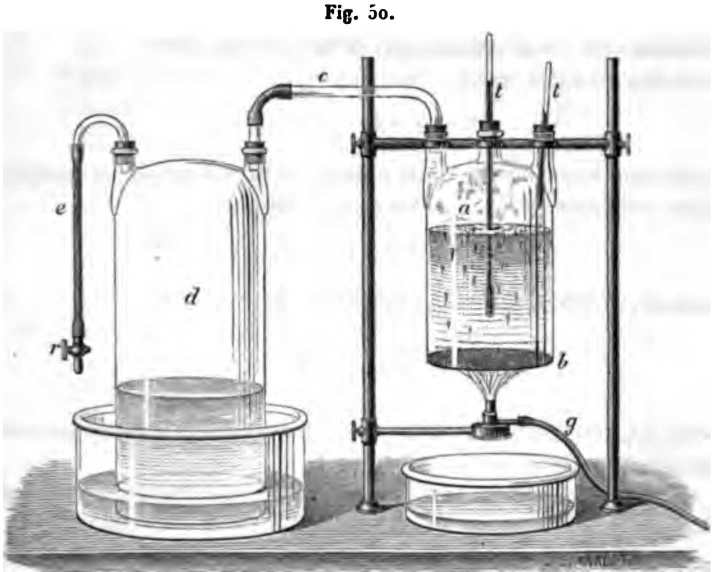
On peut observer la suspension de l'eau sur un tissu à mailles plus ou moins serrées, comme l'a montré M. de Romilly ([2]). On prend une cloche de verre ab de $0^m,20$ de diamètre, que l'on ferme à sa base par un tulle dont les mailles sont espacées de $0^m,002$ à $0^m,003$; on fixe cette cloche de manière que sa base soit en bas et bien horizontale; on la plonge ensuite dans une cuve pleine d'eau que l'on aspire en partie à l'intérieur de la cloche (*fig.* 50), au moyen d'un tube en caoutchouc e à robinet. On ferme le robinet, on retire la cloche et l'eau demeure suspendue. A chaque maille correspond à l'extérieur un ménisque convexe assez prononcé.

([1]) En secouant le tube, on peut facilement réduire cette hauteur à peu près à moitié, car l'équilibre n'est stable que pour des mouvements qui soulèvent la colonne dans le tube; il est instable pour des mouvements qui le dépriment [Bertrand, *Mémoire sur la théorie des phénomènes capillaires* (*Journal de Liouville*, t. XIII, p. 185; 1848)].

([2]) De Romilly, *Journal de Physique*, t. VI, p. 85; 1877.

On peut échauffer l'eau jusqu'à l'ébullition : malgré la diminution de la constante capillaire produite par la chaleur, l'eau se maintient suspendue et bout tranquillement. Pour le succès de cette dernière expérience, il est bon de faire communiquer la cloche à ébullition *ab* avec une très-grande cloche *d* (*fig.* 50),

Fig. 50.



afin que la pression ne puisse, en s'élevant brusquement, dépasser le poids que peuvent supporter les ménisques en se raccordant avec les fils sous un angle de 180°. Le liquide s'écoulerait alors peu à peu à travers les mailles.

CHAPELETS CAPILLAIRES. — Des phénomènes précédents, il convient de rapprocher celui des chapelets capillaires étudiés par M. Jamin (1). Que l'on prenne un tube capillaire dont la longueur soit environ égale à 1m, et qu'on le mette en communication avec une enceinte vide ; on déterminera dans le canal

(1) Jamin, *Comptes rendus des séances l'Académie des Sciences*, t. L, p. 172, 311 et 385 ; 1860.

intérieur un courant d'air allant de l'atmosphère à l'enceinte. Si alors on approche de l'extrémité libre le doigt garni d'un linge mouillé, qu'on l'appuie et qu'on le soulève alternativement un très-grand nombre de fois, à des intervalles très-rapprochés, on verra des index liquides, séparés par des bulles d'air, parcourir le tube avec une vitesse très-grande, mais qui diminuera à mesure qu'ils se multiplieront et qui finira par devenir nulle. A ce moment, l'opération s'arrêtera, et il y aura dans le tube un chapelet de grains d'air et d'eau. Ces chapelets ont été étudiés par M. Jamin.

Lorsqu'on exerce une pression à une extrémité, les premiers index s'avancent vivement, les suivants se déplacent moins et les derniers restent immobiles. Si la pression est h, le mouvement se transmet jusqu'à l'index de rang m; si elle est $2h$, le mouvement se transmet jusqu'à l'index de rang $2m$. Cette pression se fait sentir jusqu'à un index dont le rang lui est proportionnel. L'extrémité de la colonne ne se déplacera donc que lorsque la différence de pression aux deux extrémités du tube sera proportionnelle au nombre des grains du chapelet. On a pu, avec un chapelet dont les grains étaient assez fins et assez nombreux, conserver une pression de 3^{atm} pendant quinze jours, sans remarquer le moindre déplacement dans le liquide. Le même appareil, mastiqué au sommet d'un baromètre, a gardé un vide tel, que le mercure se maintenait absolument comme si le sommet était parfaitement fermé.

Il est facile d'expliquer comment, dans les appareils de cette nature, toute pression exercée à une des extrémités diminue, par cascades successives, d'une quantité constante à chaque interruption.

En effet, la première action de cette pression doit être de creuser la surface antérieure du premier index et d'augmenter le rayon de courbure du ménisque postérieur. La différence s'exagère peu à peu jusqu'à une valeur maximum, et l'index, opposant une résistance limitée L, ne transmet plus à la bulle qui le suit que la pression $H' - L$; la même chose a lieu pour tous les autres index, jusqu'au dernier qui communique une pression $H' - nL$. Si cette pression est égale à celle de l'atmosphère H, l'équilibre existe.

Distinguons deux cas :

1° Lorsqu'on a soulevé préalablement le tube et qu'on laisse la colonne prendre son équilibre en descendant, la longueur totale du liquide soulevé est $a + n\text{L}$: elle peut croître indéfiniment avec n.

Si le poids de chaque index est égal à L, ils sont en équilibre individuellement, et l'on peut soutenir une colonne de hauteur indéfinie qui n'est interrompue que par de très-petites bulles et qui est partout à la pression atmosphérique.

2° Si l'on enfonce le tube dans le bain de manière que le liquide prenne son équilibre en remontant, la longueur soulevée est diminuée proportionnellement au nombre des bulles et devient $a - n\text{L}$; elle est toujours plus petite que si la colonne était continue; elle peut devenir négative et décroître indéfiniment.

La valeur de la résistance L qu'un index peut opposer à la pression est indépendante de la longueur des index, elle croît très-rapidement lorsque le diamètre diminue. Elle équivaut à $0^{m},054$ dans un tube où l'ascension capillaire est de $0^{m},200$. Ainsi quatre interruptions équivalent à la force d'ascension.

Si le tube, au lieu d'être cylindrique, présente des étranglements et des dilatations, ses propriétés sont encore plus curieuses. Si une fois il a été mouillé, il conserve adhérente une gaîne liquide qui, se réunissant dans les étranglements, donne naissance à autant d'index. Dans un pareil tube, les propriétés précédentes sont considérablement exagérées. Un tube qui avait huit étranglements, il est vrai fort petits, a suffi pour maintenir une pression de 2^{atm} ou fermer hermétiquement un baromètre.

Si un pareil tube est plein d'eau et qu'on y chasse un courant du même liquide par l'une de ses extrémités, elle filtre très-facilement; mais si, au contraire, on y comprime de l'air, l'eau sera chassée, des index resteront dans les étranglements et bientôt ils détruiront la pression.

Si, au contraire, le tube contient de l'air, et si l'on y envoie de l'eau, elle détruira les index, remplira le tube et finira par filtrer.

[redacted]

CORPS POREUX. — Ces conséquences s'appliquent aux corps poreux, dans lesquels on peut admettre l'existence de canaux alternativement resserrés et dilatés. On peut prendre un alcarazas, un vase poreux de pile, enfin une cavité creusée dans une matière poreuse quelconque; nous ne citerons que l'expérience suivante.

On prend un bloc d'une matière poreuse bien desséchée. On creuse dans la masse un trou cylindrique, puis on y scelle au mastic un tube manométrique droit, fermé par le haut, rempli d'air, et contenant à sa base un index de mercure; cela fait, on plonge l'appareil dans un vase plein d'eau. Aussitôt cette eau pénètre dans les pores, refoule l'air du tube manométrique en faisant monter l'index de mercure, la pression augmente, et, au bout de quelques jours, elle atteint jusqu'à trois ou quatre atmosphères. On voit donc que ces corps poreux exercent une action capillaire énorme.

On peut aussi faire l'expérience inverse, mettre la cavité en communication avec un réservoir fermé et rempli d'eau : la pression diminue dans le réservoir, et le vide finit par y être complet.

On a pu faire la théorie de ces effets en s'appuyant sur les principes connus des phénomènes capillaires, et prévoir toutes les conséquences que l'expérience a vérifiées, entre autres celle-ci, savoir que, dans un cylindre poreux, vertical et indéfini, l'eau devra s'élever à une hauteur supérieure à $10^{m},33$, c'est-à-dire plus haut qu'elle ne le ferait par la pression atmosphérique.

Tous ces résultats devront s'appliquer aux végétaux. On les a imités artificiellement de la manière suivante. On remplace le chevelu radiculaire par la paroi lisse et poreuse d'un alcarazas qu'on plonge dans du sable humide; les fibres serrées qui servent à élever l'eau sont remplacées par du plâtre tassé ou par un corps poreux quelconque, qui, remplissant l'alcarazas, s'élève ensuite en une colonne unique représentant la tige du végétal; enfin l'énorme surface extérieure formée par les feuilles ou l'épiderme est résumée par celle d'un autre alcarazas rempli de la même poudre tassée.

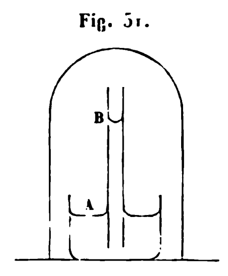
Le mouvement des liquides dans cet appareil est le même que dans un végétal, ce que la théorie peut prévoir. Ainsi,

l'eau est puisée dans le sable et pourrait s'élever à une hauteur équivalente à plusieurs atmosphères; arrivée à la partie supérieure, elle s'évapore constamment, et, à mesure qu'elle disparaît, elle est remplacée par celle que le sol lui cède continuellement. Aussi voit-on le sable se dessécher peu à peu et presque complétement, le mouvement d'absorption et d'évaporation se ralentir et même s'annuler, mais s'activer ou se reproduire aussitôt qu'on arrose l'appareil.

Il est donc probable que l'élévation de l'eau à travers les tissus des végétaux et jusque dans leurs feuilles est déterminée simplement par les forces moléculaires et par la pesanteur exerçant leur action dans le corps ligneux, et que ce phénomène rentre dans le domaine de la Physique générale.

INFLUENCE DE LA CAPILLARITÉ SUR L'ÉVAPORATION. — Imaginons une cuvette A et un tube capillaire B contenant de l'eau et placés dans le vide (*fig.* 51). La pression exercée en A par la

Fig. 51.



vapeur d'eau est plus forte que la pression en B d'une quantité égale au poids d'une colonne de vapeur ayant pour section l'unité et pour hauteur la différence des niveaux.

Par suite de cette inégalité de pression, il faut ou bien que le liquide distille continuellement de B vers A, ou que la vapeur soit en équilibre avec son liquide à une pression plus basse là où la surface est concave que là où elle est plane. M. W. Thomson [1] adopte cette dernière conception, qui est

[1] W. THOMSON, *On the equilibrium of vapour at a curve surface of liquid* (*Philosophical Magazine*, t. XLII, p. 448; 1871).

[redacted]

seule en harmonie avec les principes fondamentaux de la Théorie mécanique de la chaleur.

Cela posé, soient ρ et σ les poids spécifiques du liquide et de sa vapeur, z la hauteur à laquelle le liquide s'élève dans le tube de rayon R, que nous supposerons mouillé par le liquide :

$$z = \frac{2A}{R(\rho - \sigma)}.$$

D'autre part, soient p et ϖ les tensions maxima de la vapeur à la température de l'expérience au contact de la surface plane et de la surface concave; on doit avoir

$$p = \varpi + z\sigma = \varpi + \frac{2A\sigma}{R(\rho - \sigma)}.$$

M. Thomson a calculé que pour un tube de $0^{mm},001$ de diamètre (dans lequel l'eau s'élèverait à 30^m de haut), la différence $p - \varpi$ ne serait que la millième partie de p. Mais, si faible que soit cette différence, elle suffit pour rendre compte d'une multitude de phénomènes, dont l'explication était jusqu'ici bien embarrassante.

Ainsi l'on sait que la plupart des substances filamenteuses peuvent absorber la vapeur d'eau dans l'air, bien au-dessous du point de rosée proprement dit. Celui-ci doit, en effet, pour une même température fixe, correspondre à une pression moindre à l'intérieur des tubes très-capillaires dont ces substances sont formées. De même, au sein d'une masse d'air saturée contenant en suspension des gouttelettes d'eau, les plus grosses gouttes s'accroîtront aux dépens des plus petites, car, la surface des gouttes étant convexe, la valeur de ϖ correspondante est d'autant plus grande que le rayon R est plus faible, et les petites gouttes peuvent s'évaporer sous une pression supérieure au point de rosée des grosses. On conçoit aussi qu'une masse d'air pourra demeurer fortement sursaturée de vapeur d'eau, à cause du grand excès de pression nécessaire pour la production des plus petites gouttes. Alors l'introduction d'un corps solide, de petits grains de poussière, par exemple, pourra devenir l'origine d'une condensation subite et abondante. Les météorologistes tireront peut-être

quelque jour parti de cette cause nouvelle de précipitation aqueuse.

Pour ne pas se condenser au sein d'un liquide, une petite bulle de vapeur devra posséder un excès de pression d'autant plus grand qu'elle aura un moindre rayon, d'où il résulte que, dans un liquide bien privé d'air, l'ébullition sera en quelque sorte impossible au-dessous de la température de la volatilisation totale; mais, quand on introduira de petites bulles d'air dans le liquide surchauffé, celles-ci grossiront rapidement, et l'ébullition se fera d'une manière particulièrement tumultueuse, comme on l'observe en effet.

CHAPITRE III.

DIFFUSION.

Diffusion des liquides. — Diffusion libre. — Loi élémentaire de la diffusion. — Mesure du coefficient de diffusibilité. — Diffusion à travers les corps poreux. — Diffusion à travers les membranes. — Équivalents osmométriques. — Dialyse.
Diffusion des gaz. — Diffusion des gaz dans les liquides et les solides.

DIFFUSION DES LIQUIDES.

DIFFUSION LIBRE. — On entend par *phénomènes de diffusion* des mouvements spontanés des molécules des corps fluides, d'où résulte leur mélange lent et progressif. Occupons-nous d'abord de la diffusion des liquides.

Quand deux liquides sont mis en présence, la pesanteur tend à les séparer, de telle sorte que les plus lourds se placent au-dessous des plus légers et que les surfaces de séparation sont planes et horizontales. Les forces capillaires interviennent pour modifier les conditions de cet équilibre et, si l'un des liquides est soustrait à l'action de la pesanteur, comme dans les expériences de M. Plateau, déterminent à elles seules la forme de la surface de séparation.

Toutefois, certains liquides, l'alcool et l'eau par exemple, peuvent demeurer mêlés quand on les agite ensemble; si on superpose les mêmes liquides avec précaution et de telle sorte que le plus léger soit en haut, ils se mêlent peu à peu l'un à l'autre, malgré l'action de la pesanteur, qui tend à les séparer.

Nous allons étudier expérimentalement les lois de ce phénomène.

Plaçons au fond d'un vase une solution concentrée de sulfate de cuivre au-dessus de laquelle nous ferons flotter une

mince plaque de liège. Versons ensuite, avec une extrême précaution, de l'eau distillée à la surface de la plaque, d'où elle se répand au-dessus du sulfate de cuivre. Nous obtenons ainsi dans le vase deux couches nettement séparées, l'une inférieure bleue, l'autre supérieure tout à fait incolore, et la surface de séparation est plane et horizontale. Le vase étant abandonné à l'abri de toute agitation, on remarquera bientôt entre les deux liquides l'existence d'une couche de transition, d'un bleu régulièrement dégradé. L'épaisseur de cette couche augmentera avec le temps, empiétant à la fois sur l'espace primitivement occupé par l'eau et par le sulfate, et finira par envahir tout le vase; alors la différence des teintes s'affaiblira progressivement, et au bout d'un temps très-long le liquide aura une teinte bleue uniforme: l'analyse en démontrera l'homogénéité parfaite.

Pour montrer la diffusion de deux liquides incolores, on peut avoir recours à une disposition imaginée par M. W. Thomson. On prépare de petites boules de verre creuses, d'épaisseurs et, par suite, de densités moyennes différentes, comprises entre les densités D et *d* des liquides à étudier. On dépose toutes les boules à la surface du liquide le plus dense, puis on verse le liquide le plus léger comme dans l'expérience précédente. Les boules flottent à la surface de séparation; mais, à mesure que la diffusion se produit, elles se séparent, indiquant par leur écartement progressif la phase du phénomène: au niveau de flottaison de chacune des boules, la densité du mélange liquide est égale à la densité moyenne de la boule. Quand la diffusion est arrivée à son terme, toutes les boules plus lourdes que le mélange final tombent au fond, les autres plus légères flottent à la surface : il n'y a, en général, aucune boule flottant librement au sein du liquide.

Pour reconnaître la loi élémentaire de la diffusion, on pourrait mesurer à divers intervalles l'écartement vertical de deux boules de densité moyenne connue.

On doit à Th. Graham (1) de nombreuses recherches sur la

(1) *Philosophical transactions*, 1850 et 1861 (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série, t. XXIX, p. 197; t. LXV, p. 129).

diffusion. Il se borna d'abord à placer le liquide qu'il voulait étudier dans une fiole ouverte qu'il descendait au fond d'un vase plus grand rempli d'eau distillée, et à comparer les quantités des diverses substances diffusibles perdues par la fiole dans des temps égaux. Il put ainsi classer les substances par ordre de diffusibilité croissante, reconnaître l'influence de la concentration, de la température, etc. Toutefois, les circonstances réalisées dans cette expérience sont complexes et Graham s'arrêta plus tard à la disposition suivante : 10^{gr} de la substance à étudier sont dissous dans 100^{cc} d'eau et portés, au moyen d'une pipette, au fond d'un vase cylindrique sous une colonne d'eau distillée. Au bout d'un temps suffisant on retire le liquide à l'aide d'un siphon par couches de 50^{cc}, et l'on analyse séparément chaque prise. Ces expériences sont très-bien appropriées pour étudier la loi de diffusibilité des diverses substances. Nous verrons bientôt le parti qu'on en a tiré pour le calcul des coefficients de diffusibilité.

LOI ÉLÉMENTAIRE DE LA DIFFUSION. — La loi élémentaire de la diffusion est presque évidente *a priori;* elle a été énoncée par M. Fick [1] : *La quantité de sel qui passe à chaque instant à travers l'unité de surface d'un plan horizontal est proportionnelle à la différence de concentration du liquide de part et d'autre de ce plan.* Soient M le plan considéré (*fig.* 52), N un second plan horizontal à la distance dx, et soient de plus x la distance à un plan horizontal pris pour origine, q la concentration de la liqueur en un point, c'est-à-dire le poids de sel contenu dans l'unité de volume du liquide. En désignant par k un coefficient caractéristique de la diffusion, on a, pour la quantité de sel qui passe dans le temps dt et dans la direction MN, à travers l'unité de surface du plan M, $k\dfrac{dq}{dx}dt$; en même temps, il sort à travers le plan N une quantité de sel $k\dfrac{d(q+dq)}{dx}dt$, et, par suite, l'espace MN s'enrichit d'une quan-

Fig. 52.

N

dx

M

[1] Fick, *Annales de Poggendorff*, t. XCIV, p. 59; 1855.

tité de sel $-kd\frac{dq}{dx}dt$ par unité de surface et $-k\frac{d\frac{dq}{dx}}{dx}dt$ par unité de volume. La concentration du liquide, qui était q dans l'espace MN, a d'ailleurs augmenté de $\frac{dq}{dt}dt$, et l'on a par conséquent

$$\frac{dq}{dt}dt = -k\frac{d\frac{dq}{dx}}{dx}dt,$$

$$(1) \qquad \frac{dq}{dt} = -k\frac{d^2q}{dx^2}.$$

La loi de Fick, exprimée par l'équation (1), est identique à la loi de propagation de la chaleur par conductibilité, que nous étudierons plus tard. Le coefficient de diffusion k joue le même rôle que le coefficient de conductibilité calorifique et peut être défini d'une manière analogue.

Imaginons, par exemple, que la diffusion s'accomplit depuis un temps suffisant pour que dans un intervalle déterminé, depuis le niveau x_0 jusqu'à x_1, par exemple, la quantité de sel qui passe pendant l'unité de temps à travers l'unité de surface ne varie plus avec le temps. Quand cet *état permanent* de la diffusion est établi, on a

$$\frac{dq}{dt} = 0,$$

par suite

$$\frac{d^2q}{dx^2} = 0,$$

$$(2) \qquad q = Ax + B.$$

A et B sont deux constantes introduites par l'intégration et que l'on déterminera en donnant la valeur invariable de la concentration dans les deux plans de niveau x_0 et x_1. La quantité de sel qui passe par unité de temps à travers l'unité de surface du plan de niveau x est

$$(3) \qquad -k\frac{dq}{dx} = -kA;$$

elle est invariable, quel que soit x, entre x_0 et x_1. Elle se réduit à k pour $A = -1$, c'est-à-dire, d'après l'équation (2), quand la différence de concentration du liquide dans deux plans de niveau situés à l'unité de distance est égale à 1. *Le coefficient de diffusion est donc la quantité de sel qui passe pendant l'unité de temps à travers l'unité de surface d'une couche liquide d'épaisseur verticale* 1, *les concentrations aux limites de cette couche demeurant invariables et différant de* 1.

MESURES DES COEFFICIENTS DE DIFFUSIBILITÉ. — M. Fick a essayé de mesurer directement le coefficient de diffusibilité du sel marin dans l'eau en superposant une couche d'eau distillée à une solution concentrée de sel et attendant, pour mesurer la vitesse de diffusion, que l'état permanent fût établi dans une région déterminée. Mais, comme on ne possède pas de moyen précis pour s'assurer que cette condition est réalisée, les valeurs de k sont un peu incertaines. On préfère avoir recours à l'observation de l'état variable, en utilisant les formules déduites de la théorie de la chaleur de Fourier. C'est ainsi que M. Voit [1] a essayé de déterminer le coefficient de diffusibilité du sucre de canne dans l'eau en mesurant la variation du pouvoir rotatoire de la dissolution à un certain niveau et à des époques de plus en plus éloignées de l'origine de la diffusion. M. Johannisjanz [2] a utilisé la déviation variable produite à divers niveaux par un prisme liquide à arêtes verticales à travers lequel on regarde un fil tendu parallèle à l'arête; mais M. Stefan [3] remarque très-finement que par suite du défaut d'homogénéité du liquide dans les diverses directions autour d'un point les surfaces d'onde ne sont plus des sphères, que par suite les formules employées par M. Johannisjanz n'ont pu fournir de résultats exacts.

L'une des meilleures mesures directes que l'on possède paraît être celle de la diffusibilité du sulfate de zinc dans l'eau,

---

(1) VOIT, *Annales de Poggendorff*, t. CXXX, p. 227 et 393.
(2) JOHANNISJANZ, *Annales de Wiedemann*, t. II, p. 24; 1877.
(3) STEFAN, *Wiener Berichte*, t. LXXVIII, 1878.

obtenue par M. H.-F. Weber ([1]) à l'aide d'une méthode ingénieuse, fondée sur l'observation de la polarisation électrique variable de deux lames de zinc amalgamé dans le sulfate de zinc. Nous ajouterons que M. Stefan ([2]) a calculé les coefficients de diffusion qui se déduisent des excellentes observations de Graham ([3]) signalées page 71 et que ces derniers nombres fournissent actuellement le meilleur ensemble de mesures que l'on possède. Nous les reproduisons avec quelques autres dans le Tableau suivant :

SUBSTANCE.	TEMPÉRATURE.	COEFFICIENT k.	EXPÉRIMENTATEUR.
Sucre de canne	14° à 15°	0,3144	Voit.
	9°	0,312	Graham (Stefan).
Sucre de raisin	14° à 15°	0,3480	Voit.
Caramel	10°	0,047	Graham (Stefan).
Sel marin	15	0,937	Fick (Stefan).
	20	1,133	Id.
	5	0,765	Graham (Stefan).
	9	0,910	Id.
Sulfate de zinc	24	0,2401	H.-F. Weber.
Sulfate de magnésie	10	0,354	Graham (Stefan).
Acide chlorhydrique	5	1,742	Id.
Tannin	10	0,101	Id.
Gomme arabique	10	0,130	Id.
Albumine	13	0,063	Id.

Les nombres qui précèdent donnent les valeurs absolues du coefficient k, en prenant pour unité de longueur le centimètre, pour unité de poids le gramme et pour unité de temps le jour. Ce sont les poids de sel qui se diffusent en un jour à travers une couche liquide de 1^{cq} de base et de $0^{m},01$ d'épaisseur, en supposant que les poids de sel contenus dans 1^{cc} du liquide aux deux couches terminales diffèrent de 1^{gr} ([4]).

([1]) H.-F. Weber, *Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft* (1878), et *Annales de Wiedemann*, t. VII, p. 469 et 536 (1879).

([2]) Stefan, *Berichte der Wiener Akademie*, t. LXXIX, 1879.

([3]) *Philosophical Transactions*, t. CLI, p. 183; 1861.

([4]) Pour obtenir les coefficients de diffusibilité en unités britanniques, il

Les recherches de M. Weber, aussi bien que celles de M. Fick et de Graham, établissent que le coefficient de diffusibilité croît rapidement avec la température. Ainsi, pour le sulfate de zinc on aurait, d'après M. Weber,

$$k = 0{,}1187(1 + 0{,}0557\,t);$$

t représente la température centigrade. Au reste, d'après le même expérimentateur, ainsi que d'après les recherches récentes de M. Schumeister (¹), le coefficient k ne serait pas rigoureusement indépendant de la concentration, comme le voudrait la théorie que nous avons exposée. Ainsi, pour le chlorure de potassium de concentrations 0,1 et 0,3, on aurait respectivement $k = 1{,}10$ et $k = 1{,}27$; pour l'iodure de potassium de concentrations 0,1, 0,3 et 0,9, on aurait $k = 1{,}12$, $k = 1{,}25$ et $k = 1{,}45$ (²).

---

faudrait diviser les nombres précédents par 86400, nombre de secondes contenues dans un jour.

(¹) SCHUMEISTER, *Wiener Berichte*, t. LXXIX, 1879. Parmi les travaux qui se rapportent à la diffusion des liquides, il convient encore de citer les recherches de Beilstein (*Annales de Liebig*, t. XCIX), qui ont fourni les valeurs relatives des coefficients de diffusibilité d'un certain nombre de substances.

(²) D'après M. Soret (*Archives de Genève*, 3ᵉ période, t. II, p. 48; 1879), la loi élémentaire de la diffusion à température τ variable serait représentée par la formule

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dq}{dx} + k'\,\frac{d\tau}{dx}\right)$$

et dépendrait de deux coefficients, relatifs, l'un k à la concentration, l'autre k' à la température. Il en a effet constaté qu'un liquide primitivement homogène ne conserve pas en tous ses points une concentration identique quand on en porte les diverses parties à des températures différentes; l'équilibre final est alors donné par la relation

$$k\,\frac{dq}{dx} + k'\,\frac{d\tau}{dx} = 0.$$

M. Duclaux a vu des mélanges liquides homogènes se séparer à une température convenable en deux couches complètement distinctes; il a même fondé sur cette observation la construction de curieux thermomètres à maxima et à minima (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXI, p. 815; 1875). Par exemple, un mélange de 15ᶜᶜ d'alcool amylique, 20ᶜᶜ d'alcool ordinaire et 32ᶜᶜ,9 d'eau donne à 20° un groupement moléculaire très instable, que le moindre abaissement de température divise en deux couches

Au reste, il convient d'ajouter que, tandis que certains liquides sont susceptibles de se diffuser l'un dans l'autre en toutes proportions, d'autres, l'eau et l'éther par exemple, tendent vers un équilibre limité tel, que le résultat de la diffusion est formé de deux liquides complétement distincts et séparés par une surface plane et horizontale. Ainsi, dans le cas de l'eau et de l'éther, le liquide inférieur est de l'eau mêlée d'une certaine proportion r d'éther, le liquide supérieur de l'éther mêlé d'une proportion r' d'eau. Ces phénomènes complexes n'ont pas encore été étudiés d'aussi près qu'ils le méritent.

Quand on agite ensemble deux liquides susceptibles de se mêler complétement par diffusion, on ne fait que hâter la production de l'équilibre final, en augmentant dans un rapport énorme la surface à travers laquelle se produit la diffusion. Dans aucun cas le mélange n'est instantané, et le liquide agité demeure trouble pendant quelques instants, par suite des réfractions irrégulières qu'éprouve un rayon lumineux en traversant ce milieu hétérogène.

DIFFUSION A TRAVERS LES CORPS POREUX. — Graham [1], auquel on doit le plus bel ensemble de recherches sur la diffusion des liquides, a observé qu'elle s'accomplit à travers la plupart des corps poreux solides, à peu près comme si les liquides étaient directement en contact. Il a employé la plombagine, le plâtre, etc., et a constaté qu'on peut établir entre les deux faces du corps poreux une différence de pression assez considérable, sans modifier beaucoup la vitesse de la diffusion.

DIFFUSION A TRAVERS LES MEMBRANES. — ENDOSMOSE. — Il n'en est pas de même si les deux liquides sont séparés par une membrane animale ou végétale, telle que peau de vessie, péricarde de veau, caoutchouc, etc. Alors la diffusion est soumise à des lois en apparence toutes différentes, et qu'on ne

presque égales; si l'on a additionné le liquide d'un peu de carmin, la matière colorante, d'abord uniformément répartie, se concentrera dans la couche inférieure, laissant la couche supérieure presque incolore.

(1) GRAHAM, *Philosophical Transactions*; 1850.

préter qu'en admettant une dissolution passagère ou combinaison instable du solide avec les liquides qui le traversent : ceux-ci sont absorbés par l'une des faces de la membrane et résorbés par la face opposée, grâce à un mécanisme analogue à celui du passage d'un gaz soluble à travers une couche d'eau.

Si les membranes sont bien continues, la diffusion d'un liquide ne pourra se produire que s'il est susceptible de se dissoudre dans la membrane. C'est ce qui arrive avec une peau de vessie pour l'eau pure, la plupart des sels, et en général les corps susceptibles de cristalliser; au contraire, la gélatine et la plupart des liquides d'origine organique refusent de traverser la membrane. Pour rappeler cette manière d'être des deux sortes de substances, Graham désigne les premières sous le nom de *cristalloïdes* et les autres sous le nom de *colloïdes*.

Le passage de certains liquides à travers les membranes était bien connu des physiologistes et des physiciens longtemps avant les recherches de Graham. Dutrochet (1) fermait à l'aide d'une peau de vessie l'extrémité élargie d'un tube contenant une solution de sel marin et le plongeait ensuite dans une cuve pleine d'eau distillée, de manière que le niveau primitif du liquide fût le même à l'intérieur et à l'extérieur. L'eau pure traversait la membrane plus vite que le sel, et le volume du liquide contenu dans le tube augmentait jusqu'à ce que l'excès de pression à l'intérieur atteignît une certaine valeur limite. Le phénomène reçut le nom d'*endosmose;* on désigna sous le nom inverse d'*exosmose* le phénomène de baisse produit quand le sel était à l'extérieur de la membrane et l'eau pure à l'intérieur. L'appareil même de Dutrochet fut appelé *endosmomètre*.

ÉQUIVALENTS OSMOMÉTRIQUES. — Dutrochet et après lui d'autres physiciens, tels que Jerichau (2), Brücke (3) et Vierordt (4),

(1) DUTROCHET, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXV, p. 393.
(2) JERICHAU. *Annales de Poggendorff*, t. XXXIV, p. 613.
(3) BRÜCKE, *De diffusione humorum per septa*. Berlin, 1841 (*Annales de Poggendorff*, t. LVIII, p. 77).
(4) VIERORDT, *Archiv von Roser und Wunderlich*, Bd VII.

mesurèrent l'augmentation de volume produite d'un côté de la membrane par suite de l'osmose; mais une connaissance plus exacte des lois de la diffusion fit abandonner plus tard ce genre de mesure. Jolly ([1]) observa que, quand l'endosmomètre est placé dans un courant d'eau incessamment renouvelée, l'endosmose n'atteint son terme qu'au moment où l'appareil ne contient plus que de l'eau pure, et alors il y a entre le poids d'eau qui est entrée et le poids de sel qui est sorti un rapport fixe, caractéristique de la nature du sel : c'est ce que Jolly a appelé l'équivalent osmométrique du sel par rapport à la membrane. Le Tableau suivant indique, d'après ce physicien, les équivalents osmométriques de diverses substances par rapport à la peau de vessie.

Substance.	Équivalent osmométrique.
Sel marin	4,22
Sulfate de soude	11,05
Sulfate de potasse	12,70
Sulfate de magnésie	11,65
Potasse	231,40
Alcool	4,13
Sucre	7,25

Évidemment, le passage d'une substance à travers la membrane est d'autant plus rapide que son équivalent osmométrique est moins élevé.

Pour interpréter la fixité au moins approximative de l'équivalent osmométrique, indépendamment de la concentration, on peut imaginer que la membrane se sature d'abord, sur chacune de ses faces, des deux liquides qu'elle sépare. Admettons que la quantité de sel ou d'eau absorbée à chaque instant d'un côté et résorbée de l'autre soit, à partir de ce moment, proportionnelle à la différence de concentration de la solution saline de part et d'autre de la membrane : il y aura un rapport constant entre les quantités d'eau et de sel qui auront traversé la membrane à un instant quelconque, et il en sera ainsi spécialement au terme de la diffusion. Il semble résulter de l'ensemble

---

([1]) JOLLY, *Zeitschrift für die rationelle Medicin* de Henle et Pfeufer, t. VII.

des recherches de Jolly, Eckhard [1], Schmidt [2] et Ludwig [3] que la constance de l'équivalent osmométrique n'est pas rigoureuse : par suite, la résultante des actions de la membrane sur les deux liquides ne serait qu'approximativement proportionnelle à la différence des concentrations.

DIALYSE. — On peut employer la différence de diffusibliité de deux substances pour les séparer plus ou moins complètement; mais on réussit mieux en mettant à profit la différence de vitesse du passage des diverses substances à travers les membranes. La première expérience de ce genre fut tentée avec un plein succès par Dubrunfaut [4], antérieurement aux recherches de Graham. On sait que les mélasses, qui constituent le résidu de la fabrication du sucre de betteraves, contiennent, outre du sucre cristallisable et du sucre amorphe, une quantité considérable de sels, tels que le chlorure de potassium, etc., que ceux-ci leur communiquent une saveur désagréable et les rendent impropres à servir même à l'alimentation des animaux. Dubrunfaut imagina de mettre les mélasses en contact avec de l'eau incessamment renouvelée à travers des diaphragmes de toile : dans ces conditions, la mélasse augmente beaucoup de volume en absorbant de l'eau et résorbant une forte proportion de sels avec une certaine quantité de sucre cristallisable moins diffusible qu'eux. Si la mélasse contenait d'abord 4 de sels pour 1 de sucre, par exemple, elle pourra, après l'opération, renfermer 4 de sucre pour 1 de sels; elle sera devenue comestible, et pourra être soumise au raffinage.

Graham a généralisé le résultat de l'observation de Dubrun-

---

(1) Eckhard, *Beiträge zur Physiologie, herausgegeben von Eckhard*, t. II, et *Annales de Poggendorff*, t. CXXVIII, p. 61. Eckhard employait le péricarde de veau et il a cru démontrer que les équivalents osmométriques ne sont pas rigoureusement constants, même quand la membrane n'a subi aucune altération par l'effet des substances diffusibles qui la traversent.

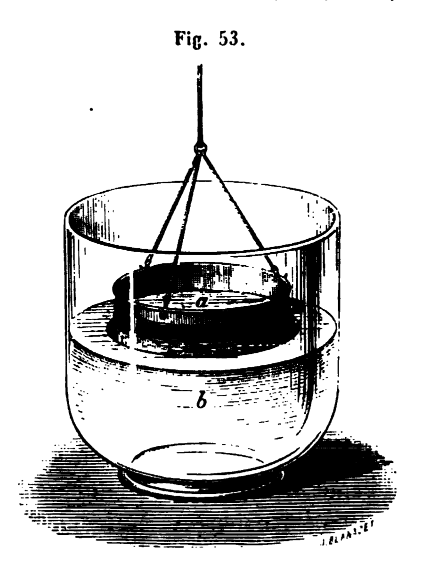
(2) Schmidt, *Annales de Poggendorff*, t. CII, p. 122.

(3) Ludwig, *Zeitschrift für rationelle Medicin*, t. VIII.

(4) Dubrunfaut, *Brevets d'invention*, 1858. — Graham, *Liquid diffusion applied to analysis* (*Proceedings of the royal Society*, t. XI, p. 243). — *On liquid transpiration in relation to chemical composition* (*Proceedings*, t. XI, p. 381; 1861.

faut et fait de nombreuses applications de la diffusion à l'analyse chimique. Pour séparer une substance cristalloïde des colloïdes qui l'accompagnent, il suffit de placer le mélange (*fig.* 53) dans un vase sans fond *a* (dialyseur), fermé par du

Fig. 53.



papier parchemin et que l'on fait flotter dans un second vase *b* rempli d'eau pure. Au bout d'un temps suffisant, la presque totalité du cristalloïde a traversé la membrane sans mélange de colloïde : ainsi l'urine dialysée ne cède à l'eau que de l'urée; les liquides suspects de contenir un poison, tel qu'acide arsénieux, émétique, strychnine, fournissent une dissolution de la substance toxique sans mélange de matière organique.

DIFFUSION DES GAZ.

DIFFUSION DES GAZ. — La diffusion des gaz obéit à la même loi élémentaire que celle des liquides. Soient a_1 et a_2 les proportions en volume des deux gaz dans un plan de niveau situé à la distance x du plan origine; la somme $a_1 + a_2$ est toujours égale à l'unité, et la quantité de chacun des deux gaz qui traverse l'unité de surface de ce plan rapportée à l'unité de temps

[redacted]

est proportionnelle à $\frac{da_1}{dx}$. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de diffusion relatif aux deux gaz.

La théorie de la diffusion des gaz se rattache à la théorie générale des gaz, que nous étudierons à propos de la chaleur. Il nous suffira d'annoncer ici que les lois expérimentales du phénomène d'après les recherches de MM. Loschmidt [1], Wretschko [2], Beningar, [3] etc., sont en harmonie avec les déductions théoriques de M. Stefan [4].

Les nombres suivants se rapportent aux expériences de M. Loschmidt. Les coefficients de diffusion sont exprimés en prenant pour unité de longueur le centimètre, pour unité de temps la seconde :

H — O.....	0,720
H — CO^2....	0,538
O — CO^2....	0,163

D'après la théorie, ces coefficients doivent varier en raison inverse de la pression et proportionnellement au carré de la température, comptée à partir de 273° au-dessous de 0° (température absolue).

Diffusion des gaz a travers les liquides. — L'étude de la diffusion des gaz à travers les liquides, effleurée par Graham [5], a été reprise récemment par M. von Wroblewski [6]. Il résulte de ses expériences qu'elle s'opère conformément à la loi élémentaire de la diffusion. Ces expériences ont porté sur la diffusion de l'acide carbonique, opérée sous une pression

---

(1) Loschmidt, *Wiener Berichte*, t. LII, p. 395; 1865.

(2) Wretschko, *ibid.*, t. LXII, p. 573; 1870.

(3) Beningar, *ibid.*, 1870.

(4) Stefan, *ibid.*, t. LXIII, p. 63; 1871.

(5) Graham, *Philos. Trans.*; 1850.

(6) S. von Wroblewski, *Annales de Wiedemann*, t. II, p. 481 (1877), et t. VII, p. 11 (1879). D'après M. S. von Wroblewski, le coefficient de diffusibilité de l'acide carbonique dans l'eau contenant 13,64 pour 100 de chlorure de calcium serait 0,0000913 environ, en prenant pour unité de temps la seconde, pour unité de longueur le centimètre. Ce nombre est du même ordre de grandeur que le coefficient de diffusibilité des liquides.

constante à travers l'eau pure ou chargée de sels, la glycérine, l'huile et des solutions de gélatine. Les expériences vérifient d'autant mieux la théorie que le coefficient de solubilité est moindre et que le liquide est plus visqueux. En effet, la solution d'acide carbonique étant en général un peu plus lourde que le liquide privé de gaz, la pesanteur tend à accélerer le mélange des couches liquides saturées et non saturées, et la perturbation qui en résulte est d'autant plus grande que la solubilité est plus considérable et la viscosité moindre.

L'acide carbonique est encore absorbé par une plaque solide formée de gélatine additionnée de glycérine et d'eau; il n'est pas absorbé par la gélatine pure et compacte.

DIFFUSION DES GAZ A TRAVERS LES CORPS SOLIDES. — D'après Graham (¹), la diffusion des gaz à travers les solides poreux obéit sensiblement aux mêmes lois que leur diffusion libre. Les gaz sur lesquels il opérait étaient enfermés sous la pression constante de 100mm de mercure dans une éprouvette fermée à sa partie supérieure par une plaque de graphite artificiel de 0mm,5 d'épaisseur, et se diffusaient dans l'air environnant en traversant la plaque. Le temps employé pour la diffusion d'une certaine quantité d'hydrogène, d'acide carbonique ou d'oxygène, se montra proportionnel à la racine carrée de la densité. Ce résultat est conforme à la théorie, pourvu que l'on considère comme négligeable le frottement exercé par le gaz contre les parois des orifices capillaires qui lui livrent passage.

Gaz.	Durée de la diffusion.	Racine carrée de la densité.
Oxygène	1,000	1,000
Acide carbonique	1,1886	1,1760
Hydrogène	0,2472	0,2502

Il est à noter que les gaz traversent aussi des corps solides qui ne sont pas considérés comme poreux : l'hydrogène et la plupart des gaz traversent le caoutchouc; l'hydrogène passe à

(¹) GRAHAM, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVII, p. 181.

travers le platine et le fer à la température du rouge [1]; l'oxyde de carbone se diffuse aussi à travers le fer à une température suffisamment élevée [2]. Ces phénomènes seraient comparables à ceux du passage des liquides à travers les membranes, c'est-à-dire que les gaz qui traversent le caoutchouc et les métaux seraient dissous par l'une des faces du solide et résorbés par l'autre [3].

---

(1) Sainte-Claire Deville et Troost. — *Répertoire de Chimie appliquée*, p. 236; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVII, p. 965; t. LXIX, p. 102. — Cailletet, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 328 et 1057.

(2) Sainte-Claire Deville et Troost, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 83. — Cailletet, *ibid.*, t. LVI, p. 847.

(3) Dans un travail récent, M. von Wroblewski a étudié la diffusion des gaz à travers le caoutchouc (*Annales de Wiedemann*, t. VIII, p. 29; 1880) et croit pouvoir conclure de ses expériences que le caoutchouc est poreux et qu'on ne saurait invoquer la dissolution des gaz dans cette substance pour en expliquer les propriétés.

CHAPITRE IV.

ÉCOULEMENT DES FLUIDES. — FROTTEMENT INTÉRIEUR.

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

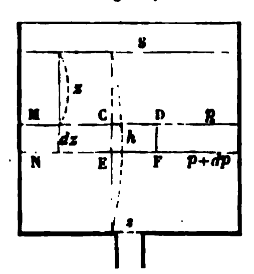
RÈGLE DE TORRICELLI. — L'Hydrodynamique est une science dont le développement mathématique appartient surtout aux mécaniciens, tandis que les règles pratiques qui s'y rapportent intéressent plus particulièrement les ingénieurs. Toutefois, ses principes sont du domaine de la Physique et nous ne pouvons nous dispenser de les indiquer sommairement.

Le seul cas que nous examinerons est celui de l'écoulement d'un liquide sous l'influence de son poids ou d'une pression uniforme appliquée en tous les points d'une surface de niveau plane et horizontale. Les causes qui interviennent pour produire ou modifier le mouvement du liquide sont, outre son poids et la pression extérieure, l'adhésion des parties du liquide les unes à l'égard des autres ou à l'égard de la paroi. Nous ferons d'abord abstraction de ces adhésions et nous considérerons chaque particule du fluide comme entièrement libre.

Cela posé, considérons un vase de section extrêmement large, terminé par un fond plat au-dessus duquel le liquide

est maintenu à une hauteur h invariable et pratiquons un orifice dans le fond du vase. Le liquide s'écoulera d'abord avec une vitesse croissante; mais bientôt un régime régulier s'établira, de telle sorte que la dépense de l'orifice soit compensée par le liquide qui y afflue. A partir de ce moment la vitesse du liquide en un point donné (*fig.* 54) ne dépend que de la position de

Fig. 54.



ce point, et nous admettrons, au moins provisoirement, qu'elle est la même en tous les points d'un même plan horizontal M et ne dépend que de la distance z de ce plan à la surface libre.

Soient S la section du vase au niveau z, V la vitesse verticale dont le liquide s'y trouve animé, s la section de l'orifice, v la vitesse d'écoulement : dans un temps dt il sort du vase un volume de liquide $vs\,dt$, et, puisque nous supposons le liquide incompressible et continu, toutes les tranches verticales du vase livrent passage au même volume. Il passe à travers la section S un volume $VS\,dt$; on a donc

$$(1) \qquad VS = vs.$$

D'autre part, le demi-accroissement de la force vive d'un petit volume A de liquide qui s'abaisse d'une quantité dz est $d\left(\frac{1}{2}\rho AV^2\right) = \frac{1}{2}A\rho\, d(V^2)$; il est égal au travail des forces auxquelles le liquide a été soumis pendant sa chute élémentaire, c'est-à-dire au travail $A\rho g\,dz$ de son poids et au travail des pressions. Soient p la pression dans le plan M, $p + dp$ la pression dans un plan N situé au-dessous de M à la distance dz,

et considérons un cylindre liquide droit CDEF ayant pour base l'unité de surface dans le plan M et limité au plan N; il enferme un volume de liquide égal à dz et est soumis de bas en haut à une force égale à dp; quand ce cylindre se déplace de sorte que sa base CD vienne en EF, c'est-à-dire quand il s'écoule à travers CD une quantité de liquide égale à dz, le travail des pressions est négatif et a pour valeur absolue $dz\,dp$; pour un cylindre ayant une base égale à $\frac{A}{dz}$, ou pour l'écoulement de la quantité de liquide $\frac{A\,dz}{dz} = A$, ce travail est $A\,dp$. En tenant compte du signe de ce dernier travail, on a donc

$$\frac{1}{2} A\rho\, d(V^2) = A\rho g\, dz - A\,dp,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2} \rho\, d(V^2) = \rho g\, dz - dp.$$

L'équation (2) donne l'accroissement de la vitesse pour un abaissement du liquide égal à dz. Pour avoir la vitesse d'écoulement, il faut intégrer l'équation (2) entre les limites correspondant à la surface libre et à l'orifice, et l'on a

$$\frac{1}{2}\rho \int_{V_0}^{v} dV^2 = \rho h \int_0^h dz - \int_{p_0}^{p} dp,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\rho(v^2 - V_0^2) = \rho g h - (p - p_0).$$

Soit S_0 la section du vase au niveau de la surface libre. On a, d'après l'équation (1),

$$(4) \qquad V_0 S_0 = v s,$$

et par suite

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\rho v^2\left(1 - \frac{s^2}{S_0^2}\right) = \rho g h - (p - p_0).$$

Quand on suppose que l'écoulement a lieu dans une atmosphère de densité négligeable et qui confine aussi bien à la sur-

face libre qu'à l'orifice, on a $p = p_0$ [1] et la valeur de v se réduit à

$$v = \sqrt{2gh \frac{S_0^2 - s^2}{S_0^2}}, \tag{6}$$

et, si la surface libre du vase est assez large par rapport à l'orifice pour que le quotient $\frac{s^2}{S_0^2}$ soit négligeable,

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{6 bis}$$

Cette équation exprime que la vitesse d'écoulement est égale à la vitesse qu'acquerrait le liquide en tombant en chute libre d'une hauteur h justement égale à la distance de l'orifice à la surface libre.

La règle exprimée par la formule (6 *bis*) a été donnée pour

---

(1) La pression, égale à p_0 à la surface libre et dans le plan de l'orifice, n'est cependant pas constante dans toute l'étendue de la colonne liquide. L'équation (2), intégrée de z à h, donne

$$\frac{1}{2}\rho(v^2 - V^2) = \rho g(h - z) - (p_0 - p),$$

et, puisque $VS = vs$,

$$p = -\rho g(h - z) + p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right).$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où la surface libre a une étendue S_0 assez grande pour que la règle de Torricelli soit applicable,

$$v^2 = \sqrt{2gh},$$

et, par suite,

$$p = p_0 + \rho g\left(z - h\frac{s^2}{S^2}\right).$$

Cette quantité est supérieure ou inférieure à la pression atmosphérique suivant que

$$z \gtrless h\frac{s^2}{S^2}.$$

Par exemple, dans un plan dont la section S serait inférieure à la section s de l'orifice, z, qui est plus petit que h, serait à plus forte raison $< h\frac{s^2}{S^2}$; la pression p serait donc inférieure à p_0. Si l'on perçait un petit trou en cet endroit du vase, l'air serait aspiré et entraîné par le mouvement du liquide. Cette prévision est confirmée par l'expérience.

la première fois par Torricelli [1], et vérifiée expérimentalement par Mariotte [2] et par Guglielmi [3]. Cette vérification doit être faite dans des conditions qui réduisent au minimum l'effet perturbateur résultant de l'adhésion du liquide avec les parois de l'orifice d'écoulement. Cet orifice sera donc percé dans une paroi mince; ses bords seront taillés en biseau de manière à réduire en quelque sorte la surface d'adhésion à une arête. Au reste, comme nous ne tenons aucun compte de l'adhésion du liquide, nous devons nous attendre à ce qu'il subsiste encore quelque perturbation, dont l'expérience seule pourra nous révéler la nature et la grandeur.

Pour mesurer la vitesse du jet liquide, ou, comme on dit, de la *veine* d'écoulement, le moyen le plus simple qui s'offre à nous est d'observer la forme de la trajectoire du liquide s'écoulant par un orifice latéral. Puisqu'à l'état d'équilibre la pression du liquide est la même dans toute l'étendue d'un même plan horizontal et qu'elle est partout normale à l'élément que l'on considère, la vitesse d'écoulement doit demeurer normale à la paroi quelle que soit sa direction, et conserver la grandeur qui correspond à sa profondeur h au-dessous du niveau du liquide. Cela posé, si la veine est lancée dans une direction quelconque faisant un angle α avec l'horizontale, chacune de ses molécules sera dans la même condition qu'un projectile lancé dans cette direction avec la vitesse

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Désignons par x et y les coordonnées de la molécule au temps t par rapport à deux axes rectangulaires, l'un vertical, l'autre horizontal, situés tous deux dans un plan normal à la paroi et passant par le centre de l'orifice.

---

(1) TORRICELLI, *Trattato del moto dei gravi*, Florence. 1641.

Les anciens avaient observé que le débit d'un orifice est d'autant plus grand qu'il est placé plus profondément au-dessous de la surface libre du liquide: Frontin en fait déjà la remarque. Mais Torricelli a le premier énoncé une loi précise à cet égard.

(2) MARIOTTE, *Traité du mouvement des eaux*. Paris, 1686.

(3) GUGLIELMI, *Trattato physico-matematico della natura dei fiumi*, Bologna, 1697-1712.

La veine décrira une parabole dont l'équation est

$$y = x \tang\alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2\alpha}.$$

L'amplitude du jet sera égale à $2h \sin 2\alpha$; elle ne variera pas si l'on donne à α les deux valeurs $45^\circ \pm \alpha'$.

La hauteur maximum à laquelle parviendra le liquide sera

$$h \sin^2\alpha;$$

cette hauteur deviendra h si α est égal à 90°, c'est-à-dire que la veine lancée verticalement de bas en haut remontera à la hauteur du niveau du liquide dans le vase.

Si l'on suppose $\alpha = 0$, c'est-à-dire si la veine est lancée horizontalement, l'équation de la parabole deviendra

$$y = -\frac{x^2}{4h}.$$

On a essayé, et à plusieurs reprises, de vérifier expérimentalement ces diverses conséquences. Dans le cas où la veine est lancée verticalement de bas en haut, elle ne remonte jamais à la hauteur h; mais cela tient à ce que les gouttelettes liquides arrivées au sommet du jet tendent à retomber et détruisent en partie la vitesse ascendante de la colonne totale. Mais, à mesure que le jet s'incline jusqu'à devenir horizontal, cette cause perturbatrice diminue et finit par être nulle. Dans ce dernier cas on a

$$\frac{x^2}{4} = -hy,$$

c'est-à-dire que, en recevant la veine sur un plan horizontal abaissé de $-y$ au-dessous de l'orifice, elle doit le rencontrer à une distance x telle que $\frac{x^2}{4}$ soit égal au produit de h par y. Bossut a trouvé que cette conséquence se vérifiait pour les diverses valeurs données à h et à y, et que la vitesse calculée ne dépassait que de $\frac{1}{100}$ environ la vitesse observée.

Comme il faut tenir compte de la résistance de l'air [1], cette

---

[1] L'influence de la résistance de l'air sur la forme de la trajectoire de la

différence peut être négligée, et le théorème des vitesses considéré comme justifié.

CONTRACTION DE LA VEINE. — On a essayé ensuite un autre procédé de vérification beaucoup moins simple, qui consiste à calculer d'une part et à mesurer de l'autre la *dépense*, c'est-à-dire la quantité de liquide qui s'écoule pendant un temps t par un orifice de section connue s. Pour faire la mesure, il n'y a qu'à recueillir et à peser le liquide qui s'écoule; pour calculer la dépense, il faut faire deux hypothèses : 1° que la vitesse est à la sortie égale à $\sqrt{2gh}$; 2° que la veine formerait, si elle continuait de s'écouler avec la même vitesse, un cylindre de section s dont la longueur serait vt, le volume svt et le poids $svtd$, en désignant par d la densité du liquide. Cette dernière hypothèse exigerait que tous les filets liquides fussent, à l'orifice, dirigés parallèlement entre eux et perpendiculairement à la paroi, ce qui devrait être si l'adhésion du liquide n'existait pas. En faisant l'expérience, on a reconnu que la dépense vraie n'est que les six dixièmes de la dépense calculée de cette manière.

Or, puisque les expériences de Bossut ont prouvé que la vitesse moyenne de la veine est conforme à la loi de Torricelli, la discordance trouvée entre la dépense calculée et la dépense observée n'infirme en aucune façon cette loi et ne peut être attribuée qu'à l'influence de l'adhésion du liquide. La veine n'est pas un cylindre de section s; les forces moléculaires ont dû agir pour lui donner une section plus petite. C'est en effet ce que l'expérience va nous démontrer.

Si tous les filets liquides avaient en sortant la même direction et la même vitesse, la veine devrait aller en se contractant régulièrement et de plus en plus en s'éloignant de l'orifice. En effet, imaginons qu'une tranche, après avoir traversé cet orifice où elle a une vitesse a, s'écoule pendant un temps t; elle parcourra un espace

$$e = at + \frac{g}{2}t^2;$$

veine liquide a été reconnue d'abord par le P. Mersenne (*Phænomena hydraulico-pneumatica*, 1644).

si à ce moment l'on considère une seconde tranche située à l'orifice même, elle sera à une distance e de la première et au bout d'un temps $t+dt$ cette distance sera devenue

$$e+de=e+gtdt.$$

Deux tranches déterminées devront s'écarter progressivement l'une de l'autre pendant la chute, et la veine devra diminuer régulièrement de section, mais d'une manière qui sera peu sensible, en s'éloignant de l'orifice.

L'expérience prouve que les choses se passent tout autrement. On remarque en effet, à partir de l'origine jusqu'à une distance très-petite de l'ouverture, une contraction extrêmement rapide, mais variable avec les charges (*fig.* 55); puis, après avoir offert en ce point un minimum de section AB, la veine continue sa route avec une forme sensiblement cylindrique, comme la loi théorique le prévoit. Il y a donc une contraction anomale [1]. Or on trouve qu'elle diminue la section de la veine dans un rapport moyen de $\mu=0,62$; par conséquent, elle doit diminuer proportionnellement la dépense, ce qui est conforme à l'expérience.

Fig. 55.



On voit donc : premièrement, que le théorème de Torricelli ne règle absolument que la vitesse de la veine liquide et qu'il est exact; secondement, que la veine, au lieu d'être cylindrique comme on l'avait supposé, éprouve une contraction qui a pour effet de diminuer la dépense. Il nous reste à rechercher si la cause de cette contraction est bien l'adhésion du liquide pour lui-même.

On pourrait d'abord imaginer que l'adhésion du liquide pour la paroi de l'orifice d'écoulement joue le rôle principal dans la formation de la veine. S'il en était ainsi, la partie extérieure de la veine, en frottant contre cette paroi, serait ralentie dans

(1) La contraction de la veine liquide a été observée pour la première fois par Newton (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*).

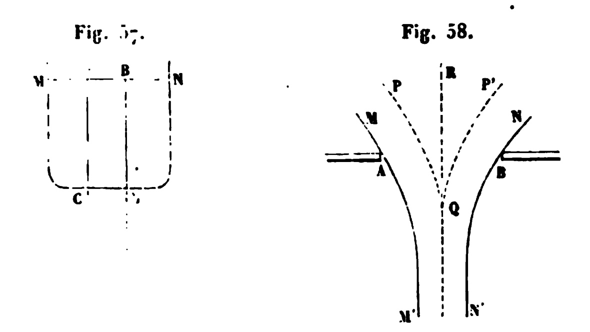
différence peut être négligée, et ... centrales continueraient
sidéré comme justifié. ... si les choses se passaient
... moment où une tranche

CONTRACTION DE LA VEINE. ... sortir à travers l'orifice AB
cédé de vérification beau... sur une surface plane. Après
culer d'une part et à ... très-court θ, elles ont parcouru
dire la quantité de liq... ...ances inégales et se trouvent sur
un orifice de section ... surface A′M′B′, de même étendue
qu'à recueillir et à ... AB, mais concave et limitée à un
la dépense, il faut ... contour A′B′ plus étroit. Après un se-
à la sortie égale à ... intervalle θ, la différence des che-
tinuait de s'écou... parcourus par les molécules cen-
tion s dont la ... et extérieures est devenue plus
en désignant ... grande encore, la surface A″M″B″ sur
thèse exig... laquelle elles se trouvent est encore plus
dirigés ... contour A″B″ est encore plus étroit. Les
paroi, ... la même manière pendant un certain
En fai... peu, à cause de l'adhérence des molécules,
que ... mouvement commun dans une même
... la veine cesse de se contracter pour prendre
... constante ou qui ne varie plus que par l'accé-
... ...tute. Ce raisonnement est fondé en ce sens
... sur les parois diminue réellement la vitesse
... mais il ne suffit pas pour expliquer les phéno-
... ...ttement produisait la contraction du jet, la vi-
... de la veine serait notablement modifiée, ce qui
... plus, toutes les circonstances qui augmentent le
... devraient diminuer la dépense, et, par conséquent,
... à l'orifice un tuyau d'ajutage ayant exactement
... la veine libre, on devrait produire une plus grande
... de vitesse aux bords et constater une dépense
... l'expérience prouve que cette dépense n'est pas
... Bien plus, cette dépense augmente beaucoup si l'aju-
... cylindrique, pourvu que la veine y adhère dans toute
... et qu'elle coule à *gueule-bée;* alors il n'y a
... contraction anomale, bien qu'il y ait plus de frot-
...

... donc à invoquer que l'adhésion du liquide pour lui-

... suite de l'entraînement que les diverses parties du ... exercent les unes sur les autres, ce mouvement ne peut ... au cylindre vertical ayant pour base l'orifice AB (*fig.* 57). Toutes les molécules placées au-dessus de l'orifice AB (*fig.* 58) doivent se presser à la fois pour s'échapper, mais

Fig. 57. Fig. 58.



dans des directions différentes : contre les bords suivant MM', NN', au centre suivant RQ, et aux parties intermédiaires dans les directions PS, P'S'. Si cette explication est vraie, on voit : 1° que le véritable orifice n'est pas AB, mais la section contractée menée par le point Q, ce qui justifie la correction que l'on a faite à la formule de la dépense ; 2° qu'un ajutage moulé sur la veine doit à peine changer la direction extérieure des jets, ainsi que la quantité de liquide écoulé, ce qui est vrai ; 3° qu'un ajutage cylindrique, déterminant par adhérence la formation d'une veine à peu près cylindrique, doit, malgré les frottements, augmenter la dépense et la rapprocher de l'expression théorique, dans laquelle on ne tient aucun compte des adhésions.

INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE DU LIQUIDE. — Ainsi l'effet de l'adhésion du liquide est mis hors de doute par l'observation de la contraction de la veine. Son influence sera manifestée d'une manière encore plus sûre si nous parvenons à démontrer expérimentalement une relation entre la contraction de la veine et la constante capillaire du liquide. Girard [1]

---

(1) GIRARD, *Mémoires de l'Académie*, t. I, 1816.

constata en effet que l'alcool coule plus rapidement que l'eau à travers des orifices percés en mince paroi : la section contractée de la veine doit donc être plus grande pour l'alcool, et c'est en particulier ce qui résulte de mesures directes de M. Isarn [1]. Ainsi l'influence de l'adhésion est moindre pour l'alcool que pour l'eau et nous savons précisément que la constante capillaire de ce dernier liquide est plus de trois fois supérieure à celle du premier. Il suffit, d'après M. Isarn, de vaporiser de l'alcool ou de l'éther à peu de distance d'un orifice par lequel de l'eau s'écoule pour que le liquide à faible tension superficielle, en se dissolvant dans l'eau, diminue sa constante capillaire et augmente la dépense de l'orifice dans une proportion appréciable.

CONSTITUTION DE LA VEINE LIQUIDE. — En examinant de plus près la constitution de la veine, nous n'aurons pas de peine à nous convaincre de l'importance des actions moléculaires dont elle est le siége. A partir de la section contractée, elle est d'abord limpide comme une tige de cristal; sa forme est celle d'un cylindre ou plutôt d'un cône très-aigu. Elle arrive bientôt à un point où elle change complétement d'aspect : elle devient trouble, plus grosse et semble être bosselée; tout indique qu'elle cesse d'être continue, et c'est ce que nous allons d'abord prouver. Prenons une feuille de carton, tenons-la horizontalement et faisons-la mouvoir rapidement, de manière à couper normalement la veine trouble; nous verrons ensuite sur le carton, non une trace mouillée continue, mais seulement quelques taches séparées. La veine est donc formée par une pluie de gouttes liquides qui se poursuivent, mais ne se touchent pas, et dont quelques-unes rencontrent la feuille de carton dans son passage. Une seconde preuve de ce fait se tire de l'observation d'une veine de mercure qui intercepte la lumière comme un filet opaque à sa partie supérieure, mais qui permet de lire à travers sa portion inférieure; celle-ci est donc discontinue.

Éclairons ensuite une veine descendante avec un faisceau

---

(1) ISARN, *Journal de Physique*, t. IV, p. 167; 1875.

solaire; plaçons derrière elle un écran noir, pour la voir se détacher plus nettement sur le fond, et en la regardant attentivement nous verrons la partie trouble renflée de distance en distance (*fig.* 59). Entre ces *ventres* successifs qui paraissent immobiles, nous distinguerons des étranglements qui les réunissent et que l'on nomme des *nœuds*. Les ventres paraissent lamelleux, comme s'ils étaient formés de plaques imbriquées, et il semble qu'un canal continu s'étende dans l'axe de la veine de haut en bas. Cette apparence singulière n'est évidemment qu'une illusion d'optique dont il faut chercher la cause.

Fig. 59.

Remarquons d'abord que, les gouttes successives dont le jet se compose passant l'une après l'autre devant nos yeux avec une grande vitesse, chacune d'elles doit infailliblement produire l'impression d'une traînée lumineuse verticale, par la même cause qui fait qu'un charbon rouge tournant avec rapidité nous montre un cercle rouge. Aussitôt qu'une goutte a passé, une autre la remplace, et la traînée lumineuse se perpétue, dessinant sur le fond noir de l'écran l'enveloppe des positions occupées successivement par toutes les gouttes. Si nous distinguons des étranglements et des ventres le long de la veine, c'est sans doute parce que ces gouttes s'allongent et s'aplatissent alternativement pendant qu'elles tombent. Pour nous en assurer, il faut chercher un procédé pour voir la veine comme si elle était immobile.

Il y a pour cela plusieurs moyens très-simples : le premier consiste à employer un carton circulaire que l'on fait tourner très-rapidement autour de son centre et qui est percé de fentes rayonnantes étroites, comme le carton du phénakisticope. On se place vis-à-vis de la veine, on interpose le carton entre l'œil et le jet, puis on le fait tourner. Aussitôt qu'une fente passe devant l'œil, on voit chaque goutte de la veine dans la position qu'elle occupe; mais on la voit pendant un temps si court, qu'elle ne change sensiblement ni de position ni de forme pendant ce temps. Quand une deuxième fente passe, on revoit le phénomène, et, si la vitesse est convenable, on revoit d'autres

constata en effet que l'alcool coule plu
à travers des orifices percés en minc
tractée de la veine doit donc être
et c'est en particulier ce qui résul
M. Isarn (¹). Ainsi l'influence de l'
l'alcool que pour l'eau et nous
constante capillaire de ce dern
fois supérieure à celle du prem
de vaporiser de l'alcool ou de ... peu de
orifice par lequel de l'eau s'é ... impression
tension superficielle, en se ... temps pour que
constante capillaire et augm ... ment saisis. Nous
une proportion appréciab ... procédés plus com-

CONSTITUTION DE LA VEI ... oles, on réussit donc à voir
près la constitution de l ... elle qu'elle est constituée à un
nous convaincre de l'in ... dans un état d'immobilité com-
elle est le siége. A ... ouvre alors des gouttes distinctes
d'abord limpide com ... nous savions déjà, et qui sont de
d'un cylindre ou plu ... les unes très-petites, ce sont elles
à un point où elle ... l'apparence du canal intérieur; les
trouble, plus gro ... coup plus grosses, qui alternent avec
qu'elle cesse d'êt ... qui sont régulièrement espacées et,
bord prouver. Pr ... marquable, qui ont la forme d'ellipsoïdes
talement et fai ... aplatis ou allongés suivant le lieu
per normalem ... cupent. Voici comment ils se succèdent.
carton, non ... hauteur déterminée se voit une goutte aplatie
ques taches ... descendant on trouve les globules n° 2,
de gouttes ... n° 3, sphérique, n° 4, allongé, et enfin
pas, et do ... qui offre le maximum d'allongement; après
dans son ... et en descendant encore, on repasse inverse-
l'observati ... par les mêmes formes jusqu'au n° 9, et le
comme ... de la veine est composé comme cette pre-
met de ... partie. A mesure qu'ils tombent, ces globules
discon ... succèdent aux mêmes places et y prennent tou-
Écl ... les mêmes formes, et il est évident que ces
... l'apparence de la veine, puisque son con-
(¹) ... l'enveloppe des points occupés successivement par

les diamètres horizontaux des gouttes. Il y a donc des ventres aux lieux où sont les aplatissements et des nœuds où se placent les allongements.

Il reste à se demander comment se forment ces gouttes. Savart avait disposé un réservoir avec un tube d'écoulement muni d'un robinet; en l'ouvrant très-peu pour laisser tomber le liquide goutte à goutte, il voyait l'eau s'amasser à l'orifice, s'allonger en larme et se détacher; mais, comme cette goutte tend à reprendre la forme sphérique, elle oscille en tombant et passe alternativement de la forme allongée à la forme aplatie. Chacune de ces gouttes était immédiatement suivie d'une autre petite, et l'on avait, par la succession de ces mêmes effets, une véritable veine trouble dès son origine.

M. Plateau [1] a complété cette explication en partant de ses expériences sur l'équilibre des liquides sans pesanteur. Quand on forme dans l'eau alcoolique un cylindre d'huile très-long par rapport à son diamètre, il devient instable, et il s'y produit une transformation spontanée : on voit des étranglements se former dans toute la longueur, puis aussitôt la masse se diviser, chaque étranglement produire une petite sphère, chaque ventre en donner une grosse, et le tout se résoudre en une série de grosses gouttes séparées par une série de petites, absolument comme on les observe dans la veine trouble. C'est que la veine liquide, constituant une figure très-allongée, doit éprouver cette même transformation; mais, comme chaque portion qui se convertit graduellement en sphère est emportée pendant ce temps par le mouvement du liquide, elle n'arrive à l'état de masse isolée qu'à une assez grande distance de l'orifice; jusque-là, la veine est continue, et plus loin elle se trouble. M. Plateau déduit également de sa théorie l'explication d'autres faits qui s'observent sur la veine, et dont le plus frappant est, sans doute, cette circonstance qu'une goutte est alternativement allongée ou aplàtie en passant dans un nœud ou dans un ventre, qu'elle change périodiquement de forme dans sa chute: c'est, en un mot, qu'elle est en vibration. Cette

---

[1] Plateau, *Sur les théories récentes de la constitution de la veine liquide lancée par un orifice circulaire.*

goutles qui ont succédé aux premières et
dans les mêmes positions. On reçoit ainsi

Fig. 60.

parées, mais identiques, et q
persistante de la veine telle
aux moments très-courts pe
aperçue. Le deuxième mo
core : il consiste à opérer d
rer avec une étincelle éle
instant et qui montre la
temps, qu'elle semble ir
reçue par l'œil persiste
tous les détails du jet
laisserons de côté d
plexes.

Par ces diverses
se dessiner la vein ... veine
instant donné et ... -même
plète. On y déc ... entendre :
(*fig.* 60), ce qu ... cet état irrégu-
deux espèces : ... duisait sa note au
qui produisen ... des nœuds se for-
autres beauc ... ; ils étaient longs et
les premièr ... en même temps, et ils
chose rem ... Quand le violon se taisait, tout
de révolut ... commençait à parler, les divisions se
qu'ils oc ... successivement de petits coups
A une ha ... à chaque fois des mouvements cor-
n° 1 ; en
moins p
le n° 5, ... l'on doit les intéressantes études que
quoi, ... leur ensemble. On voit qu'il a dé-
ment ... devient discontinue, ce qui explique
reste ... trouble ; 2° que les gouttes s'allongent et
miè ... alternativement, d'où l'on conclut l'apparence ex-
se
jo ... *sur la constitution des veines liquides lancées par des*
formes expliq ... *parois* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2ᵉ *série*,
tour est l'en

térieure du jet; 3° que les vibrations des globules peuvent être éteintes ou exagérées si on les soustrait ou qu'on les soumette à l'influence de vibrations communiquées. Ce travail est un exemple remarquable où l'on voit une série logique d'expériences analysant et expliquant tour à tour toutes les circonstances d'un phénomène complexe. Nous ne dirons qu'un mot d'un autre genre de recherches qui se rapportent au même sujet et qu'on doit au même savant (¹).

Si l'on fait tomber une veine sur un petit plan circulaire posé horizontalement sous l'orifice, elle ne se réfléchit pas sur ce plan, mais elle s'y étale, et, continuant son mouvement au delà, elle forme une large surface mince et lisse sur laquelle on distingue seulement quelques stries rayonnantes (*fig.* 61). A une certaine distance, cette nappe se trouble, se frange d'une auréole bosselée, puis celle-ci se résout en gouttelettes qui se

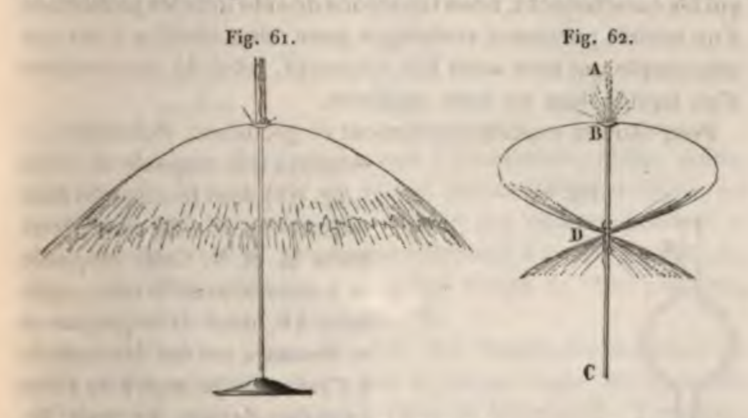


Fig. 61. Fig. 62.

projettent au loin. Cet aspect se transforme quand la vitesse d'écoulement diminue : la nappe se courbe, puis se ferme et diminue d'étendue (*fig.* 62). Tous ces phénomènes ont leurs lois que nous n'étudierons pas; mais il y a une conséquence que nous voulons en déduire : ils donnent la preuve d'une

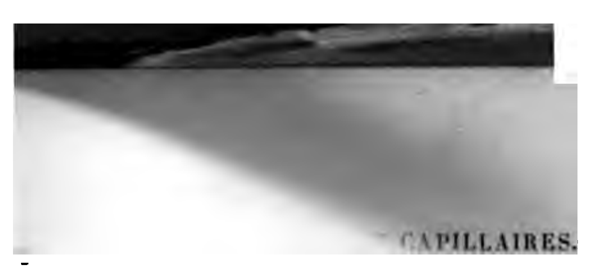
---

(¹) SAVART, *Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2ᵉ série, t. LIV, p. 55). — *Mémoire sur le choc de deux veines liquides animées de mouvements directement opposés* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2ᵉ série, t. LV, p. 257).

circonstance devait moins qu'une autre échappe[r
plaçant l'oreille près de la veine, il l'entendit r
très-grave : en la recevant sur un tambour, il
l'idée lui vint qu'on pourrait éteindre les vibrati
paraître les nœuds et les ventres en soustray
toute cause de vibration. Il suspendit le rés
des coussins de drap et reçut la veine sur un
posée obliquement. Alors tout changea d'as
core une veine limpide suivie d'une veine tr
ci commençait plus bas et n'avait que des
lières, sans étranglements ou renflements. On
les nœuds et les ventres et même les exag
singulier. On sait que les mouvements
mettent d'un corps sonore à un autre au m
si l'on fait résonner un violon dans une
placé loin de lui produit à l'instant la m
rendant à la fois la vibration qui lui a été
étant un instrument sonore, elle de
quand on produisait à distance la note
c'est ce qui arriva. Quand elle était a
lier dont nous venons de parler, on
moyen d'un violon, et l'on voyait au
mer avec une remarquable régular
minces; des ventres se développaie
étaient plus larges et plus fixes. Qua
disparaissait; quand il recommença
reformaient, et si l'on donnait succ
d'archet distincts, on avait à chaqu
respondants dans la veine.

C'est à Savart (¹) que l'on doit
je viens de résumer dans le
montré : 1° que la veine dev
pourquoi elle devient troubl
s'aplatissent alternativement

(¹) Savart, *Mémoire sur la const*
orifices circulaires en minces parois
t. LIII, p. 337).



M au trait N.
qui est
liquide
ve sont

nt sont en
xemple qui

42.

ulé.

9835,0
Admis.
6851,9
5231,2
2612,8
1371,2
1307,6

coulement d'une même
inverse des pressions, on
de qui coulera pendant le
ellement à la pression et non
ine carrée de cette pression,
elli.

ec des longueurs inégales du
ns le même temps des quantités
inverse de la longueur. Toutefois,
e exacte qu'à partir d'une certaine

proportionnelle à la quatrième puis-
a donc, en résumant ces diverses lois,
re de millimètres cubes de liquide
econde,

$$Q = K\frac{HD^4}{l}.$$

oyenne de toutes les expériences a donné

adhérence manifeste entre les solides et le
vement.

ÉCOULEMENT PAR LES TUBES CAPILLAIRES.
l'écoulement d'un liquide par un orifice
plus simple de tous ceux que l'on puiss
namique, car on peut être conduit à é
l'eau dans des tuyaux très-longs plu
sous l'influence d'impulsions quelco
l'adhésion du liquide pour lui-mêm
si énergiquement dans le cas sim
miné, produira alors des effets c
modifiés par l'adhérence du liqu
N'ayant ici pour but que de c
agissantes et de déterminer auta
qui les caractérisent, nous laiss
d'un intérêt purement analyti
très-simple qui sera aussi for
d'un liquide dans un tube c
Pour étudier expériment

Fig. 63.

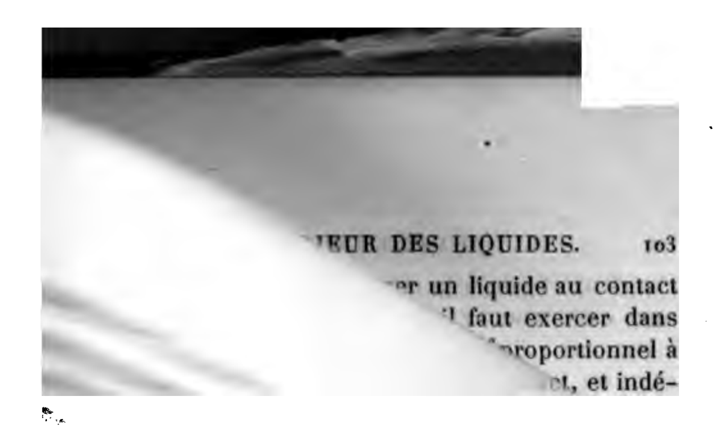
	[illegible]
	[illegible]
	763
	13315
	830
	1171
	312
3	1947
60	548
3	1337
60	443
20	872
65	371
0	681
60	310

constante et se m
pression se fait s

— Pour interpréter le
de Poiseuille, nous invoquerons le
les parois du tube et celui qui
liquides contiguës animées de

(1) POISEUILLE, *R*
dans les tubes de très
p. 433; 1846. *Voir*
seuille, *Ann. de C*

frottement est due à Newton.



er un liquide au contact
l faut exercer dans
proportionnel à
t, et indé-

i et du liquide.
ur d'un liquide la vi-
arie d'une manière con-
ches d'épaisseur dr, pa-
r v, $v+\frac{dv}{dr}dr$ les vitesses
effort f' qui fait équilibre au
sera supposé proportionnel à
itesse relative :

$$\varepsilon_1 S \frac{dv}{dr} dr.$$

éré comme variable indépendante, dr
l'on peut poser

$$\varepsilon_1 dr = \eta,$$

$$f' = \eta S \frac{dv}{dr};$$

coefficient de frottement intérieur.
ons à l'expérience de Poiseuille. Un tube cylindrique
tal, assez étroit pour qu'on puisse négliger les mou-
s qui s'exécutent perpendiculairement à son axe, est
u par un courant liquide. Prenons dans la masse
uche cylindrique de rayon r et d'épaisseur dr, ayant
e l'axe du tube. Elle frotte contre le liquide ambiant
deux surfaces extérieure et intérieure; le liquide inté-
meut plus vite et tend à entraîner la couche, le li-
térieur agit pour la retarder : il suffit, pour maintenir
se relative, que la couche soit soumise à une force

$K = 2495^{mmc},22$ quand H est exprim
cure et que la température est de 1

K représente un coefficient de d
une même substance prise à la
augmente considérablement qu
Ainsi Poiseuille a trouvé que l
pour expression générale

$$K = 1836,724 (1 + 0,03$$

De plus, ce coefficient varie
le prouvent les nombres
donnent les temps de l'éc
quide à travers un même

Eau..........

Alcool à 30°..

Essence de

Eau sucré

id.

Chlor

Sulf

Az

FROTTEM

résultat
frottem
s'exerc
vitesse

pas qu'a
nts. Prenons
positive celle de
ent mince consi-
ns p et $p + \frac{dp}{dx} dx$ sont
extrémités sur une surface

$$r \frac{dp}{dx} dx\, dr$$

ent. La vitesse v du liquide décrois-
a paroi $\frac{dv}{dz}$ est négatif; le frottement
agit pour entraîner le liquide et sa va-

$$r\, dx \frac{dv}{dr} = - 2\pi\eta\, dx\, r \frac{dv}{dr}$$

sens de l'écoulement; le frottement à la sur-
est de même

$$\pi\eta\, dx \left[r \frac{dv}{dr} + \frac{d\left(r \frac{dv}{dr}\right)}{dr} dr \right]$$

en sens contraire de l'écoulement. Pour l'équi-
la somme de toutes les forces évaluées dans

(1)

[redacted]

'oulement doit être nulle : on a donc

$$2\pi r \frac{dp}{dx} dx\, dr = -\, 2\pi\eta \frac{d\left(r\frac{dv}{dr}\right)}{dr} dx\, dr,$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d\left(r\frac{dv}{dr}\right)}{dr}.$$

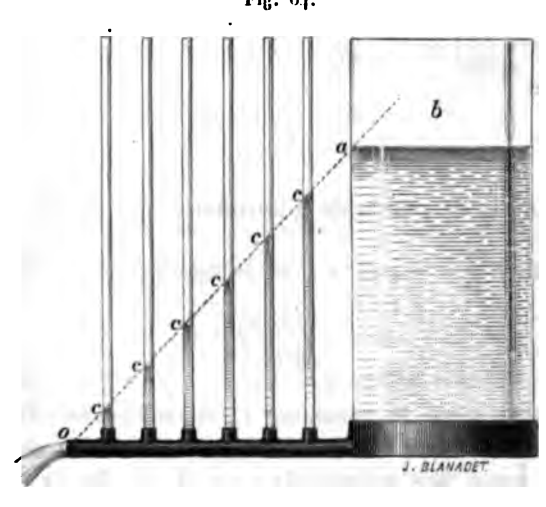
DES PRESSIONS. — Le second membre de l'équation (3) indépendant de x, il en est de même du premier. On a

$$\frac{dp}{dx} = A,$$

$$p = Ax + p_0.$$

la pression à l'origine des abscisses que nous pouvons à l'une des extrémités du tube capillaire. C'est alors la

Fig. 64.



on sous laquelle se produit l'écoulement : d'autre part, ant abstraction de la pression atmosphérique qui s'exerce t et d'autre, la pression est nulle à l'orifice du tube, à

une distance l de l'origine

$$Al + p_0 = 0, \quad A = -\frac{p_0}{l},$$

(6)
$$p = -\frac{p_0}{l}x + p_0.$$

Cette formule exprime la loi des pressions. On peut la vérifier expérimentalement, à l'aide d'un vase b muni d'une longue tubulure, sur laquelle se dressent une série de tubes verticaux. Quand le régime normal de l'écoulement est établi, les niveaux c du liquide dans les tubes sont tous sur la droite ao, passant par l'orifice et rasant le niveau du liquide dans le vase (*fig.* 64).

LOI DES VITESSES. — En substituant à $\frac{dp}{dx}$ sa valeur $-\frac{p^0}{l}$ tirée de l'équation (6), l'équation (3) devient

$$\frac{d\left(r\frac{dv}{dr}\right)}{dr} = -\frac{r}{\eta}\frac{p_0}{l};$$

on en tire

(7)
$$r\frac{dv}{dr} = -\frac{r^2}{2\eta}\frac{p_0}{l},$$

et il n'y a pas de constante à introduire, car, $\frac{dv}{dr}$ ne pouvant être infini, $r\frac{dv}{dr} = 0$ pour $r = 0$. Intégrant encore, on obtient

(8)
$$v = -\frac{r^2}{4\eta}\frac{p_0}{l} + C.$$

Pour déterminer la constante C, nous écrirons l'équation d'équilibre relative à la couche liquide infiniment mince qui touche la paroi. Son rayon est le rayon R du tube; sa vitesse v_R est, d'après l'équation (8),

(9)
$$v_R = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{p_0}{l} + C;$$

elle doit se trouver en équilibre sous l'effet du frottement

$$2\pi R \varepsilon v_R dx$$

exercé contre la paroi, et qui tend à la retarder, et du frottement contre le liquide intérieur dont la valeur absolue est

$$2\pi R \eta \left(\frac{dv}{dr}\right)_R dx,$$

qui tend à l'accélérer. $\left(\frac{dv}{dr}\right)_R$ est négatif, et cette dernière force, évaluée dans le sens de l'écoulement, doit être prise en signe contraire ; l'équation d'équilibre est donc

$$(10) \qquad \varepsilon v_R = -\eta \left(\frac{dv}{dr}\right)_R;$$

d'ailleurs $\left(\frac{dv}{dr}\right)_R$ est donné par l'équation (7), en y faisant $r = R$,

$$(11) \qquad \left(\frac{dv}{dr}\right)_R = -\frac{R}{2\eta}\frac{p_0}{l}.$$

En remplaçant dans l'équation (10) v_R et $\left(\frac{dv}{dr}\right)_R$ par leurs valeurs (9) et (11), elle devient

$$(12) \qquad \frac{R^2}{4\eta}\frac{p_0}{l} + \frac{R}{2\varepsilon}\frac{p_0}{l} = C.$$

L'équation (12) donne la valeur de C; l'équation définitive des vitesses est donc

$$(13) \qquad v = \frac{p_0}{4\eta l}(R^2 - r^2) + \frac{p_0}{2\varepsilon l}R.$$

Si le liquide mouille la paroi, ε doit être considéré comme infini, et l'on a simplement

$$(14) \qquad v = \frac{p_0}{4\eta l}(R^2 - r^2);$$

elle a sa valeur maximum au centre du tube.

Dépense. — Pour déterminer la quantité de liquide qui s'écoule pendant l'unité de temps à travers le tube, il suffit de

[illegible] que la couche d'épaisseur dr et de rayon r fournit [illegible] le volume de liquide

$$v.2\pi r\,dr.$$

Le volume total Q est

$$Q=\int_0^R v.2\pi r\,dr=\frac{\pi p_0}{l}\int_0^R\left(\frac{R^2-r^2}{2\eta}r\,dr+\frac{R}{\varepsilon}r\,dr\right)$$

$$=\frac{\pi p_0}{8\eta l}R^4+\frac{\pi p_0}{2\varepsilon l}R^3.$$

Dans le cas où le liquide mouille le tube, cette expression devient

$$(16)\qquad Q=\frac{\pi p_0}{8\eta l}R^4=\frac{\pi p_0}{128\eta l}D^4.$$

INTERPRÉTATION DES EXPÉRIENCES DE POISEUILLE. MESURE DU FROTTEMENT INTÉRIEUR DES LIQUIDES. — L'expérience nous a appris que le débit d'un tube capillaire est proportionnel à la charge p_0 en raison inverse de la longueur l du tube et proportionnel à la quatrième puissance de son diamètre D. La formule (16) exprime précisément ces lois de Poiseuille; il faut donc admettre que la vitesse du liquide au contact de la paroi est nulle; le coefficient K se rattache au coefficient de frottement intérieur par la relation

$$K=\frac{\pi}{128\eta},$$

$$(17)\qquad \eta=\frac{\pi}{128K}.$$

Pour évaluer les coefficients de frottement en unités absolues, il est nécessaire d'exprimer la pression p_0 en grammes par centimètre carré, le rayon R et la longueur l en centimètres. Or, Poiseuille ayant trouvé $K=1836^{mmc},724$ pour l'eau et pour une pression de 1^{mm} de mercure ou de $1^{gr},359$ par centimètre carré, ce coefficient serait de $1351^{mmc},524$ pour une pression de 1^{gr}; si, maintenant, au lieu d'évaluer R et l en millimètres, comme le faisait Poiseuille, nous les exprimons en

centimètres, la valeur numérique du quotient $\frac{R'}{l}$ devient mille fois plus faible, et, pour ne pas changer Q, il faut attribuer à K une valeur mille fois plus forte

$$K = 1351^{cc},524,$$

d'où, d'après la formule (17),

$$\eta = 0,00001816.$$

A une température quelconque, on a

$$\eta = \frac{0,00001816}{1 + 0,0336793\,t + 0,000\,2209936\,t^2};$$

pour $t = 30°$, par exemple, η se réduit à 0,00000821.

De nombreux expérimentateurs ont étudié, par la méthode de Poiseuille, les vitesses d'écoulement de divers liquides et mesuré leurs coefficients de frottement intérieur. Nous signalerons en particulier les travaux de Sprung (1), Graham (2), Rellstab (3), Guerout (4), Wykander (5), Pribram et Handl (6), Schöttner (7), Warburg (8), Villari (9), etc. De l'ensemble de ces recherches il résulte que la loi de Poiseuille est extrêmement générale puisque, d'après MM. Warburg et Villari, elle s'applique même au mercure : bien que ce liquide ne mouille pas le verre, le rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ est sensiblement égal à zéro, comme pour l'eau. Pour tous les liquides étudiés le coefficient de frottement intérieur décroît rapidement quand la température s'élève.

---

(1) SPRUNG, *Poggendorff's Annalen*, t. CLIX, p. 1.

(2) GRAHAM, *Liebig's Annalen*, t. CXXIII, p. 105.

(3) RELLSTAB, *Inaugural Dissertation*. Bonn, 1868.

(4) GUEROUT, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 351 ; t. LXXIX, p. 1201 ; t. LXXXI, p. 1025 ; t. LXXXIII ; p. 1291.

(5) WIJKANDER, *Lunds Physiogr. Sällsk. Jubelskrift*, 1878. *Beiblätter*, t. III, p. 8.

(6) PRIBRAM et HANDL, *Wiener Berichte*, t. LXXVIII, 1878.

(7) SCHÖTTNER, *Wiener Berichte*, t. LXXVII, 1878. *Beiblätter*, t. III, p. 59.

(8) WARBURG, *Annales de Poggendorff*, t. CXL, p. 367.

(9) VILLARI, *Nuovo Cimento*, 2e série, t. XV, p. 263 ; t. XVI, p. 23.

M. O.-E. Meyer ([1]) a mesuré le coefficient de frottement η par une méthode tout à fait différente, consistant à observer le décroissement de l'amplitude des oscillations d'un disque suspendu à l'intérieur du liquide et oscillant dans son propre plan. La résistance que le disque éprouve sur sa tranche est négligeable, tandis que ses faces latérales sont retardées par les couches liquides parallèles qu'elles entraînent. La force retardatrice peut être déterminée par le calcul en fonction de η, et, réciproquement, l'observation des oscillations permet de mesurer cette force, et par suite le frottement intérieur. Les valeurs trouvées par ce procédé sont un peu plus fortes que celles qui se déduisent des expériences de Poiseuille : ainsi M. Meyer donne pour l'eau à 10°, $\eta = 0{,}00001575$ au lieu de 0,00001335 qui résulterait de la formule donnée ci-dessus.

Le Tableau suivant résume quelques-unes des données que l'on possède sur les coefficients de frottement.

SUBSTANCE.	TEMPÉRATURE.	COEFFICIENT de frottement ([2]).	EXPÉRIMENTATEUR.
Eau	0°	0,00001816	Poiseuille.
Eau	10	0,00001335	Id.
Alcool méthylique	10	0,000007075	Rellstab.
» éthylique	10	0,00001556	Id.
» propylique	10	0,00002032	Id.
» butylique	10	0,00003871	Id.
Mercure	17,2	0,000016329	Warburg.
Glycérine	2,8	0,0430	Schöttner.
»	26,5	0,00504	Schöttner.
Eau et glycérine 94,00 pour 100	8,5	0,007588	Schöttner.
» 80,31 »	8,5	0,001042	Schöttner.
» 64,05 »	8,5	0,0002266	Schöttner.
» 49,79 »	8,5	0,0000944	Schöttner.
Poix	6° à 7°	2249.10^8	Obermayer.
Storax	15° à 16°	137.10^6	Id.

([1]) O.-E. Meyer, *Journal de Crelle*, t. LIX, et *Annales de Poggendorff*, t. CXIII, p. 55, 93, 183.

([2]) Pour transformer ces coefficients en unités britanniques, il faudrait tenir compte de ce que le gramme (poids) que nous employons ici vaut

Nous considérons ici le storax et la poix comme des liquides visqueux. Bien que la poix soit assez dure pour ne pas être rayée par l'ongle, un bloc de poix abandonné à lui-même, à température constante, s'affaisse peu à peu et s'écoule dans tous les sens comme un liquide. Nous citerons à cet égard une expérience bien curieuse. On place au fond d'une rainure creusée dans un bloc de bois quelques débris de liége; on ferme ensuite la rainure par un morceau de poix sur lequel on dépose de petites pierres; au bout de quelques jours la poix s'est moulée sur la rainure, le liège est à la surface et les pierres sont au fond; ces solides ont donc traversé la poix de part en part sous l'influence de forces aussi médiocres que l'action exercée sur eux par la pesanteur. Le résultat final est le même que si la poix était un liquide dont l'équilibre serait régi par les lois ordinaires de l'Hydrostatique [1].

FILTRATION. — Graham [2] et Tate [3] ont étudié le passage des liquides à travers des couches filtrantes et montré que l'écoulement se produit comme à travers un système complexe de tubes capillaires de forme et de diamètres variés : la vitesse d'écoulement, à partir d'une certaine épaisseur minimum de la couche filtrante, demeure proportionnelle à la pression et en raison inverse de l'épaisseur de la couche; elle croît très-rapidement avec la température. On sait que les chimistes ont observé depuis longtemps que la filtration à travers le papier est d'autant plus rapide que le liquide est plus chaud.

980,89 dynes, et multiplier η (qui est une force) par 980,89. Dans un grand nombre de Mémoires originaux (par exemple ceux de MM. O.-E. Meyer, Schnötter, etc.), on a fait usage de ces unités [centimètre, seconde, gramme (masse)]. *Voir* à ce sujet le premier fascicule de ce Volume, pages 62 et suivantes.

(1) Obermayer, *Wiener Anzeiger*, 1877, p. 90, et *Beiblätter*, t. I, p. 336.

(2) *On the diffusion of liquids* (*Philosophical Transactions*, 1850, p. 1 et 805; 1851, p. 83).

(3) *Experimental researches on the laws of absorption of liquids by porous substances* [*Philosophical Magazine*, t. XX, p. 364, 500 (1860), t. XXI, p. 57, 115 (1861); t. XXIII, p. 126 et 283 (1863)].

M. O.-E. Meyer (1) a mesuré …
par une méthode tout à fait di… …ES GAZ.
décroissement de l'amplitude …
pendu à l'intérieur du liquide … …IFICE EN MINCE PAROI. — L'écou-
La résistance que le disque … …sans variation bien notable de sa
geable, tandis que ses f… …refroidit en passant d'une pres-
couches liquides parallè… …sion plus basse, et il en résulte pour
datrice peut être déterm… …complications que nous ne pour-
réciproquement, l'ob… …principes de la théorie mécanique
surer cette force, …
valeurs trouvées p… …abstraction de ce refroidissement, on
celles qui se déd… …maintenant cette proposition, d'ailleurs
M. Meyer donn… …vitesse d'écoulement des différents gaz à
de 0,0000133… …mince paroi varie en raison inverse de la
Le Tableau … …densité. Nous aurons recours à un rai-
l'on possède … …onnement fondé sur l'emploi de la règle de Tor-
… …hauteur d'une colonne gazeuse, de densité
… …équilibre à la pression atmosphérique H.
… …par D la densité du mercure,

$$dh = DH,$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2gHD}{d}}.$$

… la loi.

… … 0,001293, et l'on a, en prenant le mètre pour
…ngueur,

$$\sqrt{\frac{2.9,808.(0,76.13,59)}{0,001293}} = 396^{m},002.$$

… … la vitesse d'écoulement d'une masse d'air main-
… … de part et d'autre de l'orifice et s'écoulant de l'atmo-
… dans le vide.
… difficile de mesurer directement la vitesse d'écoule-
… … un gaz; on préfère évaluer la dépense d'un orifice percé

… t. II, 2e fascicule, p. 118*.

[redacted]

... paroi. D'après d'anciennes expériences de d'Aubuisson[1], confirmées depuis par divers expérimentateurs [2], ... les gaz comme pour les liquides la dépense pratique est inférieure à la dépense théorique, et sensiblement dans le même rapport. Les ajutages accroissent la dépense.

Pour reconnaître si la loi des densités est exacte, M. Bunsen a déterminé le temps nécessaire pour qu'un volume fixe de différents gaz s'écoule dans des conditions identiques, et il a vérifié que ces durées sont bien proportionnelles à la racine carrée de la densité. L'appareil qu'il a employé (*fig.* 65 et 66) est formé d'une cloche de verre allongée f (*fig.* 65), munie d'un robinet j. A l'extrémité de cette cloche se trouve rodé un petit ajutage gh, fermé par une mince lame de platine soudée à la lampe d'émailleur à son extrémité et portant un orifice d'écoulement aussi petit que possible. Un trait de repère nn est tracé sur la cloche; deux autres repères, b et c, sont placés sur un flotteur e placé à l'intérieur de l'appareil [3].

Pour faire une expérience, on remplit la cloche de gaz, on la dispose sur une cuve à paroi de verre (*fig.* 66) de manière que le trait nn affleure au niveau du mercure, et l'on s'installe avec une lunette en face de l'appareil; on ouvre ensuite le robinet j et l'on note les instants où les repères b et c passent devant le repère nn. Dans l'intervalle, un même volume de gaz s'est écoulé dans l'atmosphère sous une série de pressions décroissantes, toujours les mêmes. Si l'on fait deux expériences consécutives, la première avec de l'air, la seconde avec un gaz quelconque, le rapport des carrés des durées d'écoulement donne la densité. M. Bunsen a trouvé ainsi :

---

(1) D'Aubuisson, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXII. Le coefficient de dépense serait de 0,65 d'après d'Aubuisson.

(2) Notamment Weisbach, *Experimental Hydraulic*, p. 184 ($\mu = 0,675$), G. Schmidt, *Gilbert's Annalen*, t. LXVI ($\mu = 0,52$), et Koch, *Versuche und Beobachtungen ueber die Geschwindigkeit und Quantität verdichteter Luft, welche aus Oeffnungen, etc., ausströmte Götting*, 1824.

(3) Bunsen, *Méthodes gazométriques*, p. 131. Traduction Schneider. Paris, 1858.

ÉCOULEMENT D'

		[illegible]
		[illegible]
		1,?44
		1,106
	[illegible]	0,415
	0,079	0,069

ÉCOULEMENT DES GAZ PAR UN ORIF
lement d'un liquide se produit s
température; mais un gaz se
sion supérieure à une pressi
la loi de son écoulement de
rons aborder qu'à l'aide de
de la chaleur (1).

Toutefois, si l'on fai
peut démontrer dès l
rigoureuse, que la v
travers un orifice en
racine carrée de l
sonnement élém
ricelli. Soit *h* la
uniforme *d*, fai
On a, en dési

ce qui

Po
unit



reil de Bunsen pour mesure

Fig. 66.



d'un gaz dont on n'aurait à sa disposition qu'une
... quantité.



TTEMENT INTÉRIEUR DES GAZ. — pillaires retarde l'écoule- intérieur analogue à des et dont nous nisme. Il nous de Graham ([1]), e par suite on peut ades comme absolue. mesuré le coefficient η observation des oscilla- plan et suspendu dans l'air; ont ensuite servis des expé- er en valeur absolue les coeffi- ents gaz.

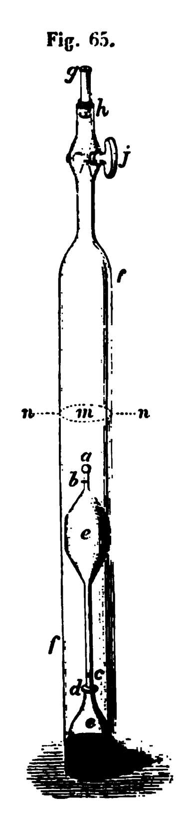
	η.
....	0,000000216
....	0,000000194
ote............	0,000000190
....	0,000000188
e carbone	0,000000188
carbonique...........	0,000000163
oxyde d'azote..........	0,000000163
cide chlorhydrique........	0,000000159
Chlore....................	0,000000150
Acide sulfureux............	0,000000141
Acide sulfhydrique........	0,000000133
Gaz des marais............	0,000000122
Chlorure de méthyle........	0,000000118
Gaz oléfiant................	0,000000111
Ammoniaque...............	0,000000110
Cyanogène................	0,000000109

GRAHAM, *Philosophical Transactions*, 1846 et 1849.
MAXWELL, *ibid.*, 1866.
O.-E. MEYER, *Annales de Poggendorff*, t. CXXV, p. 177, 401, 564, et CVII, p. 253, 353.
O.-E. MEYER, *Annales de Poggendorff*, t. CXLIII, p. 14. O.-E. MEYER SPRINGMÜHL, *Annales de Poggendorf*, t. CXLVIII, p. 526. Dans le Mémoire al, les coefficients η sont exprimés en unités britanniques (p. 549). On déduit les nombres de notre Tableau en divisant par 980.

	D d'après l'écoulem
Air	1,000
Acide carbonique	1,53
1vol CO + 1vol CO^2	1,2
Oxygène	1,1
Gaz de la pile	0,
Hydrogène	0

On pourrait se servir de l'appareil

Fig. 65.



paisses dont racines nous surire l'hydrogène seulement dans ment intérieur

. 0 j.

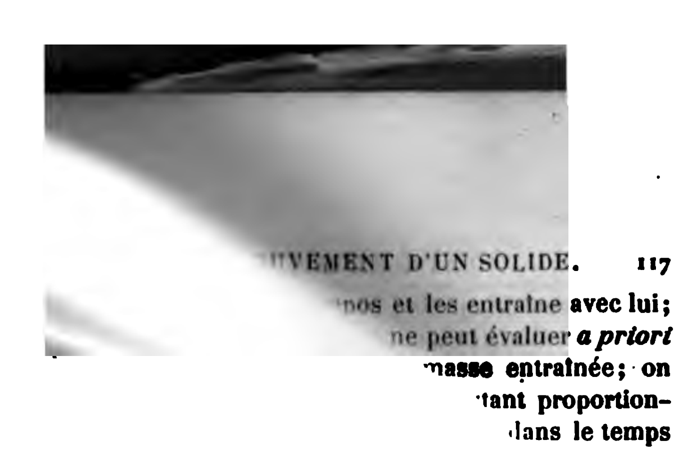
tubes capillaires trop courts uisse leur être appliquée : suides rapports variables compris

L'AIR AU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

dans l'air rencontre dans son mouve-

la densité d'un petite quantité.

, Théorie des gaz, t. II, 2e fascicule. ...métriques, p. 213-247.



…nos et les entraîne avec lui;
…ne peut évaluer *a priori*
…masse entraînée; on
…tant proportion-
…dans le temps
…se

…ommuniquer à une
…sse v dans le temps dt

…v^2.

…de la vitesse. Ce serait préci-
…rouvée par le corps mobile.
…on, ne saurait être rigoureuse,
…son plan, par exemple la poulie
…résistance qui, d'après la loi de
…et qui se trouve par le fait propor-
…illation. Il est probable que, dans le
…de l'air se compose d'au moins deux
…nel à la vitesse, l'autre à son carré,

$$f = av + bv^2$$

…est très faible, comme dans le cas des oscil-
…s, le premier terme seul exerce une influence

…ement, nous admettrons que pour un corps de
…minée la résistance opposée par l'air est une fonc-
…vitesse seule, que nous développerons en série
…formule de Maclaurin :

$$f = av + bv^2 + cv^3 + \dots.$$

…ence confirme cette manière de voir, car pour des
…rès-considérables la résistance croît plus vite que ne
…rait la loi du carré.
…lise surtout la résistance de l'air pour la production de

mouvements de rotation uniformes. Par exemple, dans la machine de Morin ([1]), un treuil est mis en mouvement par la chute d'un poids; par un système d'engrenages on le rend solidaire d'une roue à ailettes, et la vitesse s'accélère jusqu'à ce que la résistance de l'air fasse équilibre au poids moteur. Théoriquement ce résultat n'est atteint que dans une durée infinie; mais, au bout de peu d'instants, le mouvement ne diffère pas d'une manière appréciable du mouvement uniforme qui doit se produire à la limite.

([1]) *Voir* 1er fascicule, p. 37.

[redacted]

CHAPITRE V.

COMPRESSIBILITÉ DES LIQUIDES.

Compressibilité des liquides. — Expériences d'Œrsted. — Nécessité d'une correction due à la compressibilité de l'enveloppe. — Expérience de Colladon et Sturm. — Expériences de Regnault, de M. Jamin. — Tableau des coefficients de compressibilité des liquides.

COMPRESSIBILITÉ DES LIQUIDES. — Tous les corps changent de volume par l'effet de la compression; considérable dans le cas des gaz, la variation de volume est presque insignifiante pour les liquides et les solides, et son étude est hérissée de toute espèce de difficultés. Au point de vue théorique, la compressibilité des liquides est relativement simple, parce qu'elle s'exerce également dans tous les sens, tandis que les solides se déforment sous l'influence des actions mécaniques qui leur sont appliquées; mais, pratiquement, les liquides ne peuvent être étudiés qu'au sein d'enveloppes solides, aux parois desquelles ils transmettent les pressions qu'eux-mêmes supportent, et l'on n'observe directement qu'une variation de volume apparente résultant à la fois de la compressibilité du liquide et de celle du vase. Pour obtenir la compressibilité réelle, il faudra donc étudier l'élasticité des solides qui forment les vases et défalquer de l'effet brut observé la part qui revient à la déformation de l'enveloppe. Dans ce qui suit, nous supposerons celle-ci connue; nous verrons plus tard comment on se procure les résultats dont nous ferons usage.

HISTORIQUE. — Tout le monde sait que les académiciens de Florence ont cherché à constater la compressibilité de l'eau sans pouvoir y réussir. Ils prirent un tube de verre deux fois recourbé en forme de siphon et terminé par deux sphères

creuses pleines d'eau; le tube intermédiaire contenait de l'air, et tout était hermétiquement fermé. On chauffa l'une des sphères, ce qui produisit de la vapeur et comprima le liquide contenu dans l'autre; mais on ne vit aucun abaissement du niveau. La vapeur, en effet, devait se condenser dans la partie froide et augmenter la quantité du liquide en même temps que la pression en diminuait le volume; si les physiciens del Cimento avaient eu la précaution d'isoler ce liquide par une couche d'huile, ils auraient probablement constaté le fait qu'ils avaient soupçonné. Ils ont ensuite comprimé l'eau par une colonne de 24 pieds du même liquide, mais sans voir aucune diminution de volume. Enfin ils ont soumis à une pression énergique une sphère creuse d'argent qu'ils avaient remplie d'eau, et l'on sait que le liquide filtra. Ces expériences firent d'abord penser que l'eau n'est pas compressible.

En 1761, John Canton [1] employa pour la même recherche un appareil mieux conçu, formé par une sphère surmontée d'un tube capillaire et qui ressemblait à un gros thermomètre. On le remplissait d'eau, et après l'avoir chauffé on fermait la pointe à la lampe. Par le refroidissement le niveau baissait jusqu'à un point qui restait fixe à une température invariable, et le vide était fait dans l'appareil. On cassait alors la pointe du tube, et la pression atmosphérique, en agissant subitement dans l'intérieur, faisait brusquement baisser le sommet du liquide; or, cet effet résultait de deux actions : la première était la compression de l'eau, la seconde l'agrandissement du vase. Pour mesurer cet agrandissement, Canton faisait le vide autour de la sphère, ce qui diminuait de 1^{atm} la pression extérieure et devait produire à peu près la même augmentation de la capacité du vase; il mesura l'abaissement du niveau produit dans cette nouvelle expérience, le retrancha de celui qui avait été observé dans la première, et la différence exprima la compression éprouvée par le liquide. Canton démontra par là que l'eau est réellement compressible. Perkins [2]

---

(1) John Canton, *Experiments to prove that water is not incompressible* (*Phil. Trans.*, t. LII).

(2) Perkins, *Phil. Trans.*, t. LXXII, 1820.

confirma cette conclusion par des expériences exécutées sur une grande échelle, et depuis lors on admit le fait; il ne restait plus qu'à faire des expériences précises pour mesurer la compressibilité des diverses substances, mais sur ce point il y avait de grandes difficultés à surmonter.

EXPÉRIENCES D'ŒRSTED. — OErsted [1] construisit dans cette intention un appareil que l'on nomme *piézomètre*. C'est, comme l'instrument de Canton, un large réservoir G (*fig.* 67) surmonté d'un tube capillaire O, qui reste toujours ouvert et se termine par un petit entonnoir. Ce tube est bien cylindrique, et l'on a tracé à l'avance dans toute sa longueur des divisions équidistantes. Il faut avant tout graduer cet appareil, c'est-à-dire mesurer sa capacité totale et celle de chaque division; on le fait par une méthode qui est générale et que nous allons décrire une fois pour toutes.

Fig. 67.



On pèse le tube vide, puis on introduit du mercure dans l'intérieur. Mais, si l'on essayait de verser ce liquide dans le vase, il n'y pénétrerait pas, parce que le tube est très-fin et que l'air intérieur soutiendrait le mercure; il faut alors commencer par chauffer le réservoir, puis retourner la pointe, la plonger dans le mercure et attendre que le refroidissement, en contractant l'air, fasse monter le liquide. On répète ensuite cette opération autant de fois que cela est nécessaire pour remplir la totalité du vase. Quand on y est parvenu, on laisse la pointe dans le mercure et l'on refroidit le tout en l'entourant de glace. Au bout de dix minutes, on enlève l'appareil qui est plein de mercure à 0°, on le pèse, on retranche du poids total P celui du tube vide p, et

---

(1) OErsted, *Denkschriften der Kopenhagener Academie*, t. IX, 1822.

creuses pleines d'eau; le tube interméd
et tout était hermétiquement fermé.
sphères, ce qui produisit de la vapeu
contenu dans l'autre; mais on ne vi
niveau. La vapeur, en effet, devait se
froide et augmenter la quantité du
que la pression en diminuait le vo
Cimento avaient eu la précaution
couche d'huile, ils auraient proba
avaient soupçonné. Ils ont ens
colonne de 24 pieds du même l
diminution de volume. Enfin
énergique une sphère creuse
d'eau, et l'on sait que le liqu
d'abord penser que l'eau n'e

En 1761, John Canton ([1]
un appareil mieux conçu.
d'un tube capillaire et qui
On le remplissait d'eau,
pointe à la lampe. Par l
jusqu'à un point qui rest
et le vide était fait dans
tube, et la pression
dans l'intérieur, faisa
quide; or, cet effet
était la compression
vase. Pour mesur
vide autour de la
sion extérieure e
mentation de la
du niveau produ
de celui qui avai
exprima la com
montra par là q

(1) John Can
(*Phil. Trans.*,
(2) Perkins

alors
P', divisée
ions, et $\frac{P-P'}{nD}$

préliminaire, Œrsted
ule qu'il avait l'intention
ntonnoir qui le termine une
enfoncer dans la tige pendant
l'office de bouchon pour en-
pour mesurer son volume; puis
de laiton. Il y ajouta un thermo-
plein d'air K, qui devait servir de
endit l'appareil dans un vase plein
devait s'exercer.
verre épais, soutenu et mastiqué
et terminé en haut par une douille
introduit l'eau par un tube à robinet B,
quand l'appareil est plein, par un
alors fermer le robinet B, puis baisser
une vis de pression C. En descendant,
l'air qui est au-dessus de A, puis il
trou, et, s'il continue de descendre, il le
l'eau du vase E.
l'on produit ainsi s'exerce à la fois sur la
piézomètre, et par l'intermédiaire de
sur le liquide qu'il contient; on voit
certain nombre de divisions, ce qui me-
apparente du volume de ce liquide. En
agit sur le liquide, la pression se commu-
dans le manomètre et la diminution de

volume qu'il éprouve mesure cette pression elle-même. On a ainsi d'une part la pression P qui comprime le liquide, de l'autre la diminution ω de volume qu'il éprouve. En divisant la contraction ω par le volume V et par la pression P exprimée en atmosphères, on a ce qu'on nomme le *coefficient moyen de compressibilité* apparente.

OErsted trouva que ce coefficient est égal à $\frac{46}{1000000}$ pour l'eau; il prit ce résultat comme exprimant la compressibilité vraie de ce liquide. Voici comment il raisonnait : puisqu'il est soumis à la même pression sur ses faces interne et externe, le piézomètre ne doit pas changer de capacité, ou, s'il change, ce ne peut être que par la diminution d'épaisseur de l'enveloppe, et elle doit être insensible. OErsted se trompait. En effet, supposons qu'au lieu d'être creux et rempli d'eau le piézomètre contienne un noyau de verre faisant corps avec lui. Au moment où on le comprimerait, il recevrait la pression par l'extérieur, la transmettrait au noyau, qui diminuerait de volume d'après les lois de la compressibilité cubique, et la capacité intérieure de l'enveloppe décroîtrait de la même quantité. Ainsi, dans le cas hypothétique que nous examinons, le noyau recevrait la pression de l'enveloppe, et, après s'être contracté, réagirait sur elle avec une force égale; cette enveloppe serait donc comprimée de l'extérieur à l'intérieur et de l'intérieur à l'extérieur par la même pression. Or, quand elle est pleine d'eau dans l'expérience d'OErsted, elle est soumise aux mêmes actions, et par conséquent elle se conduit de la même manière, c'est-à-dire que sa capacité diminue comme le ferait le volume d'un noyau de verre qui la remplirait et serait soumis à la même pression. Voici dès lors les conditions de l'expérience d'OErsted. Appelons V la capacité du piézomètre, P la pression, $\varkappa$ le coefficient de compressibilité de l'eau; la diminution de volume qu'elle éprouve est $\varkappa PV$: c'est celle que l'on observerait si le vase était invariable. Mais, d'après le raisonnement qui précède, la capacité du vase a diminué d'une quantité que nous exprimerons par αPV, ce qui fait remonter d'autant le niveau de l'eau, et, la contraction observée étant ω, on a

$$\omega = \varkappa PV - \alpha PV$$

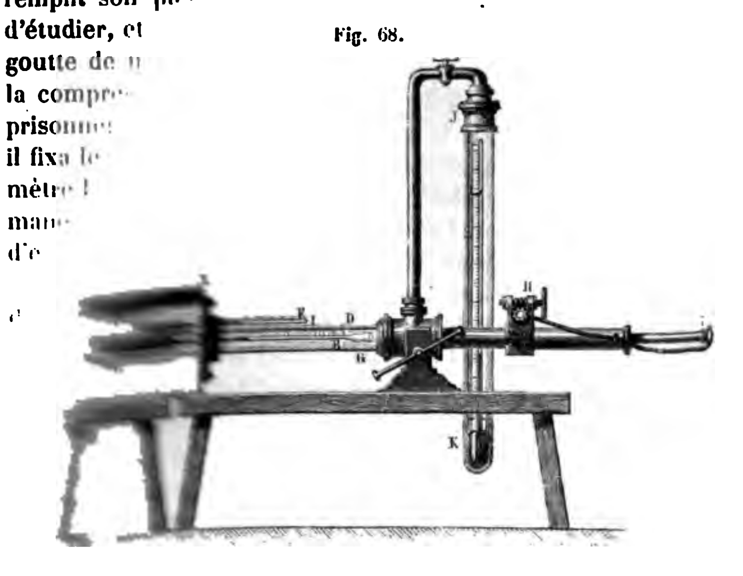
$\frac{P - p}{D}$ est la capacité de l'in- ... x. mercure à 0°.

En chauffant un peu l'in- ... peu de mercure, et l'on re- ... qui amène le niveau vis-à- ... l'on note. On a donc cha- ... dans une portion de la ... on pèse de nouveau ... par D, fait conna... exprime la capacit... l'on observe, et pour avoir ... té s'appelle le *coefficient de* ... rre ; et nous verrons plus tard ... directement. OErsted n'en ayant ... ats ne sont point exacts.

... ET STURM. — Colladon et Sturm ... it commise OErsted et voulurent la ... les expériences avec un appareil ... uellement du précédent. C'était encore

Une fois qu'il ... remplit son pie... d'étudier, et goutte de ... la compre... prisonn... il fixa le mètre ... man... d'e... e'

Fig. 68.



... mètre AB (*fig.* 68), disposé et gradué comme celui ... enfermé dans un tube large et épais DCG, qui était ... eau et dans lequel on exerçait la pression ; toute la ... consiste en ce que le nouveau piézomètre était ho-

... et STURM, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXVI,

rizontal et que la pression se mesurait par un manomètre à mercure KJ mieux gradué, plus long, et par conséquent plus sensible. Cette pression s'exerçait au moyen d'un piston dont la tige I avançait par la traction d'une corde HI enroulée sur un treuil, et ce treuil se manœuvrait par une vis sans fin H.

Colladon et Sturm remarquèrent bientôt des causes d'erreur qui, bien que fort petites en elles-mêmes, ont une influence perturbatrice notable, parce que la compressibilité que l'on mesure est très-petite. L'index de mercure placé à l'extrémité B du piézomètre offrait des inconvénients : il adhérait au verre, ne se mouvait pas d'une manière continue, mais par bonds successifs, quand la pression extérieure augmentait. On le remplaça par un index de sulfure de carbone, ou par une petite colonne d'air, et alors les expériences prirent une grande régularité. D'ailleurs le piézomètre est un véritable thermomètre, et même un thermomètre très-sensible, puisque son réservoir est très-grand et sa tige très-fine; aussi voit-on l'index avancer ou reculer quand la température augmente ou diminue, et, comme on ne peut comprimer l'eau sans l'échauffer ni la dilater sans la refroidir, on observe des effets mixtes occasionnés à la fois par les changements de pression et par les variations de la température. On annula cette cause d'erreur en enfermant le réservoir dans une cuve ML pleine d'eau qui servait à maintenir l'égalité de température dans tout l'appareil. Ces expériences ne laissaient donc rien à désirer.

Mais il fallait corriger les mesures de la compressibilité du verre, et voici la série d'expériences et de raisonnements sur lesquels on s'est appuyé. On prit une tige cylindrique de verre de 1^{m} de longueur et dont la section était égale à $13^{mmq},3$; on la tira par un poids de 8^{kg} : elle s'allongea de $0^{m},0006$; elle se serait comprimée très-sensiblement de la même quantité sous le même poids. Or, si l'on cherche quel est l'effort exercé par l'atmosphère sur chacune des sections extrêmes de la barre, on trouve qu'il est de $138^{gr},8$, et, comme il doit raccourcir la barre proportionnellement à ce poids, on obtient $0^{m},0000011$ pour ce raccourcissement. Nous le désignerons sous le nom de *compressibilité linéaire* pour 1^{m} et par atmosphère.

Colladon et Sturm admirent que la verge de verre n'éprouve

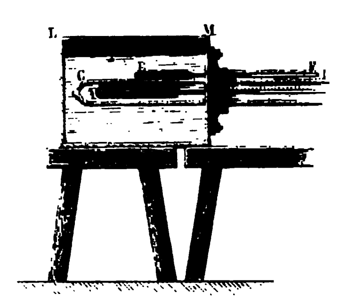
ou

$$\frac{\omega}{PV} = \varkappa - \alpha.$$

C'est donc la quantité $\varkappa - \alpha$ que l'on o
il faut y ajouter α. Cette quantité s'ap
compressibilité cubique du verre; et
comment on peut la mesurer directen
point tenu compte, ses résultats ne s

EXPÉRIENCES DE COLLADON ET STURM.
signalèrent l'erreur qu'avait comm
corriger. Ils reprirent alors les ex
qui ne différait pas essentiellemen

Fig.



...mo-
...a com-
...tat comme
..., quand une
...lle éprouve en
...augmentation de
... cubique ne sont
...n et Sturm; dès lors
...exact et la correction

...de l'autre ont déduit, l'un
... de ses expériences et des
...de la compressibilité cubique

un piézomètre AB ... qui serait $\frac{3}{2}$ d'après Poisson, et
d'OErsted, enfermé ... exemple précédent, la compressibi-
rempli d'eau et dan... donc être 0,0000016 suivant Pois-
différence consiste ... Wertheim.

... corriger les résultats bruts observés
... Colladon et Sturm du changement de

(¹) COLLADON et STURM
p. 113.

aux résultats trouvés
o,0000033, ou
ra les idées
neim. Il y a
ureusement
moindre que
pour exemple le
ible : elle est, par
gale à 0,00000173;
l'autre des coeffi-

. 0,00000173
.. 0,00000503
... 0,00000333
..... 0,00000283

correction qu'il faut apporter
et que, pour n'avoir pas été
compressibilité de l'enveloppe,
ont été conduits à des résultats
nt d'ailleurs que l'on n'eût aucune
correction qu'il faut faire, on ren-
ulté toute pratique. L'élasticité de la
piézomètre est déterminée par la trac-
donné, et c'est avec le nombre trouvé
la compression du vase, c'est-à-dire d'un
n'a ni la même densité, ni le même état
elquefois la même composition chimique.
diverses espèces de verre étant très-inégale,
es erreurs considérables en mesurant l'allon-
tige pour en conclure la compressibilité d'un

ENCES DE M. REGNAULT. — M. Regnault ([1]) fut amené,
tres recherches, à s'occuper incidemment de cette

---

[1] ...NAULT, *Relation des expériences entreprises pour déterminer les lois et* ...*antes qui interviennent dans le calcul des machines à vapeur*, t. I, et ...*s de l'Académie des Sciences*, t. XXI, p. 429; 1847.

aucun autre changement que ! et que sa section ne change rique agit seulement sur se que, si l'on comprimait to tige éprouverait une dimi dimensions, que la lon

que le rayon de la l

et que le volum

ou approxim

La com sphère pression exa tig



... sur une méthode entiè... mesurer en même temps ... et du liquide. Il donne au ... que exacte : c'est une sphère ... sons intérieur et extérieur, ou ... ou un tube à bases hémisphé... comme la montre la *fig.* 6.. ...mine ce piézomètre par une tige ...mométrique de verre CD, bien ca... ...ée, divisée dans toute sa longueur ... par une opération préliminaire, il mesure la capacité totale du réservoir et celle de chaque division.

On enferme le réservoir du piézomètre dans un cylindre de cuivre BB qui est rempli d'eau et fermé par un couvercle boulonné dans lequel passe la tige CD, que l'on fixe avec du mastic. Le sommet de cette tige peut s'ouvrir dans l'air par le robinet D et recevoir la pression atmosphérique, ou bien il peut être mis, par un tube à robinet EF, en communication avec un réservoir d'air comprimé. Ainsi le piézomètre peut à volonté être comprimé à son intérieur ou ne l'être pas.

D'autre part, le même réservoir d'air comprimé peut exercer sa pression par le tube FG dans le vase BB; mais on peut fermer le robinet G et ouvrir H, c'est-à-dire que l'on peut comprimer ... vase BB ou la laisser en communication avec l'at... Par conséquent, il sera possible d'exercer sur le ...re : 1° une pression extérieure ; 2° une pression exté... intérieure ; 3° une pression intérieure seulement. On ... successivement ces trois opérations.

...n exerce la pression dans le vase BB. Le liquide enfermé ... piézomètre ne subit aucune action ; le vase A seul

·l diminue de volume et le niveau s'élève. ·· croissement apparent du volume liquide. Sa ·i de la forme du vase; elle peut être calculée ·rie mathématique de l'élasticité, et doit être exprimée ·our le cas d'une sphère, par la formule

$$-\omega' = 3 \frac{R^3}{R^3 - R_0^3} \alpha P V_0,$$

que nous démontrerons par la suite. R et R_0 sont les rayons extérieur et intérieur de la sphère, α le coefficient de compressibilité cubique de la matière dont elle est formée.

Ayant mesuré ω', connaissant les deux rayons R, R_0 du vase, sa capacité V_0, la pression exercée P, on obtiendra la valeur de α.

II. On comprime intérieurement et extérieurement. Dans ce cas, le piézomètre subit les mêmes actions que dans les expériences d'Œrsted et de Colladon et Sturm; on observe une diminution de volume ω'' qui satisfait à la relation

$$\omega'' = \varkappa P V_0 - \alpha P V_0,$$

$$\frac{\omega''}{P V_0} = \varkappa - \alpha,$$

et, comme la première expérience a donné α, la deuxième fera connaître $\varkappa$.

III. Enfin on comprime à l'intérieur seulement. L'eau se contracte, le vase se dilate, on observe une diminution ω qu'il n'est pas nécessaire de calculer. Mais on peut remarquer que, la compression intérieure et extérieure étant la superposition des compressions que l'on exerce séparément en dedans et au dehors, on doit avoir

$$\omega'' = \omega - \omega';$$

c'est une relation de condition que l'expérience vérifie, ce qui montre l'exactitude des observations.

Voici un Tableau des compressibilités de divers liquides trouvées par M. Grassi [1] à l'aide des appareils de Regnault. On

[1] Grassi, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXI, p. 437.

question, et ses expériences. [illegible] mpressibilité d'un liquide
rement nouvelle, offrent le [illegible] iminue pour l'eau quand
les deux compressibilités [illegible] ute, au contraire, pour l'al-
piézomètre A une forme [illegible] n remarquera en outre que
de métal dont on connaî[illegible] lus grand quand ces trois der-
c'est un cylindre à ba[illegible] les pressions de plus en plus
[illegible] pour la première fois par M. Des-
[illegible] éral la compressibilité n'est pas pro-
[illegible] qu'elle est une fonction probable-
[illegible] mpérature et de la pression.

Fig. [illegible].

Tableau des coefficients de compressibilité.

NATURE DU LIQUIDE.	TEMPÉRATURE.	COMPRESSIBILITÉ x.	PRESSION en atmosphères dont la compressibilité est déduite.
Mercure	0,0°	0,00000295	//
Eau	0,0	0,0000503	//
»	1,5	0,0000515	//
»	4,1	0,0000499	//
»	10,8	0,0000480	//
»	13,4	0,0000477	//
»	18,0	0,0000463	//
»	//	0,0000460	//
»	25,0	0,0000456	//
»	34,5	0,0000453	//
»	43,0	0,0000442	//
»	53,0	0,0000441	//
Éther	0,0	0,000111	3,408
»	0,0	0,000131	7,820
»	14,0	0,000140	1,580
»	13,8	0,000153	8,362
Alcool	7,3	0,0000828	2,302
»	7,3	0,0000853	9,450
»	13,1	0,0000904	1,570
»	13,1	0,0000991	8,97
Esprit-de-bois	13,5	0,0000923	//
Chloroforme	8,5	0,0000625	//
»	12,0	0,0000648	1,309
»	12,5	0,0000763	9,2

NATURE DE LA SOLUTION.	TEMPÉRATURE.	COMPRESSIBILITÉ.
Chlorure de calcium n° 1	17,5°	0,0000306
Chlorure de calcium n° 2	15,8	206
Chlorure de calcium n° 2	41,25	229
Chlorure de sodium n° 1	18,5	321
Chlorure de sodium n° 2	18,1	257
Chlorure de sodium n° 2	39,6	263
Iodure de potassium	15,5	260
Nitrate de soude	18,1	295
Carbonate de soude	16,6	297
Eau de mer	17,5	436
$SO^3 + 2HO$	13,6	242
$SO^3 + 3HO$	14,6	250
$SO^3 + 4HO$	16,5	271
$SO^3 + 5HO$	14,7	279
$SO^3 + 6HO$	14,2	283
$SO^3 + 10HO$	14,6	315

remarquera que le coefficient de compressibilit
n'est point un nombre constant : il diminue p
la température s'élève ; il augmente, au co
cool, l'éther et le chloroforme. On remarq
le coefficient $\varkappa$ est de plus en plus grand
niers liquides sont soumis à des pressi
fortes. Ce fait a été signalé pour la prer
pretz ; il signifie qu'en général la comp
portionnelle à la pression et qu'elle es
ment complexe de la température et

pi du li-
t étudier, est
ion avec un ma-
e. Toute augmenta-
sion fait baisser le niveau
dans l'appareil, et l'on me-
la compressibilité apparente.
Nous la désignons par c. Il est clair
qu'elle est la somme de la diminution
de volume éprouvée par le liquide
et de l'agrandissement de capacité
ur connaître celle-là il faudrait mesurer

plongeant le piézomètre tout entier dans
rempli d'eau et communiquant à l'extérieur
thermométrique correcteur. Tout agrandissement
refoule l'eau extérieure, la fait monter dans

des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p 1364.

le tube et se mesure par ce déplacement que l'on observe et que nous appellerons c'.

On évite les changements de température en plongeant le tout dans une grande cuve à eau dont la capacité égale environ 1^{mc}; pour éviter les changements de pression, si minimes qu'ils soient, de l'eau qui enveloppe le piézomètre on avait eu soin de recourber horizontalement le tube correcteur.

La différence $c - c'$ représente évidemment la compressibilité réelle : on reconnut qu'elle est proportionnelle à la pression.

Voici une série de résultats déduits d'expériences dans lesquelles la pression varie de 1^{atm} à 10^{atm} :

Eau distillée	15°	0,0000457
Alcool	0	0,0000835
Alcool	15	0,0000911
Éther	0	0,000109
Éther	14	0,000128
Sulfure de carbone	14	0,0000635
Mercure	15	0,00000187

On peut remarquer que le coefficient 0,00000187 trouvé pour le mercure diffère notablement du coefficient 0,00000295 que M. Grassi a obtenu en se servant de la méthode de M. Regnault, tandis que pour les autres liquides beaucoup plus compressibles l'accord le plus complet existe entre les nombres précédents et ceux de M. Grassi. Cette différence provient de ce que, le coefficient de compressibilité du mercure étant très-petit, la moindre erreur dans la mesure de la correction due au changement de volume du piézomètre a une influence considérable sur le coefficient vrai, tandis que pour les autres, la compressibilité étant plus grande, cette cause d'erreur se fait moins sentir.

On sait que la dilatation des liquides va en augmentant à mesure que leur température s'élève, et qu'elle devient sensiblement égale à celle des gaz lorsqu'ils atteignent la température de leur ébullition. On a mesuré le coefficient de compressibilité à des pressions très-faibles, supérieures de $0^m,1$ seulement à la tension maximum des liquides employés : on n'a reconnu

aucun changement dans la valeur des coefficients de compressibilité ([1]).

([1]) Il convient encore de signaler des expériences, faites par M. Cailletet, à de très hautes pressions, à l'aide des appareils qui lui ont servi dans ses recherches sur la loi de Mariotte (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 77). Le Tableau suivant contient le résultat de ses expériences; elles ne sont pas corrigées de l'effet de la compressibilité du verre du piézomètre et, par suite, ne représentent que des compressibilités apparentes. Les valeurs des pressions ne sont qu'approximatives.

LIQUIDE.	DENSITÉ.	TEMPÉRATURE.	COEFFICIENT de compressibilité apparente.	PRESSION maximum en atmosphères.
Eau distillée privée d'air..	1,000	+8°	0,0000451	705
Sulfure de carbone......	"	+8	0,0000980	607
		+9	0,0000676	174
Alcool	0,858	+9	0,0000701	305
		+11	0,0000727	680
Huile de pétrole.........	0,865	+11	0,0000828	610
Essence de pétrole.......	0,720	+10,50	0,0000981	630
Éther....................	"	+10	0,0001440	630
Acide sulfureux..........	"	−14	0,0003014	606

Il résulte de la comparaison de ce Tableau avec les précédents que la compressibilité varie très peu avec la pression. Le nombre obtenu pour l'eau distillée est, en effet, sensiblement identique au résultat brut des expériences d'OErstedt.

CHAPITRE VI.

ÉLASTICITÉ DES SOLIDES.

Traction. — Lois de l'élasticité de traction. — Changement de volume pendant la traction. — Expériences de Cagniard-Latour. — Expériences de Wertheim. — Compressibilité cubique. — Déformation produite par une force tangentielle. — Équilibre d'un parallélépipède élastique. — Équilibre d'un tétraèdre dont trois faces sont rectangulaires. — Équilibre d'un corps élastique de forme quelconque. — Déformation d'une sphère creuse soumise à une compression uniforme. — Calcul des tensions. — Calcul des variations de volume. — Équilibre d'un cylindre creux à bases planes soumis à une compression uniforme. — Détermination expérimentale du coefficient de compressibilité cubique d'un solide.

Torsion. — Lois expérimentales de la torsion. — Méthode des oscillations.

Flexion.

Élasticité des corps anisotropes.

Le problème général de l'élasticité des solides est un des plus complexes que l'on puisse se proposer. Nous n'étudierons, dans ce Chapitre, que le cas de corps parfaitement élastiques, c'est-à-dire qui reviennent rigoureusement à leur forme et à leur volume primitifs quand l'action déformatrice a cessé d'agir.

Aucun corps ne satisfait pleinement à cette définition, mais certaines substances très-dures, telles que l'acier par exemple, n'éprouvent pas de déformation permanente appréciable quand on les soumet à de faibles actions mécaniques; par suite, les résultats auxquels nous arriverons n'offriront de signification précise que pour ce cas-là. Un Chapitre spécial sera consacré aux corps imparfaitement élastiques et aux limites de l'élasticité.

aucun changement dans la vale[illegible] [illegible] la petitesse des d[illegible] sibilité (¹). [illegible] de la constitution [illegible] [illegible] théorie mathématique [illegible] [illegible] reste qu'un certain nomb[illegible] [illegible]xpérience doit déterminer le[illegible] [illegible] générale pour s'appliquer à tou[illegible] [illegible]pes. Suivant de tous points un[illegible] [illegible]t adoptée par les mathématiciens. [illegible]cours à l'expérience dans quelques [illegible]ous nous servirons ensuite des ré[illegible] [illegible]uir une théorie élémentaire de l'élas[illegible] [illegible]cherons autant que possible à vérifier

LIQUI[illegible]
Eau distill[illegible]
Sulfure
Al[illegible]
[illegible]

[illegible]us simple de tous les problèmes de l'élas[illegible] [illegible]pparence, est celui où une verge solide se[illegible] [illegible]ée par un poids dans le sens de sa longueur. [illegible]ntôt que la contraction développée par un [illegible] est égale à l'allongement produit par l'effet [illegible] quand il tire; nous nous contenterons dès lors [illegible] la traction et de mesurer les rapports d[illegible] [illegible] des charges.

[illegible]riences se font au moyen d'une potence de fer très-

(¹) Il convient encore de sign[illegible] de très hautes pressions, à l'ai[illegible] cherches sur la loi de Mariott[illegible] *Sciences*, t. LXXV, p. 77). [illegible] riences : elles ne sont pas [illegible] piézomètre et, par suite, [illegible] Les valeurs des pression[illegible]

[illegible] consulter sur la *Théorie de l'élasticité.*

[illegible] *sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (*Mé*[illegible] [illegible]*mie des Sciences*, t. VIII, 1829) et *Mémoire sur les équation*[illegible] [illegible]*libre et du mouvement des corps solides élastiques* (*Journ*[illegible] [illegible]*technique*, XXᵉ Cahier, 1831).

[illegible]*ces de Mathématiques*, t. II et III, Paris, 1827-1828.

[illegible], *Mémoire sur la torsion des prismes* (*Mémoires des Savants* [illegible] [illegible] XIV, p. 233; 1856).

[illegible] *sur la théorie mathématique de l'élasticité.* 2ᵉ édition. Par[illegible]

[illegible], *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Sch*[illegible] [illegible] *Crelle*, t. XL, p. 51; 1850). *Ueber das Gleichgewicht und die Be*[illegible] [illegible] *unendlich dünnen elastischen Stabes* (*Journal de Crelle*, t. LVI, [illegible]59).

[illegible], *Theorie der Elasticität fester Körper*. Leipzig, 1862.

[illegible], *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillar*[illegible] [illegible] Leipzig, 1869.

forte B (1) (*fig.* 71), scellée dans un mur solide et soutenue par une jambe de force; elle se termine par une face plane verticale d'acier trempé et striée comme une lime, contre laquelle s'applique une autre plaque d'acier également striée, qui peut être serrée par des boulons C : ces deux pièces constituent les deux mâchoires d'un étau solide, entre lesquelles on fixe par une forte pression l'extrémité supérieure F de la verge que l'on veut étirer. On dirige cette verge verticalement, on saisit l'extrémité inférieure dans un étau D, construit comme le premier et auquel on suspend, par le moyen d'un crochet, une grande et forte caisse de chêne EHH, dans laquelle on place des poids par rangées horizontales. Lorsque ces poids sont nombreux, la verge s'allonge sensiblement; quand on les enlève, elle revient à son état primitif. Pour mesurer l'allongement, il faut prendre quelques précautions.

Fig. 71.

Si l'on introduisait brusquement des poids dans la caisse suspendue, on donnerait à l'appareil des secousses capables de rompre la verge; il fallait les éviter, et pour cela la caisse est munie de trois longues vis à caler H, H que l'on abaisse avant toute expérience, afin que la caisse soit portée par le sol; puis on établit la charge et l'on relève les vis peu à peu pour faire progressivement porter l'effort des poids sur la verge : cela se fait lentement et sans brusque secousse. Il faut se prémunir encore contre une erreur qu'il est facile de commettre. Les verges, quand on les prend minces, ayant toujours une courbure irrégulière, le premier effet des poids est de les redresser, et, par cela même qu'elles

(1) Wertheim, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XII, p. 385.

Les mécaniciens se sont ... mations des solides et sur ... léculaire des corps pour ... l'élasticité ([1]), dans la ... de coefficients arbitrai... relations. Cette théo... les corps, cristalli... marche inverse ... nous allons d... cas faciles ... sultats obt... ticité, d... les con...

...blent s'allonger; il faudra donc ...l suffisant pour les tendre ... successives, les seules dont on ...mesurera l'effet.

... toujours très-petits, c'est avec un ...mesure. On le fixe en avant de la p... ...ois pour toutes, puis on trace aux deux ... deux repères T et T' avec une lime fine ... quelque déliés qu'ils soient, la lunette avec ...rde les grossit et les fait paraître larges. On ... de viser le même bord des deux traits, et ...surée par le cathétomètre est la longueur de ...que phase de l'expérience : cette mesure est in... ...es tassements et des flexions éprouvés par le sup... ...ience.

... ÉLASTICITÉ DE TRACTION. — I. Cela posé, nous pou... ...vons d'abord essayer de reconnaître quelle relation il y a entre ...ment de la verge et sa longueur primitive. On trace à ... plusieurs traits équidistants le long de la verge; si ... distances au repère supérieur sont 1, 2, 3, 4 quand on ...mesure sous l'action d'une charge initiale quelconque, elles ...iennent $1+\varepsilon$, $2+2\varepsilon$, $3+3\varepsilon$, ... quand la traction aug... ...mente. Les allongements sont donc *proportionnels aux lon... ...gueurs des verges.*

II. On ne peut *a priori* savoir comment varieront les allon... ...gements d'une même tige quand les charges croîtront; c'est à l'expérience seule qu'il appartient de le montrer. Prenons donc des poids P, 2P, 3P, ...; nous trouverons des allongements ε, 2ε, 3ε, ..., c'est-à-dire qu'ils sont *proportionnels aux charges.* Ce résultat est important, car les allongements sont la somme des augmentations de la distance des diverses couches molé... ...culaires, et le poids tenseur est égal à la force attractive qui se développe entre elles quand elles s'écartent; cette force est donc proportionnelle à l'écartement des molécules.

III. Un résultat que l'on peut prévoir est que l'allongement doit être en raison inverse de la section de la verge, car le poids se répartit également sur tous les éléments de cette sec...

elle reste égale en changeant de forme, l'effet doit res-
même; si elle devient double, l'effet doit devenir moitié
…lle, car on est dans les mêmes conditions que si l'on
mplaçait la verge unique par deux verges égales tirées chacune par un poids moitié moindre : l'expérience vérifie cette prévision, et l'allongement est *en raison inverse de la section.*

IV. Enfin l'on conçoit que chacune des substances que l'on étudiera ne possédera pas, toutes choses égales d'ailleurs, une égale facilité à s'allonger : les unes se dilateront plus, les autres moins. Chacune d'elles aura un *coefficient d'allongement* qui lui est propre : c'est une des constantes qui servira à la caractériser.

En résumé, l'allongement ε est : 1° proportionnel à la longueur de la verge; 2° au poids P qui la tend; 3° en raison inverse de la section S; 4° proportionnel à un coefficient α : ce qui donne la formule

$$\varepsilon = \alpha \frac{PL}{S},$$

d'où l'on tire

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{\alpha} \frac{\varepsilon}{L},$$

(1) $$p = \frac{1}{\alpha} a,$$

en désignant par p le poids qui agit sur l'unité de surface, et par a l'allongement par unité de longueur.

Le coefficient α s'appelle *coefficient de compressibilité linéaire;* il exprime une longueur : c'est le raccourcissement produit sur l'unité de longueur par une charge p égale à l'unité pour chaque unité de section de la barre.

L'inverse $\frac{1}{\alpha}$ du coefficient de compressibilité linéaire a reçu le nom de *coefficient d'élasticité;* désignons-le par Q et nous aurons

(2) $$p = Qa.$$

Le coefficient Q d'élasticité représente un poids : c'est celui

deviennent rectilignes, elles semblent s longueur,
commencer par un poids initial suffi le poids
ajouter ensuite des charges succe t égale
tiendra compte et dont on mesur e, car
Les allongements étant toujo -même
cathétomètre qu'on les mesu
tence, on le règle une fois p
extrémités de la verge deu poids,
ou un burin; mais, quel
laquelle on les regard ticité, d'après Wer-
convient toujours d
leur distance mesu
la règle à chaqu *des métaux recuits à diverses*
dépendante des *mpératures.*
port et la pot

LOIS DE L
vons d'al
l'allong
cet e
leur
le
d

	15° à 20°.	100°.	200°.
.....	1727	1630	»
......	5584	5408	5482
......	7140	7274	6374
....	10519	9827	7862
....	15518	14178	12964
....	20794	21877	17700
u..........	19561	19014	17926
uis.........	17278	21292	19278

DE VOLUME PENDANT LA TRACTION. — Jusqu'ici nsidéré seulement les variations de longueur qui dans les verges pendant qu'on les comprime ou les étire; mais on comprendra aisément que la ontale ne peut rester la même avant et pendant : il est extrêmement probable qu'en s'allongeant la devenir plus mince, et c'est ce que prouve clairement rience très-nette qui est due à Wertheim (1). Il prit de caoutchouc soigneusement travaillées (*fig.* 72); aient 0m,3 de longueur environ; leur forme était un prisme à base carrée, et le côté de la section variait à 0m,047. Il les mastiqua par leurs extrémités dans atures de fer B et A; l'une portait un crochet destiné à

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXIII, p. 52.

soutenir verticalement l'appareil à un appui fixe; l'autre B supportait un poids tenseur P. A cause de la facilité que possède le caoutchouc de s'étendre beaucoup, on produisait un allongement très-considérable et on le mesurait, et, comme la section des verges était fort grande, on pouvait avec un compas constater et apprécier les variations d'épaisseur que la traction faisait éprouver à ces tiges : on vit alors qu'en s'allongeant le caoutchouc devenait plus mince, ce que l'on avait prévu.

Fig. 72.



La longueur primitive L augmente sous l'influence d'une charge que nous supposerons égale à l'unité de poids par unité de surface de la barre et devient $L(1+\alpha)$, α représentant l'allongement de l'unité de longueur. Imaginons que la section de la verge est un carré dont le côté est B, il décroît et devient $B(1-\beta)$, et la section B^2 devient $B^2(1-\beta)^2$. Dès lors le volume est LB^2 avant la traction, et il devient, quand elle se produit, égal à

$$LB^2(1+\alpha)(1-\beta)^2,$$

ou, en négligeant un terme très-petit,

$$LS(1+\alpha-2\beta).$$

On voit donc que, si d'une part la verge s'allonge, de l'autre elle s'amincit, et que le volume total, soumis à deux causes inverses de variations, pourra croître ou décroître, suivant que α sera plus grand ou plus petit que 2β : c'est ce que les mesures doivent décider. Or elles ont montré que α est plus grand que 2β, c'est-à-dire que le volume augmente pendant que la traction s'opère et que par conséquent la densité de la substance diminue. C'est encore un résultat qui ne doit pas nous étonner, puisque l'effet de l'action exercée est d'écarter les molécules.

Mais pour aller plus loin, pour chercher les relations précises qui existent entre α et 2β, il faut évidemment s'adresser ou à la théorie mathématique de l'élasticité ou à l'expérience, et même avoir recours à ces deux moyens à la fois : c'est ce

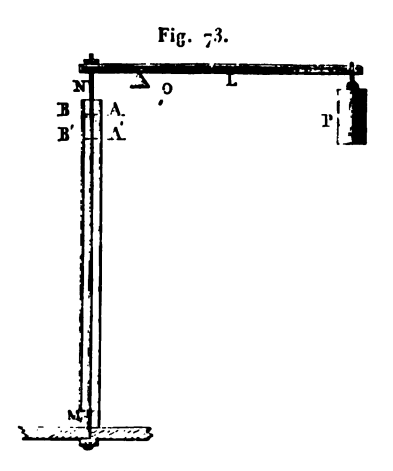
qui a été fait, et malheureusement il reste encore sur ce point quelques incertitudes. Nous allons les faire connaître.

Poisson [1] d'abord et d'autres analystes ensuite ont soumis au calcul la question qui nous occupe ; à la faveur de certaines hypothèses, ils sont arrivés à une loi très-simple qui peut s'énoncer ainsi : *L'allongement de l'unité de longueur est égal au double de l'augmentation de l'unité de volume.* D'après la notation précédente, on aurait $\alpha = 2(\alpha - 2\beta)$ ou $\alpha = 4\beta$.

D'un autre côté, Cauchy [2] a établi des formules plus générales qui comprennent comme cas particulier la solution précédente, mais qui montrent qu'elle n'est pas nécessaire et que l'on peut avoir entre α et β d'autres relations que l'expérience est appelée à déterminer.

*EXPÉRIENCES DE CAGNIARD-LATOUR [3]. — Ainsi préparée, la question appelait nécessairement l'intervention des physiciens, et des expériences positives ont été exécutées ; l'une d'elles est

Fig. 73.



due à Cagniard-Latour. Il fixa à un obstacle résistant M un fil métallique vertical MN (*fig.* 73) ; sa partie supérieure était

---

(1) POISSON, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII.

(2) CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, t. III, p. 182 et 205.

(3) Citées par POISSON, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXVI, p. 384.

attachée à un levier NOL mobile en O et sollicité par un poids P. Quand il n'était pas chargé, le fil avait une longueur déterminée et cette longueur augmentait quand on faisait agir le poids. Dans une expérience, l'allongement fut de $0^m,006$.

Un tube mince de verre entourait le fil; il était mastiqué à la base M et rempli d'eau; son diamètre et celui du fil étaient connus. Au moment où l'allongement se produisit, on vit baisser le niveau de l'eau de AB en A'B', ce qui prouvait que la partie immergée prenait une section moindre, comme nous le savons déjà. D'une part, on mesura l'allongement α, de l'autre on put calculer la diminution β de la section en observant l'abaissement du niveau dans le tube de verre dont le diamètre était connu, et, cela fait, Cagniard-Latour fut conduit à admettre que réellement $\alpha = 4\beta$, c'est-à-dire que les prévisions de la théorie de Poisson étaient justifiées.

EXPÉRIENCES DE WERTHEIM (¹). — Wertheim, au contraire, est venu infirmer ce résultat. Comme l'expérience précédente n'est pas susceptible d'une grande précision, il attribua la concordance des mesures avec la théorie de Poisson à des erreurs de détermination, et il exécuta des expériences qui paraissent mériter plus de confiance : l'exemple des barreaux de caoutchouc doit être cité en premier lieu. Comme on avait directement mesuré leur allongement et la contraction de leur section, on avait les valeurs de α et de β, et l'on trouva que l'augmentation de volume $\alpha - 2\beta$ était sensiblement égale, non à la moitié, mais au tiers de l'allongement α.

Un autre genre d'épreuve, dont l'idée appartient à Regnault, fut ensuite exécuté par Wertheim : il fit tirer des tubes de laiton A sans soudure (*fig.* 74); ils furent fixés à leurs deux extrémités dans d'autres tubes courts et plus larges B, B' : l'inférieur était fermé; le supérieur était ouvert et l'on pouvait visser à son extrémité un boulon C, terminé par un tube de verre très-étroit DF. Cet appareil ainsi préparé pouvait être soutenu par le haut et tiré par le bas; il s'allongeait comme une verge, et son volume intérieur s'agrandissait suivant la même

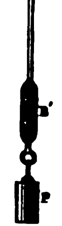
(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XXIII, p. 52.

loi qu'un noyau cylindrique du même métal qui l'aurait entièrement rempli.

On emplissait ce tube avec de l'eau jusqu'au niveau F, on exerçait la traction, et l'on mesurait d'une part l'allongement, de l'autre l'abaissement du niveau de l'eau intérieure : l'expérience donnait donc à la fois l'allongement de l'unité de longueur α et l'augmentation de l'unité de volume $\alpha - 2\beta$; il ne restait plus qu'à les comparer. On trouva, conformément aux expériences faites sur le caoutchouc et contrairement à la théorie de Poisson, que $\alpha - 2\beta$ était le tiers et non la moitié de α. Voici les résultats :

Fig. 74.





	Numéro des tubes.	$\frac{1}{2}\alpha$.	$\alpha - 2\beta$.	$\frac{1}{3}\alpha$.
Laiton.	I.........	0,81047	0,52017	0,54032
	II........	0,87866	0,54363	0,58578
	III.......	0,88949	0,56104	0,59299
Cristal.	I.........	5,3650	3,8613	3,5767
	II........	4,0639	2,4217	2,7093
	III.......	1,5282	1,1472	1,0188
	IV.......	1,1938	0,7786	0,7959

En résumé, nous venons de montrer qu'au moment où une verge élastique est étirée elle augmente de longueur et diminue de largeur, que l'effet de ces deux actions est inégal et que le volume total augmente. Mais, quand nous voulons comparer l'augmentation de longueur à l'accroissement de volume, nous rencontrons dans les théories et dans les expériences une divergence considérable. La théorie trop particulière de Poisson indique que le changement par unité de volume est la moitié de l'allongement par unité de longueur : les expériences de Wertheim conduisent à admettre qu'il en est le tiers. D'autres expériences réalisées par des procédés indirects semblent établir que ce coefficient change avec la nature des corps solides. Nous signalerons à ce sujet les expériences de Regnault sur la compressibilité d'une sphère creuse, celles de Wertheim sur la torsion que nous indiquerons plus loin, enfin diverses expériences de

M. Kirchhoff [1], Okatow [2], Schneebeli [3] et Cornu [4], réalisées par des procédés plus compliqués.

Nous poserons

$$(3)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \mu$$

et nous ne supposerons rien de particulier sur la valeur de ce coefficient. Dans l'hypothèse de Poisson, on a

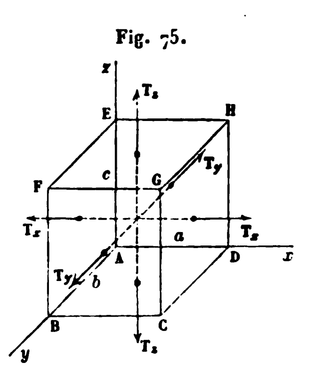
$$(4)\qquad \mu = \frac{1}{4};$$

dans celle de Wertheim,

$$(5)\qquad \mu = \frac{1}{3}.$$

Compressibilité cubique. — Considérons un parallélépipède ABCDEFGH (*fig.* 75) soumis sur ses trois couples de faces opposées à des tractions normales T_x, T_y, T_z par unité de surface. Si la traction T_x agissait seule, elle produirait un allongement de l'arête $\overline{AD} = A$ parallèle, un raccourcissement des arêtes $\overline{AB} = B$ et $\overline{AE} = C$, perpendiculaires. De même T_y allongerait B et raccourcirait A et C; enfin T_z allongerait C et raccourcirait A et B. Les variations de longueur produites sont si faibles, qu'elles s'ajoutent sans se modifier;

Fig. 75.



[1] Kirchhoff, *Poggendorff's Annalen*, t. CVIII, p. 369. M. Kirchhoff a trouvé pour l'acier $\mu = 0{,}294$ en moyenne; mais pour le laiton tiré il a obtenu dans des conditions identiques le nombre $\mu = 0{,}387$.

[2] Okatow, *Poggendorff's Annalen*, t. CXIX. Les valeurs trouvées pour diverses sortes d'acier doux recuit ou trempé ont varié de $\mu = 0{,}275$ à $0{,}328$.

[3] Schneebeli, *Poggendorff's Annalen*, t. CXL.

[4] Cornu, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 333. Pour le verre, M. Cornu a trouvé $\mu = 0{,}25$, ce qui est le nombre de Poisson.

les trois arêtes deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} A[(1+\alpha T_x - \beta(T_y+T_z)], \\ B[(1+\alpha T_y - \beta(T_z+T_x)], \\ C[(1+\alpha T_z - \beta(T_x+T_y)]. \end{cases}$$

Désignons par a, b, c les dilatations proportionnelles des arêtes A, B, C; l'on a

$$a = \frac{A[(1+\alpha T_x - \beta(T_y+T_z)] - A}{A} = \alpha T_x - \beta(T_y+T_z),$$

par suite

$$(7)\qquad \begin{cases} a = \alpha[(T_x - \mu(T_y+T_z)], \\ b = \alpha[(T_y - \mu(T_z+T_x)], \\ c = \alpha[(T_z - \mu(T_x+T_y)]. \end{cases}$$

Le volume du parallélépipède dilaté est le produit des trois arêtes; en négligeant les quantités de l'ordre du carré de α et de β, ou de leur produit, il est devenu

$$ABC[1+(\alpha-2\beta)(T_x+T_y+T_z)].$$

L'augmentation de volume rapportée à l'unité de volume est donc

$$(8)\qquad \omega = (\alpha-2\beta)(T_x+T_y+T_z) = \alpha(1-2\mu)(T_x+T_y+T_z).$$

Nous examinerons quelques cas particuliers. Proposons-nous d'abord de déterminer les tensions de telle sorte que la variation du volume soit nulle. On doit avoir

$$T_x+T_y+T_z = 0,$$

et les tensions ne peuvent toutes avoir le même signe. On peut faire T_x positif et poser $T_y = T_z = -\frac{T_x}{2}$; il faut donc exercer sur les faces latérales du cube une compression dont la valeur numérique est la moitié de la traction exercée sur ses bases.

En second lieu, supposons que $T_x = T_y = T_z$, c'est-à-dire que le parallélépipède est soumis à une action normale uni-



L'augmentation proportionnelle du

$\mu)T_x,$

$\acute{\delta},$

mpressibilité cu-

...née par Poisson,

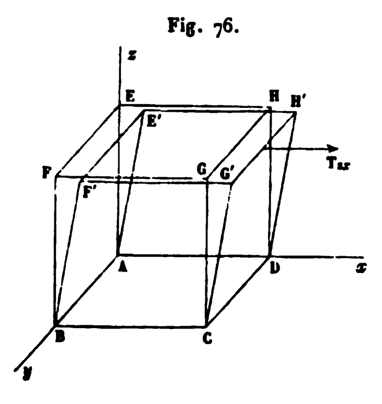
...m $\left(\mu = \frac{1}{3}\right)$, on doit avoir

$$k = \alpha = \frac{1}{Q}.$$

... de compressibilité cubique est numérique-
... coefficient de compressibilité linéaire ou à l'in-
... coefficient d'élasticité.

...MATION PRODUITE PAR UNE FORCE TANGENTIELLE. — Consi-
...ctuellement l'effet de deux forces T_{zx} égales, agissant

Fig. 76.

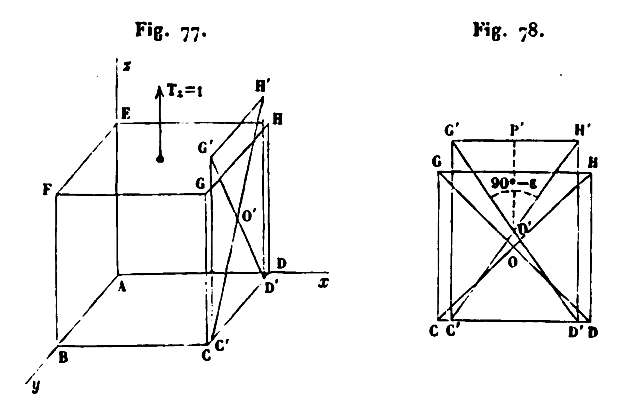


contraire et parallèlement à Ax, sur deux faces oppo-
...D, EFGH d'un cube. Il revient au même de supposer la
...D fixe et EFGH seule soumise à la force T_{zx} (*fig.* 76).

Celle-ci a pour effet de transporter EFGH en EF'G'H' et de faire tourner toute droite telle que CG, perpendiculaire à la direction de la force T_{zx} d'un angle que nous nous proposons d'évaluer. On admet que la variation de volume produite par le système des forces T_{zx} est tout à fait insensible.

Évaluons d'abord l'angle que forment les diagonales de la face G'H'C'D' d'un cube (*fig.* 77 et 78), soumis à une traction

Fig. 77. Fig. 78.



T_z, normale à la face EFGH et numériquement égale à l'unité. Avant la traction, les diagonales étaient rectangulaires : elles forment maintenant un angle G'O'H' $= 90° - \varepsilon$ (*fig.* 78), c'est-à-dire que chacune d'elles forme avec la direction OP', parallèle à la traction, l'angle $45° - \frac{\varepsilon}{2}$, dont la tangente est déterminée par la relation

$$\text{tang}\left(45° - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1-\beta}{1+\alpha}.$$

Grâce à la petitesse des quantités α, β, $\frac{\varepsilon}{2}$, on peut développer les deux membres en ne conservant que les termes du premier degré en α, β, ε; on a ainsi d'une part

$$\text{tang}\left(45° - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1 - \text{tang}\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \text{tang}\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - 2\,\text{tang}\frac{\varepsilon}{2} + \ldots,$$

ou sensiblement $1 - \varepsilon$, d'autre part

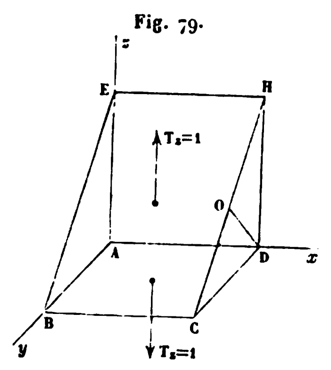
$$\frac{1-\beta}{1+\alpha} = 1 - (\alpha + \beta) + \ldots,$$

et par suite, au degré d'approximation convenu,

$$\varepsilon = \alpha + \beta = \alpha(1 + \mu).$$

Cet angle ε est précisément celui dont tournent l'un par rapport à l'autre les plans diagonaux EHCB, FGDA du cube soumis à la traction. Or on peut : 1° supposer la portion EFBCH du cube enlevée et la traction appliquée directement sur le plan diagonal EBCH (*fig.* 79); 2° remplacer en chaque point du plan la traction $T_z = 1$ parallèle à Az par ses composantes parallèle et normale au plan. La dernière, écartant les plans parallèles à EBCH les uns des autres, produit la variation de volume résultant de la traction; la première tend à faire glisser ces plans les uns sur les autres et produit le déplacement relatif ε de CH et de sa perpendiculaire DO. Or nous avons supposé la traction T_z, normale à la face du cube, égale à 1 par unité de surface; sa composante suivant CH est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par unité de surface de EFGH (*fig.* 77) ou $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ par unité de surface du plan diagonal EBCH. Ainsi, une force tangentielle égale à $\frac{1}{2}$ produit un déplacement angulaire ε des normales au plan égal à $\alpha(1 + \mu)$: une force égale à 1 produirait un déplacement $2\alpha(1 + \mu)$.

Fig. 79.

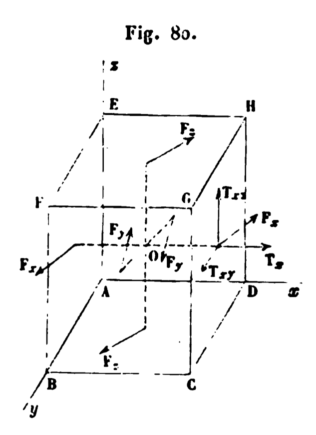


Revenons maintenant à la *fig.* 75 : la force tangentielle T_{zx} produira, d'après ce que nous venons d'établir, un déplacement des normales égal à $2\alpha(1 + \mu)$ par unité de force, c'est-à-dire un déplacement résultant χ

$$(12) \qquad \chi = 2\alpha(1 + \mu) T_{zx}.$$

ÉQUILIBRE D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE ÉLASTIQUE. — Soit un parallélépipède soumis à des forces quelconques, deux à deux égales, parallèles et de sens contraires, agissant sur chaque couple de faces du parallélépipède et dont la valeur est F_x, F_y, F_z par unité de surface (*fig.* 80). Nous pouvons, en chaque point de

Fig. 80.



l'une des faces, décomposer la force qui lui est appliquée en trois composantes parallèles aux axes coordonnés, dont l'une sera normale, les autres tangentielles à la face.

Les composantes normales T_x, T_y, T_z se font équilibre sur les faces opposées et produisent les dilatations proportionnelles

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \alpha[T_x - \mu(T_y + T_z)],\\ b &= \alpha[T_y - \mu(T_z + T_x)],\\ c &= \alpha[T_z - \mu(T_x + T_y)]\end{aligned}\right.$$

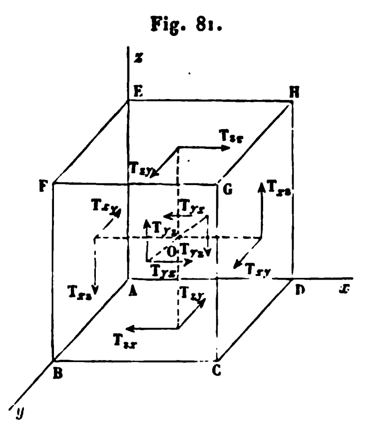
et la variation de volume proportionnelle

$$(8)\qquad \omega = \alpha(1 - 2\mu)(T_x + T_y + T_z).$$

Quant aux composantes tangentielles, nous les désignerons par la lettre T accompagnée de deux indices, dont le premier servira à désigner la face, le second la direction de la composante. Ainsi, T_{xy} désignera la composante de F_x parallèle à Ay, T_{xz} la composante parallèle à Az. Ces forces sont, comme F_x, rapportées à l'unité de surface.

Les composantes T_{xy}, appliquées tangentiellement en sens contraires sur les faces HGCD, EABF (*fig.* 81), forment un couple qui tend à faire tourner le parallélépipède autour de Az; en désignant toujours par A, B, C ses arêtes, la force du couple est $BC.T_{xy}$, et son moment $BC.T_{xy}A$ ou $ABC.T_{xy}$. De même, le couple de moment $ABC.T_{xz}$ tend à faire tourner le parallélépipède autour de Ay, et les couples produits par les autres composantes exercent des effets analogues. Le parallélépipède est en équilibre; il faut donc que les moments des couples résultants autour de Ax, Ay, Az soient nuls, c'est-à-dire que

Fig. 81.



$$ABC(T_{xy} - T_{yx}) = 0,$$
$$ABC(T_{yz} - T_{zy}) = 0,$$
$$ABC(T_{zx} - T_{xz}) = 0.$$

On a donc

$$(13) \quad \begin{cases} T_{xy} = T_{yx}, \\ T_{yz} = T_{zy}, \\ T_{zx} = T_{xz}. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les déformations produites par ces forces tangentielles; elles inclinent les arêtes du parallélépipède d'angles φ, χ, ψ, qui, d'après la relation (12), sont respectivement

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi = 2\alpha(1+\mu)T_{yz}, \\ \chi = 2\alpha(1+\mu)T_{zx}, \\ \psi = 2\alpha(1+\mu)T_{xy}. \end{cases}$$

Les équations (7) et (14) fournissent les trois déplacements linéaires et les trois déplacements angulaires quand on connaît

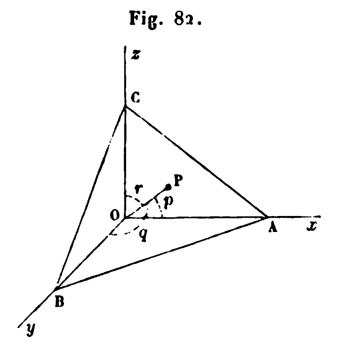
les six tensions distinctes T_x, T_y, T_z, T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}; résolues par rapport aux tensions, elles donnent celles-ci quand les déplacements sont connus. On obtient

$$(15)\quad \begin{cases} T_x = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\left(a + \dfrac{\mu\omega}{1-2\mu}\right), \\ T_y = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\left(b + \dfrac{\mu\omega}{1-2\mu}\right), \\ T_z = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\left(c + \dfrac{\mu\omega}{1-2\mu}\right), \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} T_{yz} = \dfrac{\varphi}{2\alpha(1+\mu)}, \\ T_{zx} = \dfrac{\chi}{2\alpha(1+\mu)}, \\ T_{xy} = \dfrac{\psi}{2\alpha(1+\mu)}. \end{cases}$$

ÉQUILIBRE D'UN TÉTRAÈDRE DONT TROIS FACES SONT RECTANGULAIRES. — Considérons un tétraèdre OABC dont les trois faces qui se rencontrent en O sont rectangulaires; soient toujours T_x,

Fig. 82.



T_y, T_z, T_{zx}, T_{xy}, T_{yz} les forces normales et tangentielles agissant sur l'unité de surface des faces rectangulaires, et désignons par P la force appliquée à l'unité de surface de la base ABC. Pour que le tétraèdre soit en équilibre, il faut que les composantes de la force P fassent équilibre aux forces appliquées aux trois autres faces.

J'appelle A, B, C les longueurs des arêtes rectangulaires, p, q, r les cosinus des angles que la normale OP à la base fait avec les axes (*fig.* 82), S la surface ABC. Projetons la base successivement sur les plans Oxy, Oyz, Ozx; nous aurons

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} Sr &= \frac{AB}{2},\\ Sp &= \frac{BC}{2},\\ Sq &= \frac{CA}{2}. \end{aligned}\right.$$

Soient enfin h, k, l les angles que la force P fait avec les axes. Exprimons que l'ensemble des forces agissant parallèlement à Ox donne une résultante nulle,

$$PhS = \frac{BC}{2}T_x + \frac{CA}{2}T_{yx} + \frac{AB}{2}T_{zx}$$

ou, en remplaçant $\frac{BC}{2}$, $\frac{AC}{2}$, $\frac{AB}{2}$ au moyen des équations (17) et supprimant le facteur S,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} Ph &= pT_x + qT_{yx} + rT_{zx},\\ Pk &= pT_{xy} + qT_y + rT_{zy},\\ Pl &= pT_{xz} + qT_{yz} + rT_z. \end{aligned}\right.$$

Les équations (18) expriment les conditions d'équilibre.

Équilibre d'un corps élastique de forme quelconque. — Nous admettrons qu'un corps élastique n'est soumis, outre les actions extérieures, qu'à des forces proportionnelles aux masses et variant d'une manière continue en grandeur et en direction avec les coordonnées du point auquel elles s'appliquent. Cela posé, nous décomposerons le corps en éléments de volume par trois systèmes de plans parallèles aux plans coordonnés et infiniment voisins; ces éléments seront des parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz, sauf au voisinage immédiat de la surface où l'on rencontrera des tétraèdres ayant pour arêtes dx, dy, dz et dont la base sera située sur la surface du corps.

Les faces de chaque parallélépipède sont soumises à des

forces T_x, T_y, T_z, T_{xy}, T_{yz}, T_{zx} normales et tangentielles, mais qui varient d'une manière continue avec les coordonnées, de telle sorte que sur une face de l'un de ces parallélépipèdes agissent par unité de surface les forces

$$T_x,\quad T_{xy},\quad T_{xz},$$

et sur la face opposée aussi par unité de surface les forces

$$T_x + \frac{dT_x}{dx}dx,\quad T_{xy} + \frac{dT_{xy}}{dx}dx,\quad T_{xz} + \frac{dT_{xz}}{dx}dx.$$

Soient X, Y, Z les composantes, rapportées à l'unité de volume, de la force appliquée au point (x, y, z), et supposons, pour plus de simplicité, que le corps est homogène. Sur le parallélépipède considéré agissent parallèlement à l'axe des x les forces

$$X\,dx\,dy\,dz,$$

$$-dy\,dz\frac{dT_x}{dx}dx,\quad -dz\,dx\frac{dT_{yx}}{dy}dy,\quad -dx\,dy\frac{dT_{zx}}{dz}dz,$$

dont la somme doit être nulle.

Les conditions de l'équilibre sont donc

$$(19)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dT_x}{dx} + \dfrac{dT_{yx}}{dy} + \dfrac{dT_{zx}}{dz}, \\ Y = \dfrac{dT_{xy}}{dx} + \dfrac{dT_y}{dy} + \dfrac{dT_{zy}}{dz}, \\ Z = \dfrac{dT_{xz}}{dx} + \dfrac{dT_{yz}}{dy} + \dfrac{dT_z}{dz}, \end{cases}$$

en chaque point de l'intérieur du corps. Il reste à exprimer que les tétraèdres limités à la surface sont aussi en équilibre, ce qui fournit les conditions

$$(20)\quad \begin{cases} Ph = pT_x + qT_{yx} + rT_{zx}, \\ Pk = pT_{xy} + qT_y + rT_{zy}, \\ Pl = pT_{xz} + qT_{yz} + rT_z \end{cases}$$

en chaque point de la surface; h, k, l, p, q, r sont les cosinus des angles que la traction extérieure P et la normale à la sur-

[redacted]

face font avec les axes. Si l'équation de la surface est

(21) $$f(x, y, z) = 0,$$

on a

(22) $$\frac{\frac{df}{dx}}{p} = \frac{\frac{df}{dy}}{q} = \frac{\frac{df}{dz}}{r}.$$

Quand le corps n'est soumis qu'à des actions extérieures, il faut faire $X = Y = Z = 0$ dans les équations (19). Dans cette hypothèse particulière, il y a plusieurs cas intéressants à examiner :

1° Imaginons que l'on ait en chaque point

(23) $$T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = 0.$$

Les équations (19) se réduisent à

$$\frac{dT_x}{dx} = 0, \quad \frac{dT_y}{dy} = 0, \quad \frac{dT_z}{dz} = 0.$$

La traction exercée parallèlement à l'un des axes demeure constante tout le long d'une droite quelconque parallèle à cet axe. De plus, les équations (20) donnent

$$\begin{aligned} Ph &= pT_x, \\ Pk &= qT_y, \\ Pl &= rT_z, \end{aligned}$$

et, comme $h^2 + k^2 + l^2 = 1$,

(24) $$P = \sqrt{p^2 T_x^2 + q^2 T_y^2 + r^2 T_z^2}.$$

En chaque point de la surface du corps, cette pression fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

(25) $$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{pT_x}{\sqrt{p^2 T_x^2 + q^2 T_y^2 + r^2 T_z^2}}, \\ k &= \frac{qT_x}{\sqrt{p^2 T_x^2 + q^2 T_y^2 + r^2 T_z^2}}, \\ l &= \frac{rT_x}{\sqrt{p^2 T_x^2 + q^2 T_y^2 + r^2 T_z^2}}. \end{aligned}\right.$$

En particulier, si

(26) $$T_x = T_y = T_z = \text{const.}$$

on a

(27) $$\frac{h}{p} = \frac{k}{q} = \frac{l}{r} = \frac{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = 1,$$

et, par suite, la force $P = T_x = T_y = T_z$ est constante en grandeur en tous les points de la surface. L'équation (27) montre d'ailleurs qu'elle est partout normale. Dans le cas où les tractions sont négatives, c'est-à-dire se changent en compressions, les équations (26) et (27) expriment que la compression est uniforme, telle qu'on peut l'exercer, par exemple, en immergeant le corps au milieu d'un liquide que l'on comprime. La diminution proportionnelle de volume, rapportée à l'unité de pression, est donnée par la formule (9)

$$k = 3\alpha(1 - 2\mu).$$

C'est la valeur trouvée précédemment pour le coefficient de compressibilité cubique.

2° Supposons

(28) $$\begin{cases} T_x = T_y = T_z = 0, \\ T_{xy} = T_{yz} = 0. \end{cases}$$

d'où

$$a = b, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \omega = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$
$$\chi = 2\alpha(1 + \mu)T_{zx}.$$

Il n'y a ni allongement ni changement de volume, et la déformation produite ne modifie pas la direction des droites parallèles à Ox et à Oy.

Les équations (19) donnent immédiatement

$$\frac{dT_{zx}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dT_{zx}}{dx} = 0.$$

c'est-à-dire que T_{zx} conserve une valeur constante en tous les points d'un même plan perpendiculaire à Oy. D'autre part,

les équations (20) deviennent

$$\begin{aligned} Ph &= rT_{zx}, \\ Pk &= 0, \\ Pl &= pT_{zx}; \end{aligned}$$

on en tire

(29)
$$\begin{cases} k = 0, \\ \dfrac{r}{p} = \dfrac{h}{l}, \quad P = \dfrac{r}{h} T_{zx}. \end{cases}$$

La force P est donc partout perpendiculaire à Oy.

Supposons en particulier que le corps soit un parallélépipède ABCDEF (*fig.* 76) ayant ses arêtes parallèles aux axes. Sur les faces perpendiculaires à Ox, on a $p = 1$, $z = 0$; il en résulte $h = 0$, $l = 1$, la force P est égale à T_{zx} et parallèle à Oz; sur les faces perpendiculaires à Oz on a de même $P = T_{zx}$, et cette force est dirigée parallèlement à Ox : elle est nulle sur les faces perpendiculaires à Oy.

DÉFORMATION D'UNE SPHÈRE CREUSE SOUMISE A UNE COMPRESSION UNIFORME. — Comme exemple de l'application des formules générales de l'élasticité, nous allons étudier la déformation d'une sphère creuse, de rayons intérieur R_0 et extérieur R, soumise à des compressions uniformes, mais affectant des valeurs différentes P_0 et P à ses deux surfaces externe et interne. Dans ce cas, les six coefficients T_x, T_y, T_z, T_{xy}, T_{xz}, T_{yz} sont, en général, différents de zéro. Dirigeons l'axe des x suivant un rayon OR de la sphère, et prenons la direction OR comme positive. Les compressions devront être considérées comme des tractions négatives; nous aurons alors aux deux surfaces $T_x = -P_0$, $T_x = -P$, et, par suite, $\dfrac{dT_x}{dx}$ n'est pas nul à l'intérieur de la couche sphérique. D'autre part, la somme

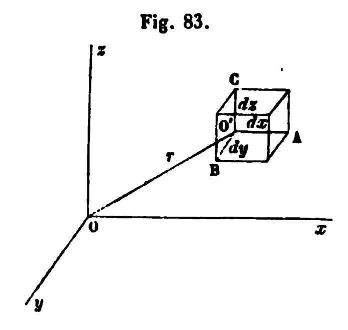
$$\frac{dT_{xy}}{dy} + \frac{dT_{zx}}{dz} = -\frac{dT_x}{dx},$$

d'après la première équation (19), et par suite T_{xy}, T_{xz} varient avec les coordonnées du point considéré, etc. Nous nous proposons de trouver l'expression générale des six coefficients.

CALCUL DES TENSIONS. — A cet effet, nous évaluerons d'abord les déplacements linéaires et angulaires $a, b, c, \varphi, \chi, \psi$ et la variation proportionnelle du volume ω (formules 7, 8 et 14). Pour y parvenir, remarquons que, par raison de symétrie, toute surface sphérique de rayon r ayant son centre au centre O de la sphère creuse conserve sa forme, et que son rayon éprouve seul une variation proportionnelle ρ, que nous prendrons comme inconnue auxiliaire.

En un point O′ de la sphère (*fig.* 83), dont les coordonnées

Fig. 83.



sont x, y, z, formons un parallélépipède élémentaire ayant pour arêtes dx, dy, dz. Par suite de la déformation, la droite $OO' = r$ devient $r(1+\rho)$, et les coordonnées du point O′ respectivement

$$x(1+\rho),\quad y(1+\rho),\quad z(1+\rho);$$

celles du sommet A deviennent

$$(x+dx)\left(1+\rho+\frac{d\rho}{dx}dx\right),$$

$$y\left(1+\rho+\frac{d\rho}{dx}dx\right),$$

$$z\left(1+\rho+\frac{d\rho}{dx}dx\right);$$

mais l'on a identiquement

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dr}\frac{dr}{dx},$$

[redacted]

plus

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r};$$

coordonnées de A sont donc

$$(x+dx)\left(1+\rho+\frac{x}{r}\frac{d\rho}{dr}dx\right),$$

$$y\left(1+\rho+\frac{x}{r}\frac{d\rho}{dr}dx\right),$$

$$z\left(1+\rho+\frac{x}{r}\frac{d\rho}{dr}dx\right),$$

à des infiniment petits près d'ordre supérieur,

$$x(1+\rho)+\left(1+\rho+\frac{x^2}{r}\frac{d\rho}{dr}\right)dx,$$

$$y(1+\rho)+\frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}dx,$$

$$z(1+\rho)+\frac{xz}{r}\frac{d\rho}{dr}dx.$$

longueur de la ligne O'A est

$$dx\sqrt{\left(1+\rho+\frac{x^2}{r}\frac{d\rho}{dr}\right)^2+\frac{x^2y^2}{r^2}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2+\frac{x^2z^2}{r^2}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2}.$$

s il faut considérer que, ρ étant toujours très-petit, $\frac{d\rho}{dr}$ est si très-petit, et, en négligeant les quantités de l'ordre $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2$, cette longueur se réduit à

$$dx\left(1+\rho+\frac{x^2}{r}\frac{d\rho}{dr}\right);$$

on a de même, pour les arêtes OB et OC,

$$dy\left(1+\rho+\frac{y^2}{r}\frac{d\rho}{dr}\right),$$
$$dz\left(1+\rho+\frac{z^2}{r}\frac{d\rho}{dr}\right).$$

Les allongements, rapportés à l'unité de longueur, sont

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \rho+\frac{x^2}{r}\frac{d\rho}{dr},\\ b &= \rho+\frac{y^2}{r}\frac{d\rho}{dr},\\ c &= \rho+\frac{z^2}{r}\frac{d\rho}{dr}.\end{aligned}\right.$$

Par suite, la variation proportionnelle du volume est

$$(31)\qquad \omega = a+b+c = 3\rho + r\frac{d\rho}{dr}.$$

Nous pouvons aussi déterminer les rotations φ, χ, ψ d arêtes du cube. Il suffit de remarquer que les cosinus d angles que ces arêtes font avec les axes après la déformatio sont sensiblement égaux à

$$\begin{array}{cccll} 1, & \frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}, & \frac{xz}{r}\frac{d\rho}{dr} & \text{pour l'arête O'A,} \\ \frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}, & 1, & \frac{zy}{r}\frac{d\rho}{dr} & \text{» O'B,} \\ \frac{xz}{r}\frac{d\rho}{dr}, & \frac{yz}{r}\frac{d\rho}{dr}, & 1, & \text{» O'C.} \end{array}$$

Or, les arêtes O'B et O'C font entre elles l'angle $90°-\varphi$, d le cosinus est

$$\cos(90°-\varphi) = \frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}\cdot\frac{xz}{r}\frac{d\rho}{dr} + 1\cdot\frac{yz}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{yz}{r}\frac{d\rho}{dr}\cdot 1,$$

ou, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{2yz}{r}\frac{d\rho}{dr},$$

$$\varphi = \frac{2yz}{r}\frac{d\rho}{dr};$$

on trouve de même χ et ψ :

$$(32)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{2yz}{r}\dfrac{d\rho}{dr}, \\ \chi = \dfrac{2zx}{r}\dfrac{d\rho}{dr}, \\ \psi = \dfrac{2xy}{r}\dfrac{d\rho}{dr}. \end{cases}$$

Nous possédons maintenant les expressions (30), (31) et (32) de a, b, c, ω, φ, χ, ψ en fonction d'une seule inconnue ρ et de sa dérivée par rapport à r. Les relations (15) et (16) nous permettent donc d'obtenir les tensions en fonction de la même inconnue. Elles donnent

$$(33)\quad \begin{cases} T_x = \dfrac{1}{\alpha(1-2\mu)}\left[\rho + \dfrac{(1-2\mu)x^2 + \mu r^2}{1+\mu}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\rho}{dr}\right], \\ T_y = \dfrac{1}{\alpha(1-2\mu)}\left[\rho + \dfrac{(1-2\mu)y^2 + \mu r^2}{1+\mu}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\rho}{dr}\right], \\ T_z = \dfrac{1}{\alpha(1-2\mu)}\left[\rho + \dfrac{(1-2\mu)z^2 + \mu r^2}{1+\mu}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\rho}{dr}\right], \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} T_{yz} = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\dfrac{yz}{r}\dfrac{d\rho}{dr}, \\ T_{zx} = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\dfrac{zx}{r}\dfrac{d\rho}{dr}, \\ T_{xy} = \dfrac{1}{\alpha(1+\mu)}\dfrac{xy}{r}\dfrac{d\rho}{dr}. \end{cases}$$

CALCUL DES VARIATIONS DE VOLUME. — Supposons maintenant l'axe des x dirigé suivant le rayon OO′, alors, pour $r = R$ et

$r = R_0$, on doit avoir respectivement

$$T_x = -P,$$
$$T_x = -P_0,$$

c'est-à-dire, d'après la première équation (33),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} -P &= \frac{1}{\alpha}\,\frac{(1+\mu)\rho + (1-\mu)R\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R}{(1+\mu)(1-2\mu)},\\ -P_0 &= \frac{1}{\alpha}\,\frac{(1+\mu)\rho + (1-\mu)R_0\left(\frac{d\rho}{dr}\right)}{(1+\mu)(1-2\mu)},\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{R_0}$, $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R$ désignent ce que devient $\frac{d\rho}{dr}$ pour $r = R$ et $r = R_0$.

Il ne reste qu'à déterminer l'inconnue auxiliaire ρ; à cet effet nous emploierons l'une quelconque des équations (19), la première par exemple, dans laquelle nous ferons $X = Y = Z = 0$. Il faut calculer d'abord les dérivées

$$\frac{dT_x}{dx},\quad \frac{dT_{xy}}{dy},\quad \frac{dT_{zx}}{dz}$$

en fonction de ρ et de ses dérivées par rapport à r, ce que l'on fait aisément au moyen des équations (33) et (34), et porter les valeurs obtenues dans la première équation (19). Toutes réductions faites, on obtient ainsi

$$(36)\qquad \frac{4}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{d^2\rho}{dr^2} = 0,$$

équation différentielle du second ordre qui détermine ρ. En multipliant par r^4 son premier membre, on voit qu'on peut la ramener au premier ordre :

$$4r^3\frac{d\rho}{dr} + r^4\frac{d^2\rho}{dr^2} = \frac{d\left(r^4\frac{d\rho}{dr}\right)}{dr} = 0,$$

$$(37)\qquad r^4\frac{d\rho}{dr} = k;$$

k est une constante introduite par l'intégration. Intégrant encore, on a enfin

$$(38) \qquad \rho = -\frac{k}{3r^3} + k';$$

k' est une nouvelle constante.

Les constantes k et k' se déterminent par les équations (35) en y remplaçant ρ et $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R$, $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{R_0}$ par leurs expressions tirées de (37) et (38), et l'on a définitivement

$$(38\ bis) \qquad \rho = \alpha \frac{(P_0 R_0^3 - PR^3)(1 - 2\mu) + \frac{1}{2}(P_0 - P)(1 + \mu)\frac{R^3 R_0^3}{r^3}}{R^3 - R_0^3}.$$

Cette valeur de ρ permet d'obtenir les expressions définitives de toutes les inconnues.

En particulier l'augmentation proportionnelle de volume ω est, d'après (31),

$$(39) \qquad \omega = 3\rho + r\frac{d\rho}{dr} = 3k' = 3\alpha\frac{P_0 R_0^3 - PR^3}{R^3 - R_0^3}(1 - 2\mu);$$

elle est constante dans tout l'intérieur de la masse.

Un autre élément qu'il nous importe de déterminer, c'est la variation de la capacité intérieure ou du volume extérieur de la sphère. La surface sphérique, dont le rayon primitif était r, est devenue $r(1 + \rho)$; elle embrassait une capacité $v = \frac{4}{3}\varpi r^3$, qui est devenue, à des infiniment petits près d'ordre supérieur,

$$v + \delta v = \tfrac{4}{3}\varpi r^3(1 + 3\rho).$$

L'augmentation proportionnelle de volume est donc

$$\frac{\delta v}{v} = 3\rho.$$

Calculons, en particulier, les variations du volume intérieur dans les trois cas suivants :

$$(40) \qquad \begin{cases} P_0 = 0, & \delta V_0 = -\frac{9}{2}\alpha(1 - \mu)\frac{R^3}{R^3 - R_0^3}PV_0, \\ P = P_0, & \delta V_0 = -3\alpha(1 - 2\mu)PV_0, \\ P = 0, & \delta V_0 = 3\alpha\frac{(1 - 2\mu)R_0^3 + \frac{1}{2}(1 + \mu)R^3}{R^3 - R_0^3}P_0 V_0. \end{cases}$$

on a de même, pour les arêtes OB et OC,

$$dy\left(1+\rho+\frac{y^2}{r}\ d\right.$$

$$dz\left(1+\rho+\right. \qquad (33),$$

Les allongements, rapporté

$$\frac{(1-\mu)R\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

(30) $$\frac{\mu)\rho+(1-\mu)R_0\left(\frac{d\rho}{dr}\right)}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{R_0}$, $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R$ désignent ce que devient $\frac{d\rho}{dr}$ pour $r=R_0$.

Par su reste qu'à déterminer l'inconnue auxiliaire ρ; à cet effet emploierons l'une quelconque des équations (19), la première par exemple, dans laquelle nous ferons $X=Y=Z=0$.

(31) Il faut calculer d'abord les dérivées

$$\frac{dT_x}{dx},\quad \frac{dT_{xy}}{dy},\quad \frac{dT_{zx}}{dz}$$

en fonction de ρ et de ses dérivées par rapport à r, ce que l'on fait aisément au moyen des équations (33) et (34), et porter les valeurs obtenues dans la première équation (19). Toutes réductions faites, on obtient ainsi

(36) $$\frac{4}{r}\frac{d\rho}{dr}+\frac{d^2\rho}{dr^2}=0,$$

équation différentielle du second ordre qui détermine ρ. En multipliant par r^4 son premier membre, on voit qu'on peut la ramener au premier ordre :

$$4r^3\frac{d\rho}{dr}+r^4\frac{d^2\rho}{dr^2}=d\,\frac{\left(r^4\frac{d\rho}{dr}\right)}{dr}=0,$$

(37) $$r^4\frac{d\rho}{dr}=k;$$

D'autre part, les angles φ, χ, ψ ont pour valeurs

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi = 0, \\ &\chi = 0, \\ &\psi = 2\frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} T_x &= \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\rho + \frac{(1-2\mu)x^2 + \mu r^2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \mu k''\right], \\ T_y &= \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\rho + \frac{(1-2\mu)y^2 + \mu r^2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \mu k''\right], \\ T_z &= \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}\left[2\mu\rho + \mu r\frac{d\rho}{dr} + (1-\mu)k''\right], \end{aligned} \right.$$

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} T_{yz} &= 0, \\ T_{zx} &= 0, \\ T_{xy} &= \frac{xy}{r}\frac{d\rho}{dr}\frac{1}{\alpha(1+\mu)}, \end{aligned} \right.$$

et par la première équation (19),

$$\frac{3}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{d^2\rho}{dr^2} = 0,$$

$$\frac{d\left(\dfrac{r^3\,d\rho}{dr}\right)}{dr} = 0.$$

En désignant par k et k' les deux constantes introduites par l'intégration, on a enfin

$$(15)\quad \rho = -\frac{k}{2r^2} + k'.$$

Pour déterminer k et k', ainsi que la dilatation longitudinale k'', on exprime qu'il y a équilibre à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre et sur ses bases. La première équation (19) donne ainsi

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} -P &= \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}\left[k' + \mu k'' + \frac{1-2\mu}{2R^2}k\right], \\ -P_0 &= \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}\left[k' + \mu k'' + \frac{1-2\mu}{2R_0^2}k\right]. \end{aligned} \right.$$

Pour exprimer l'équilibre des bases planes, remarquons d'abord que la valeur de T_z est indépendante de r. On trouve, en substituant à ρ et $\frac{d\rho}{dr}$ leurs valeurs,

$$(47) \quad T_z = \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}[2\mu k' + (1-\mu)k''].$$

Or, la pression P s'exerce à l'extérieur sur une surface πR^2, et la pression P_0 à l'intérieur sur la surface πR_0^2. Leur différence fait équilibre à la tension T_z sur la surface $\pi R^2 - \pi R_0^2$:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(\pi R^2 P - \pi R_0^2 P_0) \\ = (\pi R^2 - \pi R_0^2) \frac{1}{\alpha(1+\mu)(1-2\mu)}[2\mu k' + (1-\mu)k''] . \end{array} \right.$$

En résolvant les équations (46) et (48), on trouve

$$k = -\frac{R^2 R_0^2}{R_0^2 - R^2} 2\alpha(1+\mu)(P - P_0),$$

$$k' = k'' = \frac{PR^2 - P_0 R_0^2}{R_0^2 - R^2}\alpha(1-2\mu),$$

par suite

$$(49) \quad \rho = \alpha \frac{(PR^2 - P_0 R_0^2)(1-2\mu) + (1+\mu)(P-P_0)\frac{R^2 R_0^2}{r^2}}{R_0^2 - R^2},$$

$$(50) \quad \omega = 3k' = 3\alpha(1-2\mu)\frac{PR^2 - P_0 R_0^2}{R_0^2 - R^2}.$$

La diminution proportionnelle de volume est constante dans toute la masse.

Pour déterminer la variation du volume extérieur ou intérieur, on remarque que le cylindre, dont le rayon était r et la hauteur H, a pour rayon $r(1+\rho)$, pour hauteur $H(1+k'')$, de sorte que le volume, qui était $v = \pi r^2 H$, est devenu

$$v + \delta v = \pi r^2 (1+\rho)^2 (1+k'') H$$

ou, au degré d'approximation de tous ces calculs,

$$\pi r^2 (1 + 2\rho + k'') H.$$

On a donc, pour la variation proportionnelle $\frac{\delta v}{v}$ du volume du cylindre,

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta v}{v} = 2\rho + k'' = -\dfrac{k}{r^2} + 2k' + k'' \\ \quad = \alpha \dfrac{3(1-2\mu)(PR^2 - P_0R_0^2) + 2(1+\mu)(P-P_0)\dfrac{R^2R_0^2}{r^2}}{R_0^2 - R^2}. \end{cases}$$

En particulier, la capacité intérieure s'accroît

$$(52)\quad \begin{cases} \text{pour } P_0 = 0 \quad \text{de } \delta V_0 = -\alpha \dfrac{(5-4\mu)PR^2}{R^2 - R_0^2} V_0, \\ P = P_0, \quad \delta V_0 = -3\alpha(1-2\mu)PV_0, \\ P = 0, \quad \delta V_0 = \alpha \dfrac{3(1-2\mu)R_0^2 + 2(1+\mu)R^2}{R^2 - R_0^2} P_0 V_0, \end{cases}$$

ou, faisant $\mu = \frac{1}{3}$,

$$(52\ bis)\quad \begin{cases} \text{pour } P_0 = 0, \quad \delta V_0 = -\dfrac{11}{3}\alpha \dfrac{R^2}{R^2 - R_0^2} PV_0, \\ P = P_0, \quad \delta V_0 = -\alpha PV_0, \\ P = 0, \quad \delta V_0 = \alpha \dfrac{R_0^2 + \frac{8}{3}R^2}{R^2 - R_0^2} P_0 V_0. \end{cases}$$

Si le cylindre est terminé, non par des bases planes mais par des calottes hémisphériques de même épaisseur $R - R_0$, on peut admettre que la variation de volume du système est très-sensiblement la somme des variations qu'éprouveraient séparément le cylindre terminé par des bases planes et la sphère formée par la réunion des deux hémisphères. On obtient ainsi les formules qui doivent servir à calculer celles des expériences de Regnault qui ont été réalisées avec un piézomètre cylindrique. On a

$$(53)\quad \begin{cases} P_0 = 0, \quad \delta U_0 = -\alpha P\left(\dfrac{11}{3}\dfrac{R^2}{R^2 - R_0^2} V_0 + 3\dfrac{R^3}{R^3 - R_0^3} V'_0\right), \\ P = P', \quad \delta U_0 = -\alpha P(V_0 + V'_0), \\ P = 0, \quad \delta U_0 = \alpha P_0\left(\dfrac{R_0^2 + \frac{8}{3}R^2}{R^2 - R_0^2} V_0 + \dfrac{R_0^3 + 2R^3}{R^3 - R_0^3} V'_0\right). \end{cases}$$

Dans ces formules, δU_0 représente la variation proportionnelle du volume intérieur total, V_0 le volume intérieur du cylindre, V'_0 celui des deux hémisphères.

Détermination expérimentale du coefficient de compressibilité cubique. — Pour déterminer le coefficient de compressibilité cubique d'un solide, on le travaille en forme de piézomètre sphérique ou cylindrique ; on le munit d'une tige calibrée, on détermine son volume et on y introduit un liquide ; on exerce ensuite sur le piézomètre une compression extérieure, et la diminution correspondante de sa capacité intérieure est donnée par l'ascension du liquide dans la tige. Le coefficient de compressibilité se détermine à l'aide de la première formule (40 *bis*) dans le cas de la sphère, de la première formule (53) pour le cylindre à bases hémisphériques.

Les mesures suivantes ont été exécutées par Regnault à l'occasion de ses recherches sur la compressibilité de l'eau et du mercure.

Pour une sphère de cuivre rouge de rayons $R = 29^{mm},9$, $R_0 = 29^{mm},105$ et dont le volume intérieur était de $109^{cc},11$, Regnault a trouvé

PRESSION P en atmosphères.	$\frac{\delta V_0}{V_0}$ pour $P_0 = 0$.	$\frac{9}{2}\alpha(1-\mu)$.	α $(\mu = \frac{1}{3})$.
2,8017.....	0,000112556	0,000003123	0,000001041
4,3687.....	0,000177533	0,000003156	0,000001052
5,6753.....	0,000233941	0,000003140	0,000001047
6,4502.....	0,000265950	0,000003224	0,000001075
7,8302.....	0,000329544	0,000003273	0,000001091

La moyenne des trois premiers nombres est

$$\alpha = 0,000001047$$

par atmosphère, ou pour 1^{kg} par centimètre carré

$$\alpha = 0,000001013$$

et pour 1^{kg} par millimètre carré

$$\alpha = 0,0001013.$$

Or le nombre α exprimé au moyen de ces unités doit être l'inverse du coefficient d'élasticité. Wertheim a trouvé par des expériences de traction, pour le cuivre rouge, $Q = 10519$, tandis que $\frac{1}{\alpha}$ est, d'après les expériences de Regnault, $\frac{1}{\alpha} = 9871,7$, valeur grossièrement égale à la précédente (¹).

On peut aussi, au lieu d'admettre *a priori* la valeur de $\mu = \frac{1}{3}$, se servir des nombres obtenus par Wertheim et Regnault pour déterminer μ. On trouve ainsi pour le cuivre rouge

$$\mu = 0,2897.$$

Des expériences analogues réalisées par Regnault sur une sphère en laiton ($R = 29^{mm},45$, $R_0 = 28^{mm},73$) donnent

$$\alpha = 0,00010856,$$

ou, si l'on admet la valeur de $Q = 9271$ trouvée par Wertheim pour le laiton,

$$\mu = 0,3292.$$

Enfin Regnault a opéré avec un piézomètre de verre pour lequel on avait

$$R = 12^{mm},128, \quad R_0 = 10^{mm},728, \quad H = 208^{mm},7.$$

(¹) Les valeurs de la compressibilité cubique données par Wertheim (*Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XIX) d'après les expériences de Regnault sont les $\frac{2}{3}$ de celles que nous indiquons ici. Cela tient à ce que Wertheim admet une définition des coefficients de compressibilité linéaire et cubique différente de celle qu'on adopte généralement. Il appelle ainsi le coefficient $\alpha(1+\mu)$, dont l'inverse multiplie les allongements a, b, c dans les formules (15). μ étant égal à $\frac{1}{3}$, cette quantité est bien $\frac{4}{3}\alpha$.

Quant à M. Regnault, il avait calculé ses expériences à l'aide de formules obtenues par Lamé en supposant le coefficient μ égal à $\frac{1}{4}$, conformément à l'hypothèse de Poisson, et trouvé ainsi des nombres voisins de ceux que Wertheim y a substitués; comme ces derniers, ils sont donc sensiblement les $\frac{2}{3}$ du coefficient réel de compressibilité.

Le calcul de ces expériences donne

$$\alpha = 0,00016628,$$

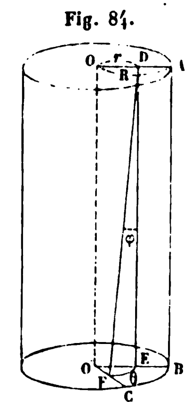
ou, en admettant $Q = 6040$ d'après Wertheim,

$$\mu = 0,319.$$

Ces expériences ne permettent pas de décider rigoureusement si μ est égal à $\frac{1}{3}$ pour toutes les substances employées ou s'il a pour chacune une valeur particulière; les expériences de traction effectuées sur un échantillon déterminé ne peuvent en effet être considérées comme absolument comparables aux expériences de compression uniforme réalisées sur un autre échantillon, qui en général n'a pas subi un travail identique.

TORSION. — Considérons un cylindre circulaire droit OAB (*fig.* 84) formé d'une matière élastique, dont la base supérieure OA est fixe, la base inférieure OB soumise à un couple normal à l'axe. Nous pouvons décomposer le cylindre en tranches infiniment minces normales à l'axe. L'effet du couple sera de faire tourner chaque tranche par rapport à la précédente, de telle sorte que la forme circulaire et le rayon de la section demeurent invariables, ainsi que la longueur L de l'axe, mais que toute droite OB comprise dans la section normale s'y déplace d'un certain angle θ dans le sens où s'exerce la torsion.

Fig. 84.



Il résulte des conditions du problème que les dilatations proportionnelles a, b, c sont nulles ainsi que ω; de plus, deux droites rectangulaires quelconques comprises dans la section normale demeurant rectangulaires, l'un des angles φ, χ, ψ est nul. Prenons l'axe du cylindre pour axe des y, nous aurons

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \chi = 0,$$
$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad T_z = 0, \quad T_{xz} = 0,$$

et, d'après les équations (19),

$$\frac{dT_{xy}}{dy} = 0, \quad \frac{dT_{zy}}{dy} = 0,$$

qui expriment que les tensions T_{xy}, T_{yz} conservent une valeur invariable tout le long d'une droite quelconque parallèle à l'axe du cylindre.

Au lieu des deux quantités T_{xy}, T_{yz} nous pouvons, d'ailleurs, n'en conserver qu'une seule, en remarquant que, par raison de symétrie, la force déformatrice T est partout normale au rayon et conserve la même valeur en tout point situé à une même distance r de l'axe. On a, d'ailleurs,

$$T = \sqrt{T_{xy}^2 + T_{yz}^2};$$

mais, pour un point situé sur l'axe des x, on voit aisément que

$$T_{xy} = 0,$$
$$T_{yz} = \frac{\varphi}{2\alpha(1+\mu)}.$$

L'angle φ est facile à évaluer. Considérons un élément de la droite DE de longueur égale à dy; l'angle θ croît le long de cet élément d'une quantité $d\theta$, et l'on a

$$\varphi = \frac{r\,d\theta}{dy},$$

$$T = T_{yz} = \frac{r}{2\alpha(1+\mu)}\frac{d\theta}{dy},$$

mais, T étant indépendant de y, $\frac{d\theta}{dy}$ est constant et égal à $\frac{\theta}{L}$. On a donc définitivement

(54) $$T = \frac{r}{2\alpha(1+\mu)}\frac{\theta}{L}.$$

T croît proportionnellement à la distance r à l'axe.

Soit F le moment du couple total de torsion. La valeur de T exprimée par la formule (54) se rapporte à l'unité de surface. Sur une couronne de rayon r et d'épaisseur dr, la force exercée est

$$2\pi r\,dr.T$$

et son moment par rapport à l'axe est

$$2\pi r^2 dr . \mathrm{T} = \frac{2\pi r^3 \theta dr}{2\alpha(1+\mu)\mathrm{L}}.$$

Le moment du couple F est égal en valeur absolue à la somme de ces moments, c'est-à-dire que, en désignant par R le rayon du cylindre, on a

$$(55) \qquad \mathrm{F} = \frac{\pi\theta}{\alpha(1+\mu)\mathrm{L}} \int_0^{\mathrm{R}} r^3 dr = \frac{\pi\theta \mathrm{R}^4}{4\alpha(1+\mu)\mathrm{L}},$$

$$(56) \qquad \theta = \alpha(1+\mu)\frac{4\mathrm{LF}}{\pi \mathrm{R}^4}.$$

L'angle de torsion est donc proportionnel au moment du couple tordant, à la longueur du fil, à son coefficient de compressibilité α, et en raison inverse de la quatrième puissance du diamètre.

Le même raisonnement est applicable à un cylindre creux de rayon intérieur R_0 et extérieur R, et conduit à la formule

$$(57) \qquad \theta = \frac{4\alpha(1+\mu)\mathrm{LF}}{\pi(\mathrm{R}^4 - \mathrm{R}_0^4)}.$$

Il cesse d'être rigoureux pour un prisme de section quelconque. En désignant par A le moment d'inertie de l'unité de longueur du prisme par rapport à son axe, on admettait autrefois que l'on a encore, au moins d'une manière approximative,

$$(58) \qquad \theta = 2\alpha(1+\mu)\frac{\mathrm{LF}}{\mathrm{A}}.$$

L'angle θ est effectivement proportionnel au produit

$$2\alpha(1+\mu)\mathrm{LF},$$

mais la section est déformée d'après des lois complexes, et par suite θ n'est pas constant dans toute l'étendue d'une section perpendiculaire à l'axe. M. de Saint-Venant (¹), qui a traité la question d'une manière complète, a reconnu que dans bien des cas les résultats de la formule (58) sont grossièrement inexacts. Nous renverrons le lecteur au Mémoire original.

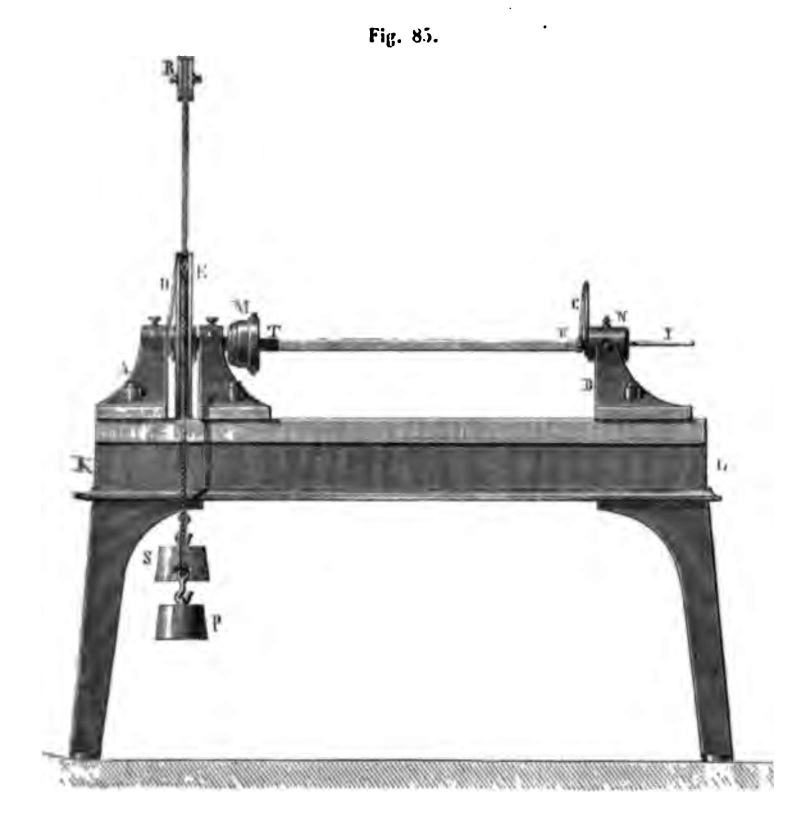
(¹) DE SAINT-VENANT, *Mémoires des Savants étrangers*, 1855.

[redacted]

Le coefficient $\frac{1}{2\alpha(1+\mu)}$ est souvent désigné sous le nom de *oefficient d'élasticité de torsion*; dans l'hypothèse de Wertheim $\left(\mu = \frac{1}{3}\right)$, il est les $\frac{3}{8}$ du coefficient ordinaire d'élasticité $\frac{1}{\alpha}$.

LOIS EXPÉRIMENTALES DE LA TORSION. — Pour étudier expérimentalement les lois de la torsion, on peut se servir de l'appa-

Fig. 85.



reil de Wertheim [1] (*fig.* 85); il se compose d'un banc de fonte très-lourd sur lequel sont disposées deux poupées analogues à

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. L, p. 395.

celles d'un tour. La première B peut être transportée le long du banc et fixée par des boulons dans toutes ses positions; elle sert à encastrer l'une des extrémités de la verge que l'on veut essayer. A cet effet, elle soutient une pièce percée où l'on enfonce la verge TU, que l'on serre par une vis de pression N.

Il est nécessaire que l'extrémité U de la verge soit fixe pendant la torsion, et l'on s'en assure en y plaçant une aiguille C, qui doit rester constamment en face d'un index immobile faisant partie de l'appareil.

L'autre bout T de la verge est saisi de la même manière dans un axe creux M, qui tourne entre des colliers horizontaux fixes. Cet axe porte une poulie E sur laquelle s'enroulent deux cordes. La première, placée en avant de l'appareil, en E, est tirée par le poids P; la deuxième, attachée de l'autre côté, se dirige en remontant vers la poulie R, la contourne et soutient un autre poids S égal au premier. Il est évident que ces deux poids concourent à produire un couple, à faire tourner la poulie E et à tordre la verge.

Pour mesurer la torsion produite, on a tracé sur l'une des faces de la poulie un cercle divisé et l'on a placé vis-à-vis une alidade immobile D; on lit la position du cercle avant l'action, on la lit de nouveau quand les poids fonctionnent, et la rotation mesurée est l'angle de torsion θ. Ce que nous voulons chercher, c'est le rapport de θ à l'action du poids $2P$ qui est appliqué au rayon r de la poulie, et dont le moment est $2Pr$: nous désignerons ce moment par F.

I. En faisant les expériences, on trouve une première loi, qui est la plus importante de toutes : c'est que, si les moments du couple varient suivant les nombres 1, 2, 3, 4, les angles de torsion sont ω, 2ω, 3ω, 4ω, c'est-à-dire que l'angle de torsion est proportionnel au couple de torsion.

II. On soumet à l'action d'un même couple plusieurs morceaux d'une même tige dont les longueurs sont 1, 2, 3, 4; on trouve des angles de torsion θ, 2θ, 3θ, ... Donc les angles de torsion sont proportionnels aux longueurs.

III. Quand les verges sont des cylindres, que les rayons de la section sont 1, 2, 3, 4, les angles de torsion deviennent θ,

$\frac{\theta}{16}$, $\frac{\theta}{81}$, $\frac{\theta}{256}$, d'où l'on conclut que sous l'action d'un même couple l'angle de torsion est en raison inverse de la quatrième puissance du rayon de la section.

IV. Enfin, toutes dimensions égales et sous les mêmes charges, les diverses substances se tordent inégalement et ont un coefficient spécial de torsion que nous appellerons $\frac{1}{T}$. Toutes ces lois se résument par la formule suivante,

$$\theta = \frac{1}{T} \frac{FL}{R^4},$$

identique à celle que nous avons trouvée théoriquement, en posant

$$\frac{1}{T} = \frac{4\alpha(1+\mu)}{\pi}.$$

Le Tableau suivant contient le résultat des expériences de Wertheim :

SUBSTANCE.	RAYON du cylindre.	$\frac{1}{2\alpha(1+\mu)}$.	$\frac{1}{\alpha}$ (valeurs obtenues par traction).	μ.
Fer.	mm 8,220 5,501	6836,6 6677,2	17805	0,317
Acier fondu anglais.	5,055	7458,4	19542	0,310
Cuivre.	5,031	3611,7	9395	0,300
Verre.	3,535 3,4225	2383,1 2308,3	6200 ″	0,321

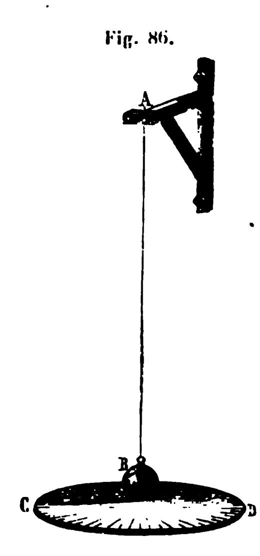
La troisième colonne donne la valeur du coefficient d'élasticité de torsion, la quatrième les valeurs correspondantes du coefficient d'élasticité ; enfin la dernière les valeurs de μ calculées par la comparaison des nombres de ces deux colonnes : ces valeurs sont sensiblement égales entre elles pour les diverses substances ; leur moyenne, 0,312, ne diffère de la valeur théorique $\frac{1}{3}$ que de 0,021.

Wertheim a encore fait des expériences avec des cylindres ou des prismes de formes très-variées : il a cru pouvoir conclure que la loi du moment d'inertie leur est applicable, pourvu que la longueur soit très-grande par rapport aux dimensions transversales, comme le supposait la théorie incomplète qu'il avait admise.

La méthode de Wertheim ne peut s'appliquer qu'à des verges de forte dimension ; elle ne peut être d'aucun secours si l'on veut examiner des fils très-fins. Comme on a fait déjà et que l'on fera encore, dans la suite, des applications de l'élasticité de ces fils capillaires, nous ferons connaître la méthode par laquelle Coulomb (1) les a étudiés.

MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — Je suppose que l'on fixe l'extrémité supérieure d'un de ces fils à un obstacle fixe A (*fig.* 86) et qu'on lui fasse supporter un corps pesant, par exemple une sphère métallique. Après que le système aura pris son équilibre, on tournera la sphère d'un angle quelconque, puis on l'abandonnera à elle-même ; alors la réaction de torsion produira son effet, le fil se détordra et la sphère tournera autour de son axe vertical avec une vitesse croissante, car la force est continue. Le fil se retrouvera bientôt dans la position qu'il avait avant la torsion, et à ce moment la vitesse de rotation sera la plus grande possible. Dès lors le mouvement se continuera par cette vitesse acquise, le fil éprouvera une torsion inverse, la vitesse ira en décroissant et se retrouvera nulle quand l'angle de torsion inverse sera devenu égal à celui de la torsion primitive : puis la vitesse changera de signe et les mêmes alternatives se reproduiront, comme pour le pendule, avec des amplitudes

Fig. 86.



(1) COULOMB, *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1784.

décroissantes, ce qui est dû aux frottements sur l'air et aussi à l'imparfaite élasticité du corps. Or on sait : 1° que quand un corps mobile autour d'un axe est sollicité vers sa position d'équilibre par une force rigoureusement proportionnelle à l'angle d'écart, les oscillations doivent être isochrones, quelle que soit leur étendue, aussi bien quand elles embrassent plusieurs circonférences que si elles se réduisent à une fraction de degré ; 2° que, si cet isochronisme a lieu, la force agissante (et dans le cas actuel le couple de torsion) est nécessairement proportionnelle à l'angle de torsion. Il suffira donc, pour justifier la première des lois que nous avons établies, de chercher par l'expérience si la durée des oscillations est constante.

Pour faire cette observation avec toute la précision qu'elle comporte, on opère comme on l'a fait quand on a voulu prouver l'isochronisme des oscillations du pendule. On fixe le fil dans un soutien A (*fig.* 86), on colle sous la sphère suspendue une aiguille légère C, et l'on dispose un cercle divisé CD pour mesurer l'amplitude des oscillations. L'observateur se place, à distance, avec une lunette qui vise l'aiguille et un compteur à pointage; il pousse le bouton de marche au moment d'un passage de l'aiguille sous le réticule, et, après avoir compté n oscillations dont l'amplitude est A, il arrête les aiguilles et note le temps écoulé. Il recommence la même mesure sur des oscillations différentes, grandes ou petites, comprenant même plusieurs circonférences, et l'expérience démontre avec une parfaite exactitude l'égalité des temps de ces oscillations, quelle que soit l'amplitude, d'où l'on conclut que l'angle de torsion est proportionnel au couple de torsion.

Si l'on désigne par f la valeur du couple pour un arc égal à l'unité décrit avec un rayon égal à l'unité, ou la force appliquée à un rayon de 1^m qui tord d'un arc égal à 1^m, on a pour le moment F, qui tord d'un arc θ,

$$F = f\theta.$$

On comprend que le couple de torsion réside uniquement dans le fil et qu'il ne dépend pas de la nature et du poids de la sphère suspendue; mais, comme c'est ce couple qui la fait tourner, la vitesse qu'il lui imprime et la durée de l'oscilla-

tion qu'il produit dépendent de la masse m du poids suspendu et de sa forme. On démontre, en Mécanique, que cette durée est

$$t = \pi\sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Mk^2 est le moment d'inertie de la sphère autour de son diamètre vertical; il est égal à $\frac{2Ma^2}{5}$, a étant son rayon. Il vient dès lors

$$t = \pi\sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}.$$

Quand on veut ensuite comparer deux fils différents, par leur longueur, leur rayon ou leur nature, on les attache successivement au même support, on leur suspend la même sphère, et l'on compare les durées des oscillations. On a pour deux d'entre eux

$$t = \pi\sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi\sqrt{\frac{2Ma^2}{5f'}},$$

d'où

$$\frac{f'}{f} = \frac{t^2}{t'^2}.$$

On voit que les valeurs de f sont en raison inverse des carrés des temps des oscillations, et l'on trouve, en mesurant ces temps : 1° que f est proportionnel à la quatrième puissance du rayon R du fil, 2° à un facteur T variable pour les diverses substances, 3° en raison inverse de la longueur:

$$f = \frac{TR^4}{L};$$

par suite,

$$F = \frac{T\theta R^4}{L} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{1}{T}\frac{FL}{R^4},$$

ce qui est la formule déjà trouvée par la torsion.

Pour obtenir la valeur de T, on n'a qu'à exprimer f par la

[redacted]

durée d'oscillation t, au moyen de la formule établie précédemment ; on trouve ainsi

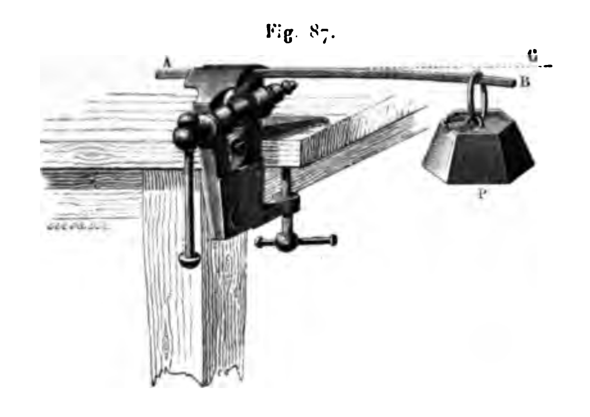
$$f = \frac{2}{5}\frac{\pi^2 M a^2}{t^2} = \frac{2\pi^2 a^2 P}{5 g t^2},$$

par conséquent

$$T = \frac{fL}{R^4} = \frac{2PL}{5g}\left(\frac{\pi a}{R^2 t}\right)^2.$$

FLEXION. — Quand une barre AB est fixée par une de ses extrémités dans un étau (*fig.* 87), et qu'on applique un poids

Fig. 87.

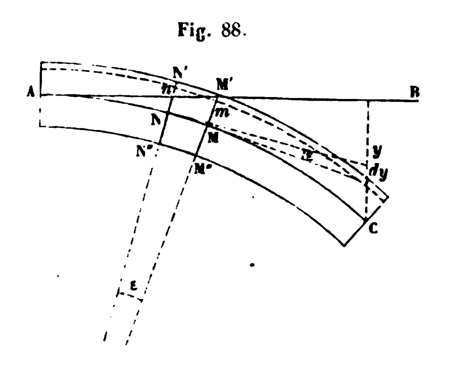


à son extrémité libre B, elle fléchit et prend une forme courbe, puis elle se tient en équilibre : à ce moment, la réaction de la verge fait équilibre au poids P. On conçoit que dans ce mouvement la tranche horizontale supérieure de la lame se dilate pendant que la couche inférieure se contracte, et que les écarts ou les rapprochements des molécules tendent à développer des forces qui ramèneront la verge à sa position primitive aussitôt qu'elle deviendra libre.

Nous considérerons le cas d'une verge prismatique de longueur l, de largeur b et d'épaisseur e, et nous admettrons, à titre d'approximation : 1° que la flexion est la même dans toutes les sections de la lame parallèles à la section verticale moyenne passant par l'axe ; 2° que la longueur AMC (*fig.* 88) de l'axe fléchi demeure égale à AB ; 3° que les molécules ma-

térielles qui se trouvaient sur une section normale de la barre restent, après la flexion, sur une section normale. Les résultats que nous trouverons ainsi, sans faire usage des formules générales de l'élasticité, ne seront pas très-rigoureux, mais ils

Fig. 88.



suffiront pour nous indiquer le sens et les lois générales du phénomène.

Pour que la verge soit en équilibre, il faut que chacune des sections normales M'MM", par exemple, soit en équilibre : ce qui exige que le moment du poids fléchisseur soit égal et de signe contraire à la somme des moments des réactions élastiques provenant des allongements.

Désignons par x la distance MC ; le moment du poids tenseur par rapport à M est très sensiblement égal à Px.

Pour trouver le moment des réactions élastiques, désignons par ε l'angle de deux sections normales M'M", N'N", infiniment voisines, interceptant sur l'axe la longueur dx, et décomposons la section AN'M'CMN en filets parallèles à l'axe, d'épaisseur uniforme dz. Le segment nm intercepté sur l'un de ces filets, situé à la distance z de l'axe, par les deux côtés de l'angle ε, était avant la flexion égal à dx ; il est devenu $dx + z\varepsilon$, et la force élastique développée, proportionnelle à l'allongement $\frac{z\varepsilon}{dx}$ de l'unité de longueur et à l'épaisseur dz du filet, sera $\frac{1}{\alpha} z\varepsilon \frac{dz}{dx}$ pour une largeur égale à l'unité ; le moment

de cette force, par rapport au point M, est

$$\frac{1}{\alpha} z \varepsilon \frac{dz}{dx} \cdot z = \frac{1}{\alpha} \frac{\varepsilon}{dx} z^2 dz;$$

il faut étendre ce moment à la largeur b de la barre et à son épaisseur depuis $z = -\frac{e}{2}$ jusqu'à $z = +\frac{e}{2}$, et l'on aura le moment des forces élastiques développées dans la section MN,

$$\frac{b}{\alpha} \frac{\varepsilon}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} z^2 dz = \frac{be^3}{12\alpha} \frac{\varepsilon}{dx},$$

qui doit faire équilibre au moment Px du poids :

(1) $$\mathrm{P}x = \frac{be^3}{12\alpha} \frac{\varepsilon}{dx}.$$

Nous nous proposons d'évaluer l'abaissement y du point C au-dessous de son niveau primitif. A cet effet, menons les tangentes en M et N qui interceptent sur la verticale passant par le point C une longueur dy. L'angle des tangentes est égal à ε; par suite,

(2) $$\varepsilon x = dy.$$

On obtiendra y en remplaçant dans cette expression ε par la valeur tirée de (1),

(3) $$dy = \frac{12\alpha}{be^3} \mathrm{P} x^2 dx,$$

et, intégrant de $x = 0$ à $x = l$,

$$y = \frac{4\alpha}{be^3} \mathrm{P} l^3.$$

La flèche y est donc proportionnelle au poids tenseur, au cube de la longueur, en raison inverse de la largeur et du cube de l'épaisseur de la verge prismatique (1).

(1) Comme nous l'avons dit, la théorie que nous venons d'exposer n'est qu'approchée. En même temps que la portion supérieure d'une barre fléchie s'allonge

Pour étudier expérimentalement la flexion, on visera au cathétomètre les extrémités A et C (*fig.* 87) ou plutôt des repères tracés à ces extrémités; on les place d'abord horizontalement, puis on charge l'extrémité C et l'on mesure l'abaissement y du repère jusqu'en B. L'expérience justifie les lois que nous venons d'énoncer.

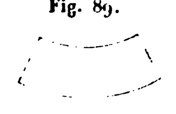
Nous avons démontré que la réaction élastique en chaque point $\frac{be^3}{12\alpha}\varepsilon dx$ est proportionnelle à l'angle ε dont la verge est fléchie en ce point. Il en résulte que quand la verge est abandonnée à elle-même, elle exécute, pour revenir à sa position d'équilibre, des oscillations isochrones; par suite, le son rendu, dont la hauteur est proportionnelle au nombre d'oscillations effectuées par seconde, sera invariable, quelle que soit l'amplitude des oscillations. C'est encore ce que l'expérience vérifie : c'est une nouvelle preuve de l'exactitude au moins approchée de nos déductions.

ÉLASTICITÉ DES CORPS ANISOTROPES. — Le coefficient d'élasticité des substances anisotropes change suivant la direction dans laquelle on le détermine. Par exemple, Wertheim et Chevandier (1) ont déterminé le coefficient d'élasticité de diverses sortes de bois, et l'ont trouvé différent suivant la hauteur à laquelle la section était faite dans l'arbre, et suivant qu'on évaluait le coefficient par une traction exercée parallèlement aux fibres, dans le sens du rayon ou dans le sens perpendicu-

---

elle se contracte transversalement, et de même la partie inférieure se dilate; par suite la lame se courbe comme l'indique la *fig.* 89. La théorie complète de la flexion permet de calculer cette courbure transversale, qui dépend évidemment du rapport μ de l'allongement à la contraction (DE SAINT-VENANT, *Mémoire sur la flexion des prismes* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. I, 1856)). M. Cornu a mesuré par des procédés optiques très précis la courbure transversale de lames de verre fléchies, et en a déduit $\mu = 0,25$ (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 333).

Fig. 89.



(1) Publié dans le *Recueil des Mémoires de Physique mécanique de Wertheim*. Paris, 1848.

laire au rayon et tangentiel aux couches concentriques du bois. Le Tableau suivant est relatif au chêne :

DISTANCE A LA BASE.	COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ DANS LE SENS		
	des fibres.	du rayon.	tangentiel.
0..................	1287,2	257,5	137,1
4m,05...............	994,6	130,3	106,2

On ne possède que bien peu d'expériences sur l'élasticité des corps cristallisés. Toutefois, on peut signaler quelques déterminations réalisées tout récemment par la flexion de courts bâtons de gypse, de mica ou de sel gemme [1]. Elles ont établi que le coefficient d'élasticité change avec la direction dans laquelle on le mesure.

L'étude théorique de l'élasticité des cristaux est particulièrement importante, surtout au point de vue de ses applications à la science de l'Optique; on considère, en effet, l'éther lumineux comme possédant dans les cristaux une élasticité variable avec la direction, c'est-à-dire comme étant lui-même cristallisé. On démontre que l'élasticité dans une direction quelconque peut être calculée d'après les valeurs qu'elle possède dans trois directions rectangulaires, qu'on nomme les *axes d'élasticité*, et qui, dans les systèmes à axes rectangulaires, coïncident avec les axes cristallographiques. Nous renverrons le lecteur aux Mémoires originaux [2].

---

(1) L.-A. Coromilas, *Inaugural Dissertation*, analysée dans les *Beiblätter*, . I, p. 492 (1877); Koch, *Annales de Wiedemann*, t. V, p. 251 (1878). Signaons aussi les travaux plus anciens de Savart, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XL, 1829; de Baumgarten, *Annales de Poggendorff*, t. CLII, . 3; de Voigt, *Annales de Poggendorff*, *Ergänzunsband* VII, p. 1, et de Roth, *Annales de Poggendorff*, t. CLVII, p. 15.

(2) *Voir* surtout Cauchy, *Exercices de mathématiques*, t. II et III, et Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*.

CHAPITRE VII.

LIMITES DE L'ÉLASTICITÉ. — FROTTEMENT DES SOLIDES.

Limites de l'élasticité. — Déformations permanentes : 1° traction; 2° compression; 3° torsion. — Frottement intérieur des solides. — Élasticité résiduelle.
Qualités mécaniques des métaux. — Ténacité. — Dureté. — Ductilité. — Malléabilité.
Lois expérimentales du frottement.

LIMITES DE L'ÉLASTICITÉ. — Jusqu'ici nous nous sommes astreints à n'employer que des actions mécaniques d'intensité assez médiocre pour qu'on ait le droit de négliger les déformations permanentes qu'elles produisent. Quand on augmente la puissance de ces actions, les phénomènes se compliquent beaucoup, et en l'absence d'une théorie générale de l'élasticité on a dû s'adresser uniquement à l'expérience pour les étudier.

Une des principales difficultés de cette investigation résulte du travail mécanique auquel les solides ont été soumis pour les amener à la forme sous laquelle on les emploie. S'ils ont été fondus puis refroidis lentement, la solidification s'est, il est vrai, effectuée librement à la surface extérieure, mais, à peine la première croûte solide formée, le liquide intérieur n'a pu prendre la dilatation ou la contraction correspondant à son changement d'état, sans presser de dehors en dedans ou tirer de dedans en dehors sur son enveloppe solide : quand la solidification de la masse est complète, celle-ci se trouve soumise en ses divers points à des pressions ou à des tensions intérieures variables d'un point à un autre suivant les circonstances fortuites du refroidissement. Le travail ultérieur à la filière, au laminoir, au marteau, à la lime, etc., n'a pu s'exer-

cer sans modifier les tensions intérieures et créer une hétérogénéité systématique au voisinage de surfaces. Cela posé, quand on appliquera au corps solide des forces extérieures quelconques, leur effet sera différent suivant qu'elles s'exerceront dans le sens des tensions internes ou en sens contraire. Ce qui va suivre montrera toute l'importance de ces effets perturbateurs.

D'une manière générale, voici les résultats que l'expérience a fourni :

1° La déformation produite sur un solide élastique par une force extérieure se compose de deux parties, l'une temporaire, qui, d'abord proportionnelle à la force agissante, croît ensuite plus rapidement; l'autre permanente, dont on ne constate pratiquement l'existence que pour des actions déformatrices assez considérables, mais qui, insensible d'abord, augmente ensuite très-rapidement jusqu'à ce que le solide se brise. Quand on constate une déformation permanente, on dit qu'on a dépassé la *limite d'élasticité* du corps; mais il semble qu'il n'y ait pas à proprement parler de limite de cette espèce, car, à mesure que les procédés de mesure se perfectionnent, on constate des déformations permanentes sous des actions de plus en plus faibles.

2° L'effet d'une action mécanique sur un corps peut être complet dans un temps inappréciable : on a alors affaire à un solide parfait; il peut exiger pour se produire pleinement une durée plus ou moins considérable, et alors on a affaire à un solide visqueux; enfin certains corps très-résistants en apparence, comme la poix, doivent, nous l'avons vu, être rangés parmi les liquides, car la moindre force agissant sur eux d'une manière continue et prolongée les déforme complètement.

3° Un même solide est susceptible de différents états d'agrégation, parfois discontinus (corps existant à l'état amorphe ou cristallin), parfois présentant une véritable continuité (corps plus ou moins écrouis); à chacun de ces états correspondent des propriétés mécaniques particulières. Les actions déformatrices puissantes modifient l'état d'agrégation de ces corps, et, par suite, l'effet d'une force dépend non-seulement de sa grandeur et de son mode d'application, mais encore des actions méca-

niques auxquelles le corps a été précédemment soumis. Il est donc impossible de caractériser par des coefficients mécaniques un solide chimiquement défini, sans indiquer les conditions précises dans lesquelles ces coefficients ont été mesurés.

Nous allons justifier ces conclusions en passant en revue les cas qu'on a le mieux étudiés.

DÉFORMATIONS PERMANENTES. — 1° *Traction.* — Wertheim (¹) a employé l'appareil décrit page 137 à l'étude des allongements permanents de fils tirés. Le Tableau suivant indique les poids p qui, agissant sur un fil de 1^{mmq} de section, produisent un allongement permanent de $0^{mm},05$ par mètre : on peut admettre qu'ils représentent la limite pratique d'élasticité au-dessous de laquelle les résultats du Chapitre précédent sont applicables. On a aussi fait figurer dans ce Tableau les poids P produisant la rupture des mêmes fils.

MÉTAUX.		p.	P.
		kg	kg
Plomb	étiré	0,25	2,07
	recuit	0,20	1,80
Étain	étiré	0,40	2,45
	recuit	0,20	1,70
Or	étiré	13,50	27,20
	recuit	3,00	10,08
Argent	étiré	11,00	29,00
	recuit	2,50	16,02
Cuivre	étiré	12,00	40,30
	recuit	3,00	30,54
Platine	étiré	26,00	34,10
	recuit	14,50	23,50
Fer	étiré	32,50	61,10
	recuit	5,00	46,88
Acier fondu	étiré	55,60	83,80
	recuit	5,00	65,70

Les valeurs de p varient d'un métal à un autre, du simple au centuple et au delà, et, pour un même métal étiré ou recuit, du

(¹) WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XII, p. 385.

simple au quadruple et au décuple. Pour des tractions supérieures à p, on observe des allongements permanents croissant d'après une loi complexe; ils varient en outre suivant la durée de la charge, suivant que le fil est au repos ou animé de vibrations longitudinales, etc., etc. L'effet temporaire produit par une faible charge n'est cependant que très-peu modifié par les allongements permanents que le fil peut avoir déjà subis.

2° *Compression.* — M. Tresca ([1]) a soumis les métaux les plus durs à l'action de pressions énormes dans des capacités fermées à parois très-résistantes, munies d'orifices librement ouverts. Dans ces conditions, il a vu le métal former à chaque orifice un jet ou boyau rappelant par sa forme extérieure, soit une goutte liquide attachée à un orifice, soit une veine d'écoulement. Pour étudier de plus près les déformations permanentes qui se produisent dans ces circonstances, M. Tresca a formé le bloc à comprimer de plusieurs parties s'adaptant exactement les unes aux autres, par exemple de lames superposées ou de cylindres concentriques s'emboîtant exactement. Il a ensuite scié longitudinalement le jet et reconnu sur la surface de séparation, soigneusement polie, la forme affectée par les surfaces de jonction. Par exemple, dans le cas de lames de plomb parallèles entre elles et au plan de l'orifice, il a vu toutes les lames s'amincir, se creuser au-dessus de l'orifice et pénétrer individuellement dans le jet à une profondeur plus ou moins considérable; chacune d'elles présente ainsi (*fig.* 90) une surface de révolution composée d'une partie sensiblement plane, d'une partie à peu près cylindrique et d'une calotte terminale.

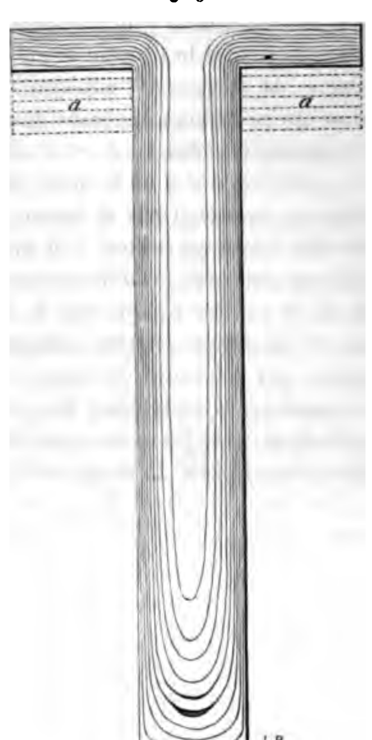
M. Tresca a étendu ses recherches à la plupart des actions mécaniques auxquelles les métaux usuels sont soumis, et vérifié surabondamment à cet égard la loi suivante, qu'on peut considérer comme intuitive : *Les pressions se transmettent d'autant mieux à l'intérieur des solides qu'elles sont plus considérables; elles provoquent un écoulement de la matière dans les directions où les obstacles opposés à l'action mécanique déformatrice sont les plus faibles.* Ainsi le fer

---

([1]) *Mémoires des Savants étrangers*, p. 733, t. XVIII (1868) et t. XX, p. 75 (1872); *ibid.*, p. 137 et 281.

[illegible] sous le marteau, et la pièce martelée s'étend dans le [illegible] normal au choc; ainsi le métal fuit sous le tranchant du [illegible] et fournit un copeau qui s'enroule sur lui-même par

Fig. 90.



suite de l'excès de matière refoulée par l'écoulement sur sa face en contact avec l'outil, etc.

3° *Torsion.* — Des recherches analogues à celles de M. Tresca exigent une installation coûteuse et des moyens d'action difficiles à réunir; de plus, leur discussion soulève les problèmes les plus compliqués de l'Analyse mathématique. Au contraire, les lois de la torsion permanente ont pu être étudiées par des moyens à la portée de tous : nous y insisterons particulière-

ment, tant à cause de la lumière qu'elles jettent sur la théorie de l'élasticité qu'en raison des analogies nombreuses que présentent les phénomènes que nous allons étudier avec ceux, bien plus obscurs, de l'aimantation.

Nous supposerons qu'on agit sur un fil neuf, c'est-à-dire chauffé préalablement au rouge dans une atmosphère d'un gaz inerte, en même temps qu'il était soumis à une faible tension longitudinale; cette opération a pour but de faire disparaître les irrégularités de structure qui résultent ordinairement du passage à la filière et des actions ultérieurement subies par le fil. De plus, nous disposerons l'expérience de telle sorte que le couple de torsion employé agisse régulièrement sans soubresauts et sans chocs; de petits miroirs fixés sur le fil de distance en distance, et dans lesquels on observe à l'aide de lunettes l'image de règles divisées (méthode de Poggendorff), permettent de s'assurer que la torsion est régulièrement répartie sur toute la longueur du fil et d'en mesurer la valeur avec une grande exactitude. Dans de telles conditions, M. Warburg (¹) a constaté que la torsion temporaire produite par une force peu énergique est bien proportionnelle à cette force, que le coefficient de torsion est le même pour tous les fils de même substance préparés de la même manière, et qu'il ne varie pas sensiblement avec la charge qui tend le fil, pourvu que celle-ci ne soit pas trop considérable.

Voyons maintenant ce qui arrive si l'on tord un fil neuf par des forces de plus en plus considérables. M. G. Wiedemann (²), dont les expériences nous serviront surtout de guide, a trouvé que le couple agissant produit d'abord une torsion T, dont la valeur croît peu à peu jusqu'à une limite T_1; quand on supprime le poids, la torsion se réduit subitement à P_1, mais continue à décroître jusqu'à une valeur limite P, qui caractérise la nouvelle position d'équilibre. Le Tableau suivant se rapporte à un fil de laiton de $0^m,480$ de long et de $0^m,002$ de diamètre. Les torsions sont exprimées en unités arbitraires.

(¹) Warburg, *Ann. de Wiedemann*, t. X, p. 13; 1880.

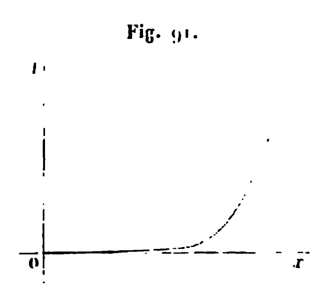
(²) G. Wiedemann, *Ueber die Torsion* (*Annales de Wiedemann*, t. VI, p. 485 (1879), et *Journal de Physique*, t. VIII, p. 349 (1879).

coule sous le marteau, et l
sens normal au choc; ains
rabot et fournit un cop

		P.	$T_1 - P_1$.	$\frac{T_1 - P_1}{p}$.
[illegible]	0,6	0,6	311,4	10,3[illegible]
[illegible]	1,3	1,3	414,7	10,37
[illegible]	2,3	2,3	520,7	10,41
[illegible]	3,8	3,8	624,2	10,40
[illegible]	5,8	5,8	728,2	10,40
[illegible]	9,8	9,8	835	10,40
[illegible]	16	16	943	10,48
[illegible]	26,3	26,3	1048,7	10,49
[illegible]	44	43,3	1160,7	10,55
[illegible]	73,3	71,8	1279	10,60
[illegible]	132,8	130,0	1413	10,85
[illegible]	253	245	1575	11,25

...raire $T_1 - P_1$ de la torsion est sensiblement
... a charge jusqu'au couple dont l'intensité est
... 80; au delà il augmente plus rapidement.
...rmanente P varie, comme l'indique la courbe
... 91 : très-faible d'abord, cette torsion croît en
... manière excessivement rapide.

Fig. 91.



...uand on recommence l'expérience avec des poids plus
...ndes que ceux déjà employés, on retrouve, dans les limites
...e cette expérience, très-sensiblement les mêmes valeurs de la
...sion temporaire $T_1 - P_1$; mais quand on tord plusieurs fois
...e même fil par l'action d'un même poids, la torsion tempo-
...aire diminue faiblement, tandis que la torsion permanente

-mente d'une fraction très-considérable de sa valeur primitive. Le Tableau suivant permettra d'apprécier l'importance ces variations; il se rapporte à un fil neuf tordu par un uple dont l'intensité relative correspond à 100 unités du bleau précédent.

NOMBRE DES TORSIONS.	P.	P_1.	$T_1 - P_1$.
1	409	386	1720
2	445	430	1693
3	479	472	1669,5
4	489	484	1662
5	498	492	1657
6	503	498	1658
7	507	503	1651,5
8	517	509	1651
9	516,5	511	1649
10	517	513	1648
11	521,5	516	1646
12	523	518	1645
13	523	520	1644
14	526,5	522,5	1646,5
Variation totale, absolue	+ 117,5	+ 136,5	− 73,5
Variation totale, relative	$+\frac{1}{3,48}$	$+\frac{1}{2,83}$	$-\frac{1}{23,4}$

Quand, après avoir tordu un fil par une force suffisante pour il conserve une torsion permanente notable, on le tord en ns contraire par une force médiocre p', la torsion temporaire oduite par celle-ci se superpose à la torsion permanente quise, sans la détruire, car, si l'on supprime l'action du ds p', le fil revient à sa position d'équilibre modifiée; toutefois, pour détruire la torsion permanente, il suffira de faire r en sens contraire une force p'' inférieure à P. Pour une eur convenable de la force employée à détordre, on pourra nc avoir une torsion temporaire apparente de signe contraire la torsion permanente.

On peut se rendre compte de ces derniers effets, au moins

POIDS p produisant la torsion.	T.	T_1.	P_1.	P.
30	312	312	0.6	
40	416	416	1,3	
50	523	523	2,3	
60	628	628	3,8	
70	733	734	5,8	
80	844	845	9,[illegible]	
90	956,5	959	16	
100	1070	1074	?	
110	1191	1204		
120	1338	1351		
130	1510	1543		
140	1725	1820		

.. elle
... de l'être

...ules extérieures
...que la limite d'élas-
...plus en plus profondes
... elasticité jusqu'au centre.

L'effet temporaire ... proportionnel à la ch... représentée par 8... La torsion perm... ci-jointe (*fig.* 9... suite d'une ma...

...sticité qui a pu être produite
...n démontre que le couple limite
...lors soumise est $\frac{4}{3}$F.
...ant qu'on supprime toute action ex-
...endra une position d'équilibre telle, que
...ieures se trouveront soumises à une tension
... direction opposée à celle de la torsion, les
...trales à une tension dans la direction de la tor-
...ment total de ces tensions sera nul, et les deux
... la barre soumises à des tensions de sens contraires
...parées par un cylindre dont le rayon est les $\frac{3}{4}$ de
... la barre. Seules les particules situées à la surface de
...cylindre ne sont soumises à aucune tension.

La barre étant dans cet état, nous pouvons la soumettre ... de fois qu'il nous plaira à l'action d'un moment $\frac{4}{3}$F, dans le sens de la torsion, sans rien produire de nouveau; et par conséquent la résistance à la torsion a été augmentée dans le sens de la torsion déjà produite dans un rapport égal à $\frac{4}{3}$;

[1] Cité par sir W. THOMSON, *Elasticity and heat, being articles contributed ... Encyclopædia Britannica*, Edinburgh, 1880, p. 4.

d'une manière générale et approximative, d'après les remarques suivantes, que nous emprunterons à M. J. Thomson [1] :

« Considérons une barre cylindrique récemment chauffée et que l'on tord pour la première fois, et admettons que l'on a poussé la torsion jusqu'à atteindre, pour les molécules de la surface libre du cylindre, la limite de l'élasticité, que nous supposerons unique et bien déterminée. Soient F le couple de torsion total ainsi produit, θ l'angle de torsion correspondant. Des éléments égaux de la section droite de la barre se trouvent soumis à des efforts proportionnels à leur distance à l'axe, et, puisque la limite d'élasticité est atteinte à la surface, elle ne l'est pas à l'intérieur et s'écarte d'autant plus de l'être qu'on s'approche davantage du centre.

» Poussons plus loin la torsion; les particules extérieures glisseront sur la couche sous-jacente, puisque la limite d'élasticité est dépassée, et les couches de plus en plus profondes atteindront peu à peu leur limite d'élasticité jusqu'au centre. Si l'on néglige la variation d'élasticité qui a pu être produite par suite de la déformation, on démontre que le couple limite auquel la barre se trouve alors soumise est $\frac{4}{3}$F.

» Supposons maintenant qu'on supprime toute action extérieure : la barre prendra une position d'équilibre telle, que les particules extérieures se trouveront soumises à une tension agissant dans la direction opposée à celle de la torsion, les particules centrales à une tension dans la direction de la torsion; le moment total de ces tensions sera nul, et les deux régions de la barre soumises à des tensions de sens contraires seront séparées par un cylindre dont le rayon est les $\frac{3}{4}$ de celui de la barre. Seules les particules situées à la surface de ce cylindre ne sont soumises à aucune tension.

» La barre étant dans cet état, nous pouvons la soumettre autant de fois qu'il nous plaira à l'action d'un moment $\frac{4}{3}$F, dans le sens de la torsion, sans rien produire de nouveau; et par conséquent la résistance à la torsion a été augmentée dans le sens de la torsion déjà produite dans un rapport égal à $\frac{4}{3}$;

---

(1) Cité par sir W. Thomson, *Elasticity and heat, being articles contributed to the Encyclopædia Britannica*, Edinburgh, 1880, p. 4.

mais elle a diminué dans la direction opposée ; car si l'on tord la barre d'un angle égal à $\frac{2}{3}\theta$, les particules de la surface auront subi le plus grand déplacement dont elles sont susceptibles sans dépasser leur limite d'élasticité ; et, par suite, dans l'état actuel de la barre, il faut exercer un couple de torsion moitié moindre pour produire un angle de torsion déterminé dans un sens que pour le produire en sens contraire. »

Nous n'insisterons pas sur les modifications produites dans l'effet du couple de torsion, suivant que le fil est tendu par un poids plus ou moins considérable, ou qu'on lui imprime pendant la torsion des secousses, des chocs, etc. Tant que la force tordante n'est pas trop considérable, ces actions modifient peu la torsion temporaire, mais chacune d'elles altère la position d'équilibre du fil, c'est-à-dire la torsion permanente. Quand un fil a été soumis à des actions multipliées, sa torsion permanente résulte de la superposition de l'effet de chacune d'elles, et pour rendre au fil ses propriétés primitives il est nécessaire de le recuire. Nous retrouverons toutes ces particularités dans les phénomènes encore si mal connus de l'aimantation temporaire et de l'aimantation permanente du fer ou de l'acier. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

FROTTEMENT INTÉRIEUR DES SOLIDES. — ÉLASTICITÉ RÉSIDUELLE. — Parmi les particularités que nous offre la torsion, l'une des plus intéressantes est celle qui se rapporte à l'effet du temps. Weber [1] observa le premier qu'un fil tordu ne revient pas instantanément à sa position d'équilibre définitive, et il désigna ce phénomène élastique d'un nouveau genre par le nom d'*Elastische Nachwirkung*, que nous traduisons par celui d'*élasticité résiduelle* ; il montra que la valeur de la torsion u, comptée à partir de la position d'équilibre finale, est représentée, au bout de t secondes après la suppression du couple de torsion, par l'expression

(1) $$u = \frac{A}{(a+t)^n};$$

---

[1] WEBER, *Göttingue gelehrter Anzeiger* ; 1835.

A, a et n sont des constantes, cette dernière voisine de l'unité ([1]).

Le phénomène de Weber a été l'objet de nombreuses recherches expérimentales, qui ont en général confirmé ses résultats ([2]). Parmi les interprétations théoriques qui en ont été fournies, la plus satisfaisante paraît être celle de M. O.-E. Meyer ([3]) : elle consiste à attribuer l'élasticité résiduelle à un frottement intérieur résultant de l'agitation calorifique et comparable par ses effets à celui que nous avons constaté dans les liquides. Il n'est pas douteux qu'une action de ce genre ne puisse exister dans les solides ; on est même obligé de la faire intervenir pour expliquer les particularités que présentent les oscillations des fils tordus.

Si un fil tordu, qu'on abandonne ensuite à lui-même, n'était soumis qu'à une réaction élastique instantanée, proportionnelle à l'angle de torsion, les oscillations du fil seraient rigoureusement isochrones et d'amplitude invariable. Il n'en serait pas de même si, outre la réaction élastique, le mouvement développait une résistance dépendant de la vitesse. On démontre, en Mécanique, que les oscillations demeurent encore isochrones dans ce cas, pourvu que la résistance exercée soit proportionnelle à la vitesse ; mais alors leur amplitude décroît en progression géométrique. C'est précisément ce qui arrive pour les oscillations des fils tordus. La résistance de l'air étant insuffisante pour expliquer le décroissement d'amplitude observé, il faut bien qu'il y ait en outre une résistance intérieure au fil : c'est celle qui est due au frottement.

([1]) M. Neesen (*Annales de Poggendorff*, t. CLVIII, p. 179) a proposé une autre formule $u = Ae^{-nt}$ qui, d'après lui, représente aussi bien les phénomènes que la formule de Weber.

([2]) En particulier les expériences déjà citées de M. Neesen, celles de MM. Kohlrausch (*Annales de Poggendorff*, t. CLX, p. 227), Warburg (*Annales de Wiedemann*, t. X, p. 13) et Schmidt (*Annales de Wiedemann*, t. II, p. 48 et 241).

([3]) *Annales de Poggendorff*, t. CLI, p. 108 (1874) et *Annales de Wiedemann*, t. IV, p. 249. D'autres théories ont été proposées par M. Boltzmann (*Annales de Poggendorff*, *Ergängzungsband*, VII), par M. Neesen et par M. Warburg (*Annales de Wiedemann*, t. IV, p. 232).

M. O.-E. Meyer a montré que la solution générale du problème du déplacement d'un fil tordu comporte, quand on donne au temps (compté à partir de la suppression du couple de torsion) des valeurs très faibles, puis très considérables, d'abord des oscillations d'amplitude décroissante, puis un mouvement apériodique, comme celui que l'on attribue à l'effet de l'élasticité résiduelle. L'équation même de Weber est une solution particulière de l'équation différentielle du problème. Toutefois, il n'est pas impossible que d'autres causes, telles qu'un changement progressif dans l'élasticité du fil (produit à la suite de toute déformation qu'il subit), s'ajoutent ici au frottement intérieur et en modifient l'effet.

M. Boltzmann objecte à la théorie de M. Meyer que les déplacements résiduels sont d'une lenteur excessive, peu en rapport avec l'idée que nous nous faisons de l'effet d'un frottement. Notons cependant que le frottement intérieur produit dans la poix des effets qui ne sont sensibles qu'au bout de plusieurs heures ou même de plusieurs jours (*voir* p. 111).

QUALITÉS MÉCANIQUES DES SOLIDES. — TÉNACITÉ. — DURETÉ. — DUCTILITÉ. — MALLÉABILITÉ. — D'après ce qui précède, on juge bien qu'il est impossible, dans l'état actuel de la Science, de caractériser complètement un solide élastique par un certain nombre de coefficients numériques à signification parfaitement déterminée. Aussi se borne-t-on le plus souvent à dresser des listes, dans lesquelles les corps sont simplement rangés suivant l'aptitude qu'ils manifestent pour certains modes de déformation.

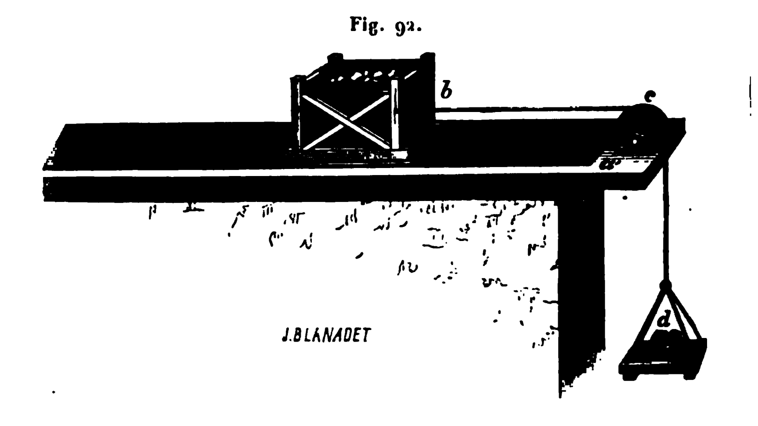
1° *Ténacité.* — L'un des éléments les plus importants à connaître au point de vue pratique, c'est la charge P qui détermine la rupture d'un fil, opérée par voie de traction, et qui mesure ce que l'on a appelé la *ténacité* du corps solide. Le Tableau de la page 186 donne, d'après Wertheim, la valeur de ces charges pour quelques-uns des métaux usuels. On suppose, bien entendu, que la traction est opérée sans secousse.

2° *Dureté.* — Un corps taillé de manière à présenter une arête vive raye ou plutôt déchire certaines substances sur lesquelles on le presse, tandis qu'il est rayé par d'autres. En choisissant

tinue, parfois au point de contracter une adhérence qu'on ne peut plus vaincre sans les briser.

L'appareil employé par Coulomb se compose d'un chariot *b* (*fig*. 92) que l'on charge de poids, et que l'on entraîne sur la plate-forme *a* au moyen de poids *d* attachés à un cordon qui

Fig. 92.



passe sur la poulie *c*. Soient M la masse du chariot chargé, M' celle des poids *d*, *g* l'accélération de la pesanteur; s'il n'y avait pas de frottement, l'accélération γ du système serait

$$\gamma = \frac{M'}{M + M'} g.$$

On trouve qu'elle est $\gamma' < \gamma$. La force perdue $(M + M')(\gamma' - \gamma)$ mesure le frottement f :

$$f = (M + M')(\gamma' - \gamma) = (M + M')\gamma' - M'g.$$

Coulomb a trouvé que le frottement est indépendant de la vitesse de glissement et de l'étendue des surfaces frottantes, mais qu'il est proportionnel à la pression normale N qui s'exerce entre les deux corps :

$$(1) \qquad f = cN.$$

Le coefficient *c* s'appelle *coefficient de frottement*.

Le Tableau suivant, fourni par des expériences de M. le gé-

néral Morin [1], établit que le coefficient de frottement des solides est en général très considérable. On le diminue beaucoup par l'interposition d'un corps gras, car on substitue au frottement des deux solides l'un contre l'autre le frottement intérieur du corps liquide interposé. Nous avons joint au coefficient de frottement le nombre analogue indiquant la force perdue au départ pour une pression normale égale à 1.

SURFACES en contact.	ENDUIT.	COEFFICIENT de frottement.	FROTTEMENT au départ.
Chêne sur chêne (fibres parallèles)....	Sans enduit.	0,48	0,62
	Frottés de savon sec.	0,16	0,44
Chêne sur chêne (fibres perpendiculaires)..	Sans enduit.	0,34	0,54
	Mouillés d'eau.	0,25	0,71
Cuir tanné à plat sur chêne.............	Sans enduit.	0,30 à 0,35	0,61
	Mouillé d'eau.	0,29	//
Fer sur fonte........	Sans enduit.	0,18	0,19
Fonte sur fonte	Sans enduit.	0,15	0,16
Calcaire sur calcaire..	Sans enduit.	0,64	0,74

Les lois de Coulomb n'ont qu'une valeur purement empirique et ne s'appliquent que dans les limites pratiques entre lesquelles elles ont été vérifiées. On ignore ce qui arrive quand la vitesse de déplacement est très faible [2]; quand elle est très grande, le coefficient de frottement diminue, sans doute parce que le contact n'a pas lieu d'une manière permanente et ne s'effectue que par soubresauts. Ainsi, pour des roues de wagon enrayées glissant sur un rail bien sec, le coefficient diminue de 0,20 à 0,14 quand la vitesse passe de 4^m à 14^m par seconde [3].

[1] *Mémoires des savants étrangers*, 1833, 1834 et 1835.

[2] Tandis que d'après MM. Fleeming Jenkin et Ewing (*Proceedings of the royal Society*, t. XXVI, p. 93, et *Journal de Physique*, t. VI, p. 285) le frottement serait plus considérable pour de faibles vitesses, il serait plus faible d'après M. Hirn; enfin, d'après M. Kimball, il augmenterait d'abord pour décroître ensuite (*American Journal*, 1877, p. 333).

[3] D'après les expériences de M. Poirée, faites avec un wagon dynamomètre au chemin de fer de Lyon.

Quand, au lieu de glisser l'une sur l'autre, deux surfaces se déplacent en roulant (comme le contour d'une roue parfaitement mobile sur ses essieux se déplace sur le sol), le frottement se trouve diminué dans un rapport très considérable. Dans des limites pratiques, le frottement de roulement entre un plan et une roue varie en raison inverse du diamètre de celle-ci.

TABLE DES MATIÈRES

DU DEUXIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE.

Pages

CHAPITRE PREMIER.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

Figures d'équilibre des liquides soustraits à l'action de la pesanteur.

CHAPITRE II.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

Figures d'équilibre des liquides pesants.

CHAPITRE III.

Diffusion.

CHAPITRE IV.

Écoulement des fluides. — Frottement intérieur.

CHAPITRE V.

Compressibilité des liquides.

CHAPITRE VI.

Élasticité des solides.

CHAPITRE VII.

... élasticité. — Frottement des solides.

FIN DE LA TABLE DU DEUXIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

4676 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, 55 quai des Augustins.

.E FASCICULE.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.



CHAPITRE VII.

Limites de l'élasticité. — Frottement des solides.

FIN DE LA TABLE DU DEUXIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

4676 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, 55 quai des Augustins.

TROISIÈME FASCICULE.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

INTRODUCTION.

DES FORCES QUI VARIENT EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE. — Dans les Leçons qui précèdent, nous avons étudié les actions mécaniques exercées au contact, et les déformations des solides et des liquides qui en sont la conséquence. Nous avons rapporté l'origine de ces déformations aux actions réciproques des molécules matérielles dans lesquelles nous avons imaginé qu'un corps peut toujours être décomposé, et nous avons pris comme point de départ cette hypothèse que les actions moléculaires cessent d'être sensibles à toute distance appréciable par nos instruments de mesure.

Nous allons, dans les Chapitres qui suivent, étudier des actions mécaniques qui s'exercent à de très grandes distances, sans intermédiaire connu : ce sont d'une part les actions réciproques du Soleil sur les planètes et des astres entre eux, d'autre part les phénomènes de l'électricité statique. On pourrait y joindre les actions des aimants; mais on sait aujourd'hui qu'elles ne se rapportent pas à une cause isolée de celles qui produisent les attractions ou répulsions électriques. Bien qu'une même théorie mathématique se prête à réunir les phénomènes de la gravitation, de l'électricité et du magnétisme,

il convient mieux à notre objet d'exclure provisoirement ces derniers, pour y revenir avec tous les développements qu'ils comportent à propos des courants électriques.

Beaucoup de physiciens répugnent à l'idée d'actions mécaniques exercées à distance et sans intermédiaire. Considérant l'élasticité comme une propriété non susceptible d'analyse et afférente aux milieux supposés continus, ils tentent de ramener les lois fondamentales de la gravitation et de l'électricité aux propriétés mécaniques d'un milieu universel qui remplit l'espace et l'intervalle même des molécules matérielles des corps. On ne peut nier en effet que les théories de la chaleur et de la lumière conduisent d'une manière à peu près nécessaire à la conception d'un milieu, l'éther, que nous devons supposer élastique, puisqu'il transmet des vibrations, et matériel, puisque les corps pondérables agissent sur lui pour le mettre en vibration, pour réfléchir, réfracter, absorber les vibrations qu'il transmet : il serait particulièrement intéressant d'avoir recours à ce même milieu pour l'explication des phénomènes électriques, de la gravitation et aussi de l'élasticité des corps pondérables, mais cette synthèse est trop loin d'être réalisée pour que nous puissions faire autre chose que d'en signaler ici la possibilité.

Nous accepterons donc l'action à distance simplement comme un fait, et nous admettrons que l'action élémentaire de deux molécules matérielles A et B, dont les masses sont m et m', est une force attractive ou répulsive F, dirigée suivant la ligne AB qui les joint, et dont la grandeur est proportionnelle à chacune des masses agissantes, c'est-à-dire à leur produit mm', et à une fonction déterminée $f(r)$ de la distance $AB = r$ des deux molécules : $F = mm' f(r)$. Dans les cas qui vont nous occuper, on a simplement

$$f(r) = \frac{K}{r^2};$$

l'action attractive ou répulsive varie en raison inverse du carré de la distance. Cette loi particulière est appelée souvent *loi naturelle*, à cause de son application aux attractions des corps célestes.



GRAVITATION UNIVERSELLE.

de ce genre ce qui arriverait pour des corps très éloignés de la surface de la Terre, comme la Lune ou les astres, et, si nous sommes portés par induction à admettre que la pesanteur s'exerce sur eux, nous en ignorons *a priori* les conditions.

Il paraît aussi très probable que tous les astres offrent des phénomènes analogues à ceux que nous constatons ici, qu'il y a une pesanteur à leur surface, qu'elle est dirigée vers leur centre et qu'elle agit à une distance quelconque sur tous les autres corps célestes. C'est en se laissant guider par ces inductions que Newton fut conduit à penser que les astres s'attirent entre eux, que leurs mouvements sont déterminés par les actions exercées mutuellement des uns aux autres, et que le monde est régi par des forces provenant d'une cause unique, l'attraction.

S'il en est ainsi, les astres doivent éprouver des mouvements extrêmement complexes, puisque leur nombre est immense et que chacun d'eux obéit à l'influence de tous les autres. Cependant il est facile de voir que la question se réduit, pour une première approximation, à une simplicité inattendue. Les corps célestes se divisent, en effet, en deux classes : les uns, que l'on nomme *étoiles fixes*, sont placés à des distances tellement grandes du Soleil et de la Terre, que leur action peut être négligée, et les autres, qui sont comparativement plus rapprochés, constituent un groupe d'astres isolés des étoiles, mais dépendant les uns des autres : ce sont le Soleil et les planètes. Ce sont donc les seuls dont nous aurons à étudier les actions réciproques. Si ensuite nous les comparons entre eux, nous reconnaissons que le Soleil, étant incomparablement plus gros que les planètes, doit avoir dans le système une influence prépondérante, tellement qu'une planète comme la Terre éprouve du Soleil une attraction très-grande et des autres planètes une attraction négligeable. Nous sommes ainsi conduits à considérer, à titre de première approximation, le Soleil comme un centre unique d'action, et les planètes comme autant de corps indépendants les uns des autres et se mouvant suivant les mêmes lois que si chacun d'eux existait seul en présence du Soleil.

LOIS DE KEPLER. — Une fois que la question est réduite à ce

egré de simplicité, il n'y a plus qu'à étudier par l'observation e mouvement de chaque planète autour du Soleil considéré omme fixe; c'est ce qu'avait fait Kepler ([1]), et le résultat énéral de ses observations se résume en trois lois que nous llons énoncer :

1° *Les planètes décrivent des courbes planes, et les rayons vecteurs partant du centre du Soleil décrivent des aires proportionnelles aux temps.*

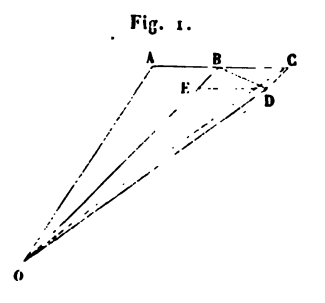
2° *Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.*

3° *Les carrés des temps de révolution des diverses planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Acceptons ces lois et voyons comment Newton ([2]) s'en est servi pour démontrer l'existence d'une force attractive exercée par le Soleil et trouver la loi des variations de cette force avec la distance.

L'ATTRACTION EST DIRIGÉE VERS LE SOLEIL. — Soient O (*fig.* 1) le centre du Soleil et A celui d'une planète à un moment déterminé. Pendant un temps infiniment petit, elle parcourra l'élément AB de sa trajectoire, et son rayon vecteur décrira l'aire AOB. Si aucune cause n'agissait sur elle, elle parcourrait, dans le temps infiniment petit suivant et égal au premier, un élément BC égal à AB et situé sur son prolongement, et son rayon vecteur décrirait l'aire BOC qui serait égale à AOB; mais il n'en est pas ainsi : la planète décrit un élément BD incliné sur le premier, d'où l'on peut déjà conclure qu'elle est soumise à une force qui agit à chaque instant sur elle. Pour avoir la direction de cette force,

Fig. 1.



([1]) KEPLER, *Astronomia nova, αἰτιολογητός, sive Physica cœlestis tradita Commentariis de motu stellæ Martis*. Pragæ, 1609. *Epitome Astronomiæ copernicanæ*. Lincii, 1618.

([2]) NEWTON, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. London, 1687.

remarquons que, d'après la première loi de Kepler, on doit avoir

$$ABO = BDO = BCO.$$

Les deux triangles OBD, OBC, étant équivalents, doivent avoir leurs sommets sur une ligne DC parallèle à OB, et, si nous achevons le parallélogramme EBCD, nous voyons que pour parcourir l'espace BD la planète a dû être soumise à sa vitesse initiale, qui l'aurait transportée de B en C, et à une force qui lui aurait fait franchir la ligne BE; cette force est donc dirigée vers le point O. Il est, par conséquent, démontré que les planètes, en se mouvant en ligne courbe, sont soumises à une force, et que, les aires étant proportionnelles aux temps, la force est dirigée vers le centre du Soleil. Cela justifie déjà une partie de l'hypothèse de Newton.

LOI DE L'ATTRACTION. — La deuxième loi de Kepler détermine la forme de la courbe parcourue; elle s'applique à des planètes dont l'excentricité est inégale, et nous sommes autorisés à penser qu'elle comprend, comme cas particulier, celui où l'ellipse dégénérerait en un cercle, bien qu'il n'y ait aucune planète qui réalise ce cas. En remarquant d'ailleurs que l'excentricité des orbites planétaires est toujours très petite, nous pouvons, dans une première approximation, admettre qu'elle est nulle et raisonner dans cette hypothèse : c'est ainsi que fit Newton.

Dans le cas où la planète parcourrait un cercle dont le Soleil occuperait le centre, désignons par R le rayon du cercle parcouru ou la distance de la planète au Soleil, par T le temps d'une révolution; la force à laquelle la planète est soumise produit l'accélération centripète de son mouvement; en désignant par m la masse de la planète, cette force est donc

$$F = m\frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

ou, pour chaque unité de masse de la planète,

(1) $$G = \frac{F}{m} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Comme il y a plusieurs planètes à des distances différentes R, R', R'', ..., faisant leurs révolutions dans des temps T, T', T'', ..., nous obtenons pour la valeur de l'attraction du Soleil sur l'unité de masse des diverses planètes aux distances R, R', R'', ... les quantités

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^2}, \quad \dots.$$

Cela posé, rappelons-nous qu'en vertu de la troisième loi de Kepler les carrés des temps des révolutions $T^2, T'^2, T''^2, \dots$ sont proportionnels aux cubes des distances des planètes au Soleil ou à $R^3, R'^3, R''^3, \dots$, ce qui donne la suite des rapports égaux

$$K = \frac{R^3}{T^2}, \quad K = \frac{R'^3}{T'^2}, \quad K = \frac{R''^3}{T''^2}, \quad \dots,$$

et, en divisant les équations précédentes par ces dernières, on a

$$G = \frac{4\pi^2 K}{R^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2 K}{R'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 K}{R''^2}, \quad \dots;$$

ce qui montre que *l'attraction exercée sur l'unité de masse à diverses distances est en raison inverse du carré de ces distances*.

Si nous voulons avoir les forces motrices F, F', F'', il suffit, d'après l'équation (1), de multiplier par les accélérations les masses m, m', m'', ... de chaque planète, ce qui donne

$$F = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}, \quad F' = 4\pi^2 K \frac{m'}{R'^2}, \quad F'' = 4\pi^2 K \frac{m''}{R''^2}, \quad \dots.$$

$4\pi^2 K$ représente l'attraction exercée par la masse entière du Soleil sur l'unité de masse de la planète à l'unité de distance, et, comme elle est la somme des attractions de tous les éléments du Soleil, elle est proportionnelle à la masse tout entière M de cet astre, et l'on peut poser $4\pi^2 K = M\varphi$, ce qui donne

$$A = M\varphi \frac{m}{R^2}, \quad A = M\varphi \frac{m'}{R'^2}, \quad A'' = M \frac{R''^2}{m''}, \quad \dots$$

Ainsi *l'attraction est proportionnelle au produit des masses en présence et en raison inverse du carré des distances.*

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que les planètes décrivent des cercles et non pas des ellipses, comme cela est réellement : nous n'avions pour but que de faire comprendre par une méthode approchée comment Newton est arrivé à la loi de l'attraction. En Mécanique, on traite le problème sans y apporter cette restriction, et l'on arrive aux mêmes conséquences par une démonstration irréprochable. Quelle que soit la marche que l'on suive, on démontre toujours : 1° que les planètes sont sollicitées par une force dirigée vers le Soleil; 2° que cette force est en raison inverse du carré des distances; mais il n'en résulte pas que cette force soit réellement le résultat d'une attraction de la matière. Il se peut même que la matière soit absolument passive et que l'éther dont l'espace est rempli et au milieu duquel les astres sont plongés soit la cause unique des actions apparentes qui se produisent entre eux. En résumé, nous reconnaissons qu'une force s'exerce entre les planètes et le Soleil, mais nous ne savons à quoi l'attribuer, et, quand nous disons qu'elle est due à une attraction de la matière, nous faisons purement et simplement une hypothèse pour expliquer une grande loi de la nature. Newton ne s'y était point trompé, car il n'a dit qu'une seule chose : c'est que tout se passe comme si cette attraction était réelle. Il convient de signaler et d'imiter cette réserve de Newton.

Une fois que l'on a montré l'existence et trouvé les lois de la variation de cette force, on peut se demander comment les planètes en sont venues à décrire autour du Soleil les courbes que Kepler a étudiées : c'est alors un problème de Mathématiques dont on va comprendre la possibilité. Si, à l'origine des temps, la Terre, par exemple, avait été placée sans vitesse initiale en présence du Soleil, également immobile, les deux astres, en s'attirant, auraient marché l'un vers l'autre jusqu'à se rencontrer. Mais, si la Terre avait reçu une impulsion initiale dans une autre direction que la ligne des centres, elle aurait décrit une courbe sous la double influence de sa vitesse première et de l'attraction solaire. Le calcul montre que cette courbe est toujours une section conique et le Soleil un des foyers de cette courbe, et, suivant les valeurs de la vitesse initiale, la section

conique peut être un cercle, une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Une fois placé sur cette courbe, l'astre la suit indéfiniment, revenant sans cesse dans le même chemin si la courbe est fermée, comme c'est le cas des planètes, et s'éloignant pour ne jamais revenir si c'est une parabole ou une hyperbole : il y a des comètes qui paraissent être dans ce cas. Mais ce n'est point là la solution complète du problème de l'Astronomie; on ne peut pas se contenter de considérer les planètes comme indépendantes les unes des autres, car évidemment l'une d'elles est soumise à l'action de toutes les autres en même temps qu'à celle du Soleil, ce qui fait que les lois de Kepler ne sont pas absolument réalisées et que toutes les planètes connues, au lieu de parcourir une ellipse rigoureuse, décrivent des courbes complexes. Alors le problème général de l'attraction des astres devient extrêmement compliqué, et il exige à la fois, pour être traité, le concours des Mathématiques, ce qui constitue la Mécanique céleste, et celui des observations précises, qui sont du domaine de l'Astronomie physique.

IDENTITÉ DE LA PESANTEUR ET DE L'ATTRACTION UNIVERSELLE. — Essayons maintenant de démontrer que la cause qui fait tomber les corps sur le globe est la même que celle qui produit ce que nous venons d'appeler l'*attraction :* c'est encore à Newton que l'on doit cette démonstration. La Terre possède un satellite, qui est la Lune, et les centres de ces deux astres sont à une distance moyenne égale à environ soixante fois le rayon moyen de la Terre. Astronomiquement parlant, cette distance est fort petite, ce qui fait que l'attraction de la Terre sur la Lune est beaucoup plus grande que celle du Soleil, et que l'on peut la considérer comme l'action unique à laquelle la Lune soit soumise. Cela n'est point vrai à la rigueur, mais c'est une approximation dont nous pouvons d'abord nous contenter. Il en résulte que la Lune doit décrire et décrit en effet une ellipse autour de la Terre considérée comme immobile. Admettons encore que cette ellipse soit un cercle, que la Terre soit sphérique aussi bien que la Lune, ce qui est sensiblement exact : après toutes ces restrictions nous sommes ramenés à

un problème théoriquement plus simple, mais qui, numériquement, s'écarte peu de celui que nous offre la nature.

A la surface de la Terre, l'accélération est $g = 9^m,8$; elle est le résultat de l'attraction de toute la masse terrestre, qui agit comme si elle était condensée à son centre, c'est-à-dire à une distance de la surface égale au rayon terrestre moyen r [1]. Le centre de la Lune est à une distance de la Terre représentée par soixante fois r; par suite, l'accélération de la pesanteur doit y être égale à $\frac{g}{(60)^2}$, si la loi de l'attraction est vraie.

D'un autre côté, cette accélération doit être représentée, comme pour toutes les planètes, par

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

et, en remplaçant R par $60r$ et T par le temps de la révolution de la Lune, qui est de (39343×60) secondes,

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 r \times 60}{(39343)^2 \times 60^2} = \frac{2\pi^2 r}{(39343)^2 \times 30}.$$

$2\pi r$ représente la circonférence terrestre, qui est de 40 millions de mètres, et l'on a

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{40000000\pi}{(39343)^2 \times 30}.$$

Cette expression de l'accélération doit être égale à $\frac{g}{60^2}$, et il vient

$$g = \frac{40000000\pi \times 120}{(39343)^2}.$$

En faisant le calcul, on a $g = 9^m,75$.

On retrouve donc, avec autant d'exactitude qu'on pouvait l'espérer, la valeur de l'accélération produite par la pesanteur, et l'on démontre, par conséquent, l'identité de la cause qui fait tomber les corps et qui retient la Lune dans son orbite : c'est la première vérification que Newton fit de son système.

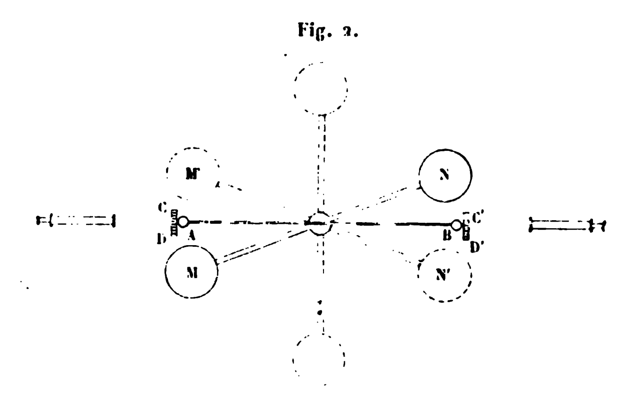
---

[1] Ce théorème sera démontré ultérieurement, à propos des phénomènes électriques.

EXPÉRIENCES DE CAVENDISH (1). — On ne s'est pas contenté d'admettre l'attraction d'après l'observation des phénomènes astronomiques : on a constaté encore qu'elle s'exerce réellement à la surface de la Terre et qu'une grosse masse de plomb y attire sensiblement une petite sphère de métal; on a mesuré cette action, et, la comparant à l'attraction terrestre, on a pu déterminer le poids du globe. Ces expériences ont été faites d'abord par Cavendish; mais l'idée ne lui en appartenait pas : elle est due à Mitchell, aussi bien que l'appareil dont Cavendish fit usage et qui lui fut légué. Ces expériences sont très délicates et comportent des détails très minutieux.

Un levier en sapin AB (*fig.* 2), léger et bien homogène, est

Fig. 2.



soutenu par son milieu à un fil métallique fin, fixé par le haut au plafond d'une chambre fermée. Aux deux extrémités du levier sont suspendues des balles identiques A et B, et deux lames d'ivoire CD, C'D' qui portent des divisions équidistantes. Ce fléau suspendu est entouré d'une boîte en acajou qui le préserve des agitations de l'air, et dont les extrémités, fermées par des glaces, laissent voir les divisions de CD et de C'D'; on les observe au moyen de lunettes à réticules, enchâssées dans le mur de la chambre, et l'on suit de l'extérieur tous les mouvements du levier.

(1) CAVENDISH, *Transactions philosophiques*; 1798. Reproduit dans le XVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 313.

Avant d'achever la description de l'appareil qui nous occupe, il faut commencer par étudier les conditions d'équilibre de ce levier AB. Appelons f la force qu'il faut appliquer à l'extrémité d'un levier de longueur 1, suspendu au même fil, pour le dévier d'un arc égal à l'unité; nous savons qu'il faudra une force fa pour le maintenir à une déviation a : cela veut dire que, dans l'appareil de Cavendish, la réaction de torsion du fil suspenseur équivaut à une force fa qui serait appliquée à un levier de longueur 1, ou à une force $F = \frac{fa}{l}$ agissant au centre de la balle A, si la demi-longueur AB est égale à l. On voit qu'elle est proportionnelle à un facteur constant et à la déviation a, c'est-à-dire au nombre de divisions n dont les mires CD, C'D' auront été déplacées. On peut donc écrire

$$F = kn.$$

k est déterminé par l'expérience (1).

(1) Pour mesurer cette force, nous supposerons qu'après avoir tordu le fil nous le laissions revenir à sa position d'équilibre : il décrira une série d'oscillations successives, isochrones, et dont le temps sera donné par une formule analogue à celle du pendule :

$$t = \pi\sqrt{\frac{2ml^2}{f}}.$$

m exprime la masse de chacune des balles A et B, et $\frac{f}{2ml}$ est la force accélératrice des oscillations. On peut remplacer m par sa valeur $\frac{p}{g}$ et tirer de la formule la valeur de f, ce qui donne

$$f = \frac{2\pi^2 pl^2}{g}\frac{1}{t^2}.$$

Comme p, l et g sont des quantités connues, on n'aura qu'à faire osciller le levier et à mesurer le temps t d'une oscillation pour pouvoir calculer f : je suppose donc que l'on ait fait préalablement cette mesure de t, qu'ensuite on dévie le bras de levier, et qu'on mesure le nombre n de divisions dont les mires CD, C'D' se sont déplacées; si les longueurs de ces divisions sont α, $\frac{n\alpha}{l}$ exprime la valeur de l'arc a en unités de rayon, et la réaction du fil équivaut à une force $\frac{fa}{l}$ ou à $\frac{fn\alpha}{l^2}$ appliquée à la sphère A. En remplaçant f par sa valeur,

Cela posé, revenons à l'appareil pour en compléter la description. Il y a deux grosses sphères de plomb M et N, qui pèsent chacune 158^kg et qui sont soutenues par une règle tournante que l'on fait mouvoir de l'extérieur sans entrer dans la chambre; on peut les placer dans trois positions : la première perpendiculaire à AB, les deux autres MN et M'N' qui sont fixes et symétriques par rapport à la position d'équilibre AB du levier. Quand ces sphères sont mises dans la première direction, elles agissent également sur les balles A et B sans les déplacer, et l'observateur, en visant sur les deux mires, détermine et note leur position d'équilibre; après quoi il dirige les sphères en MN. A ce moment, M attire A, N attire B, le fil se tord, le levier se déplace et atteint une deuxième position d'équilibre quand l'attraction de M sur A et celle de N sur B sont devenues égales aux deux forces F qui expriment la réaction du fil; on mesure alors au moyen de deux lunettes le nombre n des divisions parcourues par les mires, et les deux forces F ou les attractions auquelles elles font équilibre se calculent par la formule précédente

$$F = kn.$$

---

cette force est

$$\frac{fn\alpha}{l^2} = \frac{2\pi^2\alpha}{g}\frac{pn}{t^2};$$

enfin l'on peut remplacer cette force par deux autres appliquées chacune à A et à B, et égales à la moitié de la précédente. Soit F chacune de ces forces; on aura

$$F = \frac{\pi^2\alpha}{g}\frac{pn}{t^2}.$$

Dans l'appareil dont Cavendish se servait, la constante $\frac{\pi^2\alpha}{g}$ était égale à $\frac{1}{818}$, et l'on avait

$$F = \frac{1}{818}\frac{pn}{t^2}.$$

Il résultera donc de là que, si le levier vient à se déplacer, et que les mires CD, C'D' se soient écartées de n divisions, le fil réagira pour revenir à sa position d'équilibre, comme s'il était sollicité par deux forces appliquées l'une en A, l'autre en B, et égales toutes deux à $\frac{1}{818}\frac{pn}{t^2}$; on pourra donc les calculer si l'on connaît p, si l'on a mesuré au moyen des lunettes le déplacement n et si l'on a déterminé le temps t d'une oscillation du levier. On peut les exprimer par kn.

Au moment de l'équilibre, la distance des deux sphères M et A était connue. Désignons-la par d. On faisait ensuite une seconde observation en retournant les grosses sphères en M'N', et l'on prenait les moyennes. Cela suffit pour pouvoir calculer, comme nous allons le montrer, la constante de l'attraction, le poids total P' et la densité moyenne de la Terre.

1. Puisque, les sphères étant à une distance d, l'attraction sur A est F, elle serait Fd^2 si cette distance devenait égale à l'unité de longueur. Soient P et p les poids de la sphère M et de la balle A; on a, en désignant par K la constante de l'attraction,

$$Fd^2 = \frac{P}{g}\frac{p}{g}K,$$

$$K = \frac{Fd^2g^2}{Pp}.$$

2. Proposons-nous maintenant de déterminer le poids P' de la Terre. La force Fd^2 est proportionnelle à l'attraction $\varphi = \frac{pK}{g^2}$ de l'unité de poids sur la balle A et au poids P de la sphère M; donc on a

$$Fd^2 = P\varphi.$$

D'un autre côté, l'attraction de la Terre sur la balle A est égale au poids p de cette balle pour une distance égale au rayon terrestre R. A une distance égale à l'unité, elle serait pR^2 : elle est aussi proportionnelle à φ et au poids P' de la Terre, ce qui donne

$$pR^2 = P'\varphi.$$

De ces deux équations on déduit

$$\frac{F}{p} = \frac{PR^2}{P'd^2},$$

et, en remplaçant F par sa valeur trouvée d'après les lois de la torsion, on a

$$\frac{F}{p} = \frac{kn}{p} = \frac{PR^2}{P'd^2}.$$

Dans cette dernière équation, nk et d sont des résultats de

l'observation, P est un poids de 158kg, R est le rayon terrestre : on peut donc calculer le poids P′ de la Terre.

3. Comme $P' = \frac{4}{3}\pi R^3 D$, on peut obtenir la densité moyenne D du globe terrestre.

$$D = \frac{3P'}{4\pi R^3}$$

Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, nous avons omis un détail important sur lequel il faut revenir. On a vu que, pour mesurer n, il fallait observer les mires, d'abord au moment de leur équilibre naturel, ensuite quand elles ont été déplacées par l'attraction. Or Cavendish a reconnu que ces mires n'étaient jamais fixes, et qu'elles oscillaient toujours à droite et à gauche de la position d'équilibre qu'elles devaient prendre; cette position ne pouvait donc être mesurée directement, et il fallait la conclure en prenant la moyenne des écarts extrêmes successifs. Cela permettait d'ailleurs de faire à la fois la mesure du temps t des oscillations et celle des deux positions d'équilibre que l'on devait comparer.

Nous n'entrerons pas ici dans tout le détail des calculs relatifs à ces expériences; il nous suffira d'en avoir indiqué les principes. On pourra, du reste, consulter le Mémoire original de Cavendish.

Cavendish employa successivement deux fils différents : le premier, très fin, faisait une oscillation en quatorze minutes, et le nombre des divisions parcourues par le point de repos quand les masses étaient approchées était égal à 16. Avec le deuxième fil, qui était plus gros, on avait $t = 7$, $n = 5,7$. Mais, dans les deux cas, les valeurs de D ont été trouvées égales entre elles et à 5,48. En moyenne, la Terre est donc $5\frac{1}{2}$ fois plus dense que l'eau.

EXPÉRIENCES DE MM. CORNU ET BAILLE. — Depuis Cavendish, ces expériences ont été reprises plusieurs fois, d'abord par M. Reich (¹), qui a trouvé pour la densité moyenne de la Terre 4,49 et 5,56 dans deux séries différentes, ensuite par

(¹) REICH, *Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, mit der Drehwage;*

M. Baily (¹), qui en fut chargé par la Société astronomique de Londres et qui trouva pour moyenne de deux mille expériences le nombre 5,67. Enfin MM. Cornu et Baille (²) ont exécuté récemment sur le même sujet un travail très complet et qui peut passer pour définitif.

En discutant la formule qui exprime la déviation du levier, on reconnaît que *dans des appareils géométriquement semblables* (*le temps d'oscillation du levier restant le même*) *la déviation est indépendante du poids des boules suspendues et en raison inverse des dimensions homologues*. MM. Cornu et Baille ont mis à profit cette observation pour réduire au quart les dimensions de l'appareil primitif de Cavendish. Les boules attirées ne pèsent chacune que 109^{gr}; elles sont supportées par un levier d'aluminium de $0^m,50$ de longueur, suspendu à un fil de torsion en argent recuit de $4^m,15$ de hauteur. La durée d'oscillation double du fil et du levier est de $6^m,38$ environ. Enfin la masse attirante est constituée par une masse de mercure qui peut être contenue dans deux sphères creuses A et B de fonte de $0^m,12$ de diamètre, placées d'un même côté du levier, en regard des deux boules, et dont l'effet se détruit quand elles sont vides. En faisant passer tout le mercure d'abord dans A, puis dans B, et observant les positions d'équilibre du levier $a'b'$, $a''b''$ correspondantes, on double la déviation (*fig.* 3). Le déplacement de la masse attirante se fait par aspiration du mercure, et par suite sans secousses ni trépidations imprimées à l'appareil. Enfin, toutes les masses métalliques étant en communication avec le sol, on n'a pas à craindre les perturbations qui pourraient résulter d'une électrisation accidentelle des masses attirantes. Tout l'appareil était installé dans les caves de l'École Polytechnique.

Freiberg. 1838. Reproduit dans les *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft*, t. I; 1852.

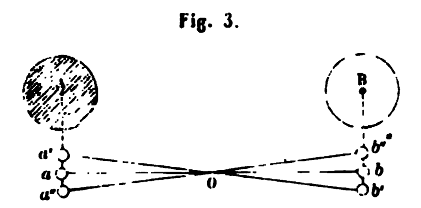
(¹) Baily, *Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the earth* (*Mem. of the royal astr. Society of London*, t. XIV; 1843).

(²) Cornu et Baille, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 954; t. LXXXVII, p. 571, 699 et 1001. Dans ces Mémoires on discute, en outre, les expériences antérieures et les conditions d'établissement d'une bonne balance de torsion.

[redacted]

Les déviations du levier étaient observées à l'aide d'un miroir porté par les boules attirées, d'une règle divisée et d'une lunette, c'est-à-dire par la méthode de Poggendorff (*voir* t. III, p. 31*), déjà employée par M. Reich. Mais MM. Cornu et Baille ont substitué à l'observation directe d'un grand nombre d'oscillations successives du levier l'enregistrement électrique

Fig. 3.



de la loi complète de ses oscillations, ce qui dispense l'observateur de compter le temps et qui permet en outre de conserver, sous forme de tracés graphiques, toutes les circonstances qui accompagnent l'observation.

Nous renverrons au Mémoire original pour de plus amples détails et nous nous bornerons à consigner ici le résultat général des observations. Une première série, faite en été, donne

$$\frac{K}{g^2} = 0,0^{11}6760, \qquad D = 5,56;$$

une seconde série, faite en hiver,



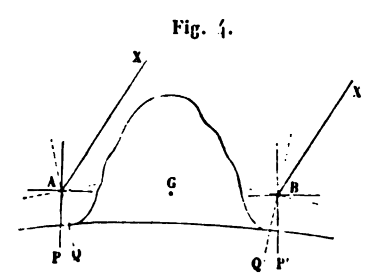
$$\frac{K}{g^2} = 0,0^{11}6836, \qquad D = 5,50.$$

Mais les auteurs croient les nombres de la première série préférables, le levier ayant subi entre les époques des deux observations une légère flexion qui rend compte de la divergence d'environ 1 pour 100 entre les deux résultats.

DÉVIATION DU FIL A PLOMB PAR LES MONTAGNES. — Il y a une deuxième méthode au moyen de laquelle on peut déterminer la densité moyenne de la Terre : nous n'en dirons que ce qu'il

faut pour en faire comprendre le principe. Bouguer [1] imagina de placer un fil à plomb dans le voisinage d'une montagne et de mesurer la déviation qu'il éprouve par l'attraction de la masse placée près de lui; mais ses expériences ont conduit à un résultat à peine sensible. Maskelyne [2] reprit cette idée et la réalisa avec beaucoup de soin et de succès. Il choisit en Écosse le mont Shéhallien, qui est isolé, dont la constitution géologique est bien connue et la forme peu compliquée : de façon qu'il put en mesurer le volume, en calculer le poids total, aussi bien que la position du centre de gravité. Cela fait, il prit deux stations A et B (*fig.* 4) dans un plan passant par le centre de

Fig. 4.



gravité G et parallèle au méridien du lieu, et il observa la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon pour les deux stations. Si la montagne n'existait pas entre ces deux lieux, les deux verticales AP et BP' feraient un angle égal à la différence des latitudes géographiques, déterminée par une triangulation; mais, l'attraction des masses interposées se faisant sentir, les verticales deviennent AQ et BQ', les deux horizons se relèvent vers la montagne, et la hauteur du pôle est augmentée à la station B et diminuée en A; on mesura ces hauteurs, et l'on en déduisit pour chaque station la déviation de la verticale.

Dès lors, à l'une des stations (*fig.* 5), par exemple, la Terre

(1) *La figure de la Terre déterminée par les observations de MM. Bouguer et de la Condamine*, t. IV, Section VII, p. 375; Paris, 1749. Newton affirmait déjà qu'une montagne de 3 milles anglais de hauteur et de 6 milles de largeur produirait une déviation de la verticale de 1' 15" (*A Treatise of the system of the world*, by sir Is. NEWTON. London, 1728).

(2) MASKELYNE et HUTTON, *Philosophical Transactions*, 1775 et 1778.

[redacted]

agirait suivant ABO si la montagne n'existait pas, et l'attraction serait $\frac{\varphi P'}{R^2}$. D'autre part, la montagne agit suivant la ligne AG, que nous supposerons horizontale, avec une force $\frac{\varphi P}{d^2}$, P désignant le poids de la montagne et d la distance du centre de gravité. Le pendule sera alors sollicité par deux forces perpendiculaires, prendra la direction de la résultante AC et fera avec AB un angle α qui est la déviation mesurée, et l'on a

Fig. 5.

$$\tang\alpha = \frac{\frac{P}{d^2}}{\frac{P'}{R^2}} = \frac{PR^2}{P'd^2}.$$

On calculera donc le poids de la Terre P', et l'on aura sa densité en remplaçant P' par $\frac{4}{3}\pi R^3 D$. Maskelyne trouva pour D un nombre égal à 5 environ; ce résultat, qui n'a évidemment qu'une valeur approximative, eu égard à l'incertitude des données qu'il met en œuvre, présente avec ceux, beaucoup plus précis, que nous avons déjà trouvés un accord qui paraîtra sans doute suffisant.

VARIATION DE LA PESANTEUR DANS L'INTÉRIEUR DU GLOBE. — Il convient de signaler encore des expériences exécutées en 1856 par M. Airy [1]. On reconnaît aisément que, si la Terre était homogène, la pesanteur devrait diminuer à mesure que l'on pénétrerait au-dessous de la surface, car l'action des couches supérieures se retranche de celle que produit la masse inférieure. Le calcul [2] montre que l'attraction exercée sur un point intérieur par la portion du globe comprise entre sa surface et une sphère concentrique passant par ce point est

---

(1) AIRY, *Philosophical Transactions*, 1856; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXIX, p. 1101; *Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série, t. XLIII, p. 381.

(2) *Voir* ce calcul au Chapitre du *Potentiel électrique*.

entièrement nulle; il ne reste, par conséquent, que l'attraction du noyau compris dans cette sphère. Mais, si la densité du globe va en croissant de la surface au centre, la pesanteur pourra augmenter jusqu'à une certaine profondeur; car si, d'une part, un point intérieur n'est plus soumis à l'attraction de l'enveloppe, d'autre part il se trouve plus rapproché des couches centrales, qui sont plus denses, et le dernier effet peut l'emporter sur le premier. M. Roche [1], en s'appuyant sur des considérations astronomiques, a trouvé que la densité D_1, à une distance R_1 du centre de la Terre, peut se représenter par $D_0(1 - 0,8R_1^2)$, en désignant par D_0 la densité au centre; R_1 est exprimé en fractions du rayon. En supposant la densité moyenne du globe égale à 5,5, on aurait 2,1 à la surface et 10,6 vers le centre. Il en résulterait que la pesanteur croît jusqu'à une profondeur égale au sixième du rayon; là g_1 surpasse g de plus de $\frac{1}{15}$, puis elle diminue. Au tiers du rayon, elle reprend la même grandeur qu'à la surface; enfin elle continue à décroître rapidement jusqu'au centre, où elle est nulle.

Les expériences de M. Airy ont justifié cette manière de voir. Il a placé deux pendules identiques, l'un sur le sol, l'autre au fond de la mine de Harton, à une profondeur de 384m. Chacun d'eux était muni d'une horloge astronomique; on observait leurs oscillations par la méthode des coïncidences, et l'on en mesurait la durée par les indications de l'horloge correspondante. Enfin, on comparait l'horloge inférieure à l'horloge supérieure au moyen de signaux électriques qui se transmettaient instantanément, et dont on notait le temps sur les deux horloges. On trouva de cette manière que le pendule inférieur avance en vingt-quatre heures sur le pendule supérieur de $2\frac{1}{4}$ oscillations, et l'on en conclut que la pesanteur augmente de la surface du sol au fond de la mine de $\frac{1}{19190}$. La formule de M. Roche donnerait $\frac{1}{19530}$.

---

[1] Roche, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXIX, p. 1215; 1854.

Il est facile de déduire de ce résultat la densité moyenne du noyau terrestre. En effet, l'accélération provenant du noyau seul a été mesurée par le pendule inférieur et trouvée égale à g_1, elle serait, à la surface extérieure de la Terre; $\frac{R_1^2}{R^2} = g'_1$. En retranchant g'_1 de g, qui a été obtenu par le pendule supérieur, on a donc l'accélération partielle qui résulterait de l'enveloppe, et, comme les attractions de l'enveloppe et du noyau se font comme si leurs masses étaient concentrées au centre de la Terre, elles sont proportionnelles à leurs poids ou aux produits de leurs volumes par leurs densités D et D_1; on a donc

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(R^3 - R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \frac{D}{D_1} = \frac{(R^3 - R_1^3)}{R_1^3} \frac{D}{D_1},$$

$$\frac{D}{D_1} = \frac{\frac{g}{g_1}\frac{R^2}{R_1^2} - 1}{\frac{R^3}{R_1^3} - 1}, \quad \frac{D_1}{D} = 1 + \frac{\frac{R}{R_1} - \frac{g}{g_1}}{\frac{g}{g_1} - \frac{R_1^2}{R^2}}.$$

Or, en étudiant les terrains placés au-dessus de la mine, on peut trouver la densité moyenne D de l'enveloppe au voisinage du lieu où l'on opère, et, comme les parties les plus rapprochées exercent une action prépondérante, on peut, sans erreur sensible, prendre cette densité moyenne D comme représentant celle de l'enveloppe tout entière. On peut donc calculer la valeur de D_1, c'est-à-dire de la densité moyenne du noyau. M. Airy la trouve comprise entre 6 et 7.

Il faut donc admettre que le globe contient dans sa profondeur des matières plus denses que celles qui composent sa surface. Quant à la vraie valeur de la densité moyenne de la Terre, on doit évidemment préférer les nombres obtenus par la méthode de Cavendish, qui n'introduit dans le calcul que des éléments susceptibles de détermination directe et précise. Nous adopterons le nombre 5,56, déduit des expériences de MM. Cornu et Baille.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX DE L'ÉLECTRICITÉ.

Historique. — Distinction des corps conducteurs et non conducteurs. — Distinction des deux espèces d'électricité. — Séparation des deux électricités par le frottement. — Hypothèse des deux fluides électriques.

HISTORIQUE ([1]). — Les anciens savaient qu'en frottant l'ambre jaune ([2]) avec une étoffe de laine on lui donne la propriété d'attirer les corps légers : c'est là tout ce qu'ils nous ont légué de connaissances sur un sujet qui devait prendre dans la suite d'immenses développements, et c'est tout ce que l'on en a su jusqu'au xvie siècle, où Gilbert ([3]), en répétant la même expérience avec le verre, le soufre, la gomme laque, etc., fit voir que cette vertu attractive, loin d'appartenir exclusivement à quelques substances exceptionnelles, peut, au contraire, se communiquer à une classe très nombreuse de corps et constitue une propriété générale qui mérite une étude suivie. C'est cette étude que nous commençons aujourd'hui.

Pour répéter l'expérience fondamentale de Gilbert, on prend

([1]) Pour tout ce qui concerne l'électricité statique, on consultera avec fruit l'excellent *Traité d'électricité statique* publié par M. Mascart, 2 vol. in-8°; Paris, 1876.

([2]) En grec ἤλεκτρον, d'où le nom d'*électricité*. L'ambre jaune est une résine fossile.

([3]) *De magnete magneticisque corporibus*. Londres, 1600.

un gros bâton de verre, de cire d'Espagne, de gomme laque ou de soufre; on le saisit d'une main par l'une de ses extrémités et on le frotte vivement dans toute sa longueur avec une étoffe de laine ou une peau de chat; on l'approche ensuite d'une table sur laquelle ont été déposés de la sciure de bois, des barbes de plumes ou en général des fragments déliés de corps légers, et on les voit s'envoler d'abord vers le cylindre frotté, qui les attire, puis se disperser dans toutes les directions par l'effet d'une répulsion qui, après le contact, succède à l'attraction. Cette répulsion a été observée pour la première fois par Otto de Guericke [1].

Quand, au lieu de présenter le bâton frotté à des corps légers, l'opérateur l'approche de sa joue sans la toucher, il éprouve un chatouillement comparable à celui que cause une toile d'araignée. Si le bâton a de grandes dimensions et qu'il ait été frotté pendant longtemps, ces impressions s'exagèrent; on sent une série de picotements douloureux, on entend une suite de décrépitations, et l'on voit dans l'obscurité de nombreuses étincelles lumineuses [2] éclater entre les organes et les parties du bâton qui les viennent approcher; après quoi ces parties ont perdu les propriétés qu'elles avaient reçu par le frottement et se retrouvent à leur état naturel.

En considérant ces manifestations dans leur ensemble, on reconnaît que, à la suite d'une action mécanique exercée sur eux quand on les frotte, les corps que nous considérons ont acquis la propriété de produire spontanément des actions mécaniques particulières, dont les principales consistent en attractions ou répulsions; ces actions s'exercent évidemment aux dépens de l'énergie mécanique absorbée dans l'acte du frottement, et, quand cette énergie est épuisée, les corps frottés se retrouvent à leur état naturel. C'est ce qui arrive par suite d'un contact prolongé des corps frottés soit avec nos organes ou avec le sol. Pendant qu'ils sont susceptibles d'attirer les corps légers, on dit qu'ils sont *électrisés* ou chargés d'*électricité*. Il convient d'observer que ces mots ne constituent pas une expli-

(1) OTTO DE GUERICKE, *Experimenta Magdeburgica*, Lib. IV, Cap. XV.
(2) Observées pour la première fois par Otto de Guericke.

cation ; ils signifient simplement que les corps ainsi désignés jouissent des propriétés que nous venons de constater ci-dessus.

Gilbert avait reconnu que, s'il existe un certain nombre de substances qui peuvent s'électriser, on trouve une catégorie plus nombreuse encore de corps incapables de recevoir cette propriété par le frottement : de ce nombre sont les métaux, les pierres, les organes des animaux et des végétaux. Il crut dès lors devoir partager les corps en deux grandes classes, comprenant, la première ceux qui s'électrisent, et on les appela *idio-électriques*, la deuxième ceux qui ne s'électrisent pas directement quand on les frotte : ils furent nommés *anélectriques*. Cette distinction était très naturelle ; mais on découvrit bientôt que les différences auxquelles elle correspond ne sont point aussi essentielles qu'elles le paraissent au premier abord.

DISTINCTION DES CORPS CONDUCTEURS ET NON CONDUCTEURS. — En 1727, le physicien Gray (1) électrisait un tube de verre creux qu'il avait fermé par un bouchon de liège, et il vit ce bouchon prendre la propriété d'attirer les corps légers toutes les fois que l'on frottait le tube, bien qu'il fût incapable d'acquérir cette propriété quand on le frottait directement ; on fut donc conduit à admettre qu'il prenait et gardait ensuite la propriété électrique, la recevant du verre par communication. Voulant étendre ces résultats, Gray attacha au bouchon une corde de chanvre dont la longueur était de 133^{m} ; il la tendit horizontalement en la soutenant par des rubans de soie qui la suspendaient au plafond de la salle, et, toutes les fois qu'il frottait le tube de verre, il voyait l'action électrique s'exercer dans toute l'étendue de la corde, jusqu'à son extrémité la plus éloignée. La première conséquence qui ressort de cette expérience capitale, c'est que la propriété électrique est susceptible de se transmettre par la corde jusqu'à des distances quelconques, et c'est ce qu'on exprime en disant que le chanvre est *conducteur de l'électricité*. Un accident qui survint com-

(1) *Philosophical Transactions*, 1730.

Liste de diverses substances par ordre de conductibilité décroissante.

CONDUCTEURS.

Métaux.	Végétaux.
Charbon calciné.	Animaux.
Plombagine.	Flamme.
Acides.	Vapeur d'eau.
Solutions salines.	Air raréfié.
Minerais métalliques.	Verre pulvérisé.
Eau (*non distillée*).	Fleur de soufre.

ISOLANTS.

Glace.	Soie.
Phosphore.	Diamant.
Chaux.	Mica.
Craie.	Verre.
Lycopode.	Jais.
Caoutchouc.	Cire.
Camphre.	Huiles fixes.
Marbre.	Essence de térébenthine.
Porcelaine.	Sulfure de carbone.
Bois sec et chauffé.	Gutta-percha.
Air et gaz secs.	Soufre.
Papier sec.	Résines.
Plumes.	Ambre.
Cheveux, laine.	Gomme laque.

Ces notions sur la conductibilité des corps vont nous co duire à quelques conséquences. Si nous touchons avec la ma ou avec un conducteur communiquant au sol un point d'ı corps électrisé, ce point cède, sous la forme d'une étincell l'électricité qu'il avait, elle chemine le long du conduit qui l est offert et arrive dans le sol où elle se distribue; là elle ces d'être sensible, puisqu'elle se répand sur l'immense étend de la terre : c'est pour cette raison que l'on donne à la terre nom de *réservoir commun*. C'est en établissant cette comm nication que l'on enlève l'électricité des points que l'on toucl et qu'on les ramène à l'état naturel, et c'est ce qu'on appel les *décharger*.

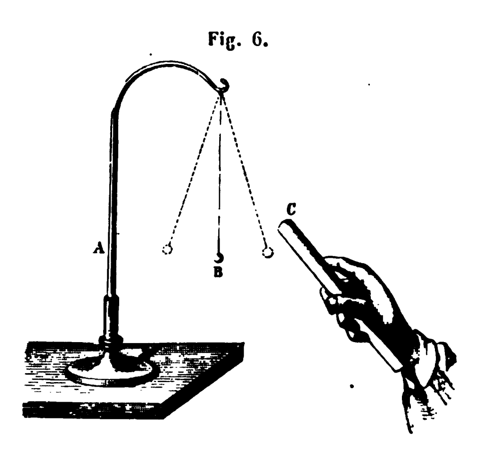
Mais les effets observés dans cette expérience sont essentiellement différents, suivant que le corps électrisé que l'on touche est conducteur ou non. S'il ne l'est pas, on ne prend l'électricité qu'aux points eux-mêmes sur lesquels se fait le contact, et les autres ne se déchargent pas; aussi l'étincelle qui jaillit est-elle à peine perceptible. Quand, au contraire, le corps électrisé est conducteur, il suffit de toucher un de ses points pour lui enlever la totalité de son électricité et le ramener à l'état naturel dans toutes ses parties; alors l'étincelle est allongée et jaillit avec un bruit sec semblable à celui d'un coup de fouet.

C'est en utilisant ces propriétés isolantes et conductrices que l'on parvient à transmettre et à retenir sur les appareils l'électricité dont on veut étudier l'effet. Si l'on veut donner de l'électricité à un corps, on le joint aux appareils qui la produisent par des tiges ou des chaînes de métal, et, pour l'y maintenir après l'y avoir amenée, on le soutient sur des supports qui ne la conduisent pas; ces supports sont habituellement des pieds de verre vernis à la gomme laque ou des cordons de soie attachés au plafond. Il faut encore se prémunir contre une autre cause de déperdition électrique qui vient trop fréquemment annuler les résultats : l'air est un corps isolant, quand il est sec; mais il cesse de l'être s'il est humide, et, dans ce cas, toute manifestation électrique disparaît rapidement. Outre cela, comme les isoloirs de verre sont hygrométriques, ils se couvrent de vapeur condensée pendant les temps humides et ils cessent de retenir l'électricité : d'où vient la nécessité de chauffer les appareils, de frotter les supports avec des étoffes séchées au feu et souvent d'enfermer les conducteurs dans des cloches de verre où l'on dépose des substances desséchantes. Après avoir indiqué ces règles pratiques, nous pouvons continuer l'étude des propriétés électriques.

DISTINCTION DES DEUX ESPÈCES D'ÉLECTRICITÉ. — Il nous faut d'abord revenir sur le phénomène de l'attraction des corps légers, pour l'analyser plus complètement. Suspendons à un support en verre A (*fig.* 6) une balle conductrice de moelle de sureau par l'intermédiaire d'un fil de soie très fin qui produit un isolement complet, puis faisons-la toucher par un bâton

électrisé quelconque. Après le contact, la balle aura reçu de l'électricité par communication, absolument comme la corde de chanvre en avait pris au tube de verre frotté dans l'expérience de Gray, et, puisque cette balle est isolée par le fil de soie, elle va garder cette électricité; on peut s'en assurer d'ailleurs en lui présentant de la sciure de bois qu'elle attirera. Une fois que l'on aura constaté qu'elle est réellement électrisée, on approchera de nouveau le bâton : le pendule sera repoussé très énergiquement, et cette répulsion durera tant qu'il restera

Fig. 6.



sur chacun des deux corps une quantité suffisante d'électricité. Cette expérience peut se faire et réussit également bien avec des cylindres de verre, de soufre, de cire, d'ambre, etc., et l'on peut dire généralement que deux corps chargés d'une électricité, qui a été donnée par communication de l'un à l'autre, se repoussent mutuellement.

Prenons maintenant deux bâtons, l'un de verre, l'autre de résine, électrisés tous deux par le moyen d'une étoffe de laine: commençons par toucher le pendule avec le verre, et, le laissant ensuite dans l'état électrique que ce contact lui donne, approchons alternativement de lui tantôt le verre, tantôt la résine : il sera repoussé par le premier, ce que nous savons déjà par l'expérience précédente; mais il sera attiré par le second. Inversement, ce même pendule, s'il a primitivement

touché la résine, sera repoussé par elle et attiré par le verre. Cette expérience capitale nous apprend que les deux bâtons exercent des actions opposées: il existe deux modes d'électrisation qui se développent par le frottement, l'un sur le verre, l'autre sur la résine; et, puisque nous n'avons imaginé l'électricité que pour rendre compte des attractions ou répulsions électriques, il nous est loisible d'attribuer les effets inverses que nous observons à deux électricités distinctes, l'une *vitrée*, l'autre *résineuse*. Comme, d'ailleurs, un corps électrisé ne pourra agir sur le pendule électrique que pour l'attirer ou le repousser, l'électricité dont il sera chargé sera nécessairement de même espèce que celle du verre ou de la résine, et nous ne pouvons concevoir un troisième mode d'électrisation.

L'expérience qui précède et son interprétation sont dues à Dufay ([1]), intendant du jardin du Roi. Nous pouvons les résumer par l'énoncé suivant : *Les corps chargés d'électricité de même nom se repoussent et ceux qui ont des électricités contraires s'attirent.*

SÉPARATION DES DEUX ÉLECTRICITÉS PAR LE FROTTEMENT. — Si l'on réfléchit maintenant aux conditions de l'expérience par laquelle on développe l'électricité, on voit que, les deux corps étant frottés l'un contre l'autre et l'un d'eux s'électrisant, il est extrêmement probable que l'autre s'électrise aussi; c'est ce dont on va s'assurer par l'expérience suivante. On se procure deux plateaux circulaires A et B (*fig.* 7) dont l'un est en verre, pendant que l'autre est formé par un disque de métal recouvert d'une étoffe de laine collée sur la surface : tous deux sont munis de manches isolants qui servent à les manœuvrer. On les fait frotter l'un contre l'autre, ensuite on les sépare vivement et on les présente alternativement à un pendule isolé que l'on a primitivement chargé avec l'électricité vitrée. Le plateau de verre repousse ce pendule et le disque de drap l'attire; mais le drap repousserait et le verre attirerait ce pendule s'il avait primitivement été chargé d'électricité résineuse. On

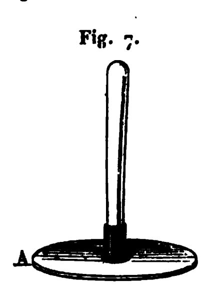
---

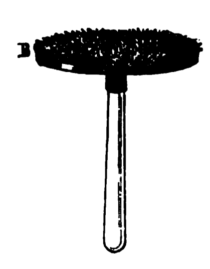
([1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 457; 1733.

voit donc que, si l'on frotte deux corps entre eux, tous deux reçoivent de l'électricité, et de plus elle est vitrée sur l'un et résineuse sur l'autre; on ne peut donc développer l'une sans obtenir l'autre en même temps, et c'est là une loi générale que tous les cas particuliers confirment.

Une conséquence forcée découle de la loi précédente : c'est qu'une même substance ne recevra pas toujours la même espèce d'électricité quand on la frottera avec des corps différents; car si le verre et la résine se chargent vitreusement et résineusement avec la laine, il faut que cette laine prenne dans le premier cas l'électricité résineuse et dans le second l'électricité vitrée; et si cette inversion se produit pour la laine, on prévoit que le verre et la résine eux-mêmes n'auront pas toujours la même espèce d'électricité quand ils seront frottés par d'autres corps que la laine : c'est, en effet, ce qui a lieu, et cela nous montre qu'il y a convenance à changer les deux mots par lesquels Dufay distinguait les deux espèces d'effets électriques. Nous appellerons à l'avenir électricités *positive* et *négative* celles que la laine développe sur le verre et la résine. Ces nouvelles désignations, qui viennent d'une théorie imaginée par Franklin [1], ont été consacrées par l'usage. Elles expriment très bien que le sens de la force exercée entre deux corps électrisés se renverse quand on change la nature de l'électricité de l'un quelconque des deux corps.

Fig. 7.





Pour compléter ce sujet, il faudrait pouvoir déterminer les conditions qui président à la distribution des deux électricités sur les deux corps frottés; malheureusement c'est une question extrêmement complexe. La seule chose que l'on ait pu faire a été de dresser le Tableau suivant, où les corps sont

---

[1] FRANKLIN, *Lettres sur l'électricité : Opinions et conjectures sur les propriétés et sur les effets de la matière électrique*; 1749.

rangés dans un ordre tel, qu'ils sont positifs quand on les frotte avec ceux qui les suivent et négatifs avec ceux qui les précèdent.

Poil de chat vivant.	Papier.
Verre poli.	Soie.
Étoffes de laine.	Gomme laque.
Plumes.	Résine.
Bois.	Verre dépoli.

D'après cela, le poil d'un chat vivant sera toujours positif et le verre dépoli toujours négatif. Mais ce Tableau est loin de résumer toutes les conditions qui déterminent la distribution des deux électricités. Une foule de circonstances, dont quelques-unes paraissent très insignifiantes, ont une influence capitale sur le résultat. Pour en donner l'idée, il suffira de citer les singularités que le verre présente. Canton (¹) prit un long cylindre de verre dont la moitié avait été dépolie à l'émeri; il le frotta dans toute sa longueur avec une étoffe de laine et trouva ensuite les parties polies chargées positivement, pendant que la moitié rugueuse était négative. Deux disques du même verre, entre lesquels il n'y a d'autre différence que le poli, s'électrisent entre eux et dans le même sens que précédemment. Quand il a été chauffé dans la flamme de l'alcool et refroidi ensuite, ou bien baigné dans un acide concentré et rincé à l'eau distillée, ce même verre devient négatif. Il en est encore de même s'il est chaud et frotté sur du verre froid; enfin deux disques iden-ques s'électrisent par leur frottement mutuel, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. On a remarqué en général que deux corps identiques peuvent s'électriser mutuellement et que celui qui s'échauffe le plus devient négatif : c'est ce qu'on réalise en frottant une petite surface sur une grande ou en promenant un long ruban de soie perpendiculairement à la largeur d'un autre ruban pareil. Ce sont là des faits qu'il faut

(¹) CANTON. *Transactions philosophiques*, 1753. *Voir* aussi, sur le signe de l'électricité prise par la peau de chat, les expériences de M. Hagenbach, *Carl's Repertorium*, t. VIII, p. 65, et *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. II, p. 36; 1872.

accepter et dont l'explication est évidemment encore impossible.

Mais s'il n'y a rien de général à dire sur le sens de cette distribution, il y aura une loi très remarquable qui règle les proportions des deux électricités développées. Que l'on frotte l'un contre l'autre deux plateaux quelconques isolés et pris à l'état naturel, on les trouvera chargés d'électricités contraires quand on les séparera; mais si on les réunit ensuite de manière à mettre toutes leurs parties frottées en contact, chacun d'eux reçoit peu à peu de l'autre et lui cède par communication la moitié de l'électricité qu'il possède, et tous deux finissent par se retrouver à l'état naturel comme ils y étaient avant d'avoir été frottés (1). Les deux électricités développées sont donc de telle nature et en telle proportion, que séparées elles produisent des actions attractives et répulsives opposées, et que réunies elles annulent réciproquement leurs effets. On dit alors que ces quantités d'électricités contraires sont *égales*, puisqu'elles s'annulent : il vaudrait mieux dire *équivalentes*, car il n'y a d'égalité qu'entre des choses de même expèce.

Tout ce que nous venons de découvrir par les expériences précédentes se réduit à cinq faits généraux, c'est-à-dire à cinq lois élémentaires qui sont les principes essentiels de toutes les actions électriques et qui serviront à prévoir les phénomènes qui nous restent à décrire. On peut résumer ces lois de la manière suivante : 1° les corps frottés attirent les corps légers, ils s'électrisent; 2° il y a des substances qui transmettent la vertu électrique et d'autres qui la maintiennent fixement sur eux : il y a donc des corps conducteurs et des corps isolants; 3° il existe deux modes différents d'électrisation ou deux électricités : les corps se repoussent ou s'attirent suivant qu'ils ont de l'électricité de même nom ou de nom contraire; 4° le frottement développe sur les deux substances qui se frottent des quantités équivalentes d'électricités opposées; 5° les électricités contraires en proportions équivalentes détruisent leurs effets en se réunissant.

Jusqu'à présent nous nous sommes borné à exposer les

(1) *Œpini tentamen theoriæ electricitatis et magnetismi*, p. 63; 1759.

phénomènes électriques tels que l'expérience nous les a montrés, et nous avons pris le soin de n'y mêler aucune considération théorique destinée à nous les expliquer; c'est qu'en effet il y a dans ces actions tant d'inconnu et tant d'imprévu, que, pour nous en représenter la cause, il n'y a d'autres ressources que celles des hypothèses, et qu'en nous y abandonnant nous courons le danger à peu près certain de nous tromper. On ne s'est point arrêté devant ce danger, et l'on a imaginé un système qui coordonne les faits avec assez de commodité, qui a tout le degré de simplicité possible et qu'il faut maintenant exposer, non qu'on le croie démontré, ou qu'on le considère même comme probable, mais parce qu'il a été longtemps accepté par les physiciens et qu'il a introduit dans le langage des expressions consacrées auxquelles il faut se conformer. Une fois qu'on ne le considère plus que comme hypothétique et provisoire, il n'y a aucun inconvénient à le conserver.

HYPOTHÈSE DES DEUX FLUIDES ÉLECTRIQUES. — I. On admet que tous les corps à l'état naturel contiennent en eux une quantité indéfinie, ou au moins qu'on ne peut épuiser, d'une matière subtile et sans poids, que l'on désigne sous le nom de *fluide électrique neutre*.

II. Ce fluide est complexe; c'est un corps formé par la réunion de deux espèces de molécules, les unes *positives*, les autres *négatives;* quand elles sont réunies, le corps qui les contient est à l'état naturel; quand il y a un excès plus ou moins grand de l'une ou de l'autre espèce de molécules, le corps est plus ou moins électrisé, positivement ou négativement.

III. Les deux fluides peuvent circuler avec une grande rapidité à travers certains corps qui sont *conducteurs;* mais ils restent fixés sur les molécules des substances *isolantes*, sans pouvoir cheminer d'un point à un autre.

IV. Quand on frotte deux corps l'un sur l'autre, le fluide neutre se décompose, les molécules positives passent d'un côté et les négatives de l'autre; dès lors les deux corps se chargent d'électricités contraires; dès lors aussi, quand on les

réunit après le frottement, ils doivent se remettre à l'état naturel, puisque les deux fluides se recombinent pour reproduire l'électricité neutre.

V. On admet que les molécules de même nom se repoussent, et que les fluides de nom contraire s'attirent, en vertu d'une affinité spéciale qui tend à les réunir quand ils sont en présence et que le frottement parvient à vaincre. Si cela est ainsi, deux corps électrisés avec des fluides de même nom ou de noms contraires devront se repousser ou s'attirer, c'est-à-dire s'éloigner ou se rapprocher sous l'influence des actions que les fluides exercent entre eux, actions qui entraînent la matière elle-même.

Ce système a été imaginé par Symmer [1]; ce n'est pas le seul que l'on ait inventé, mais celui qui a trouvé le plus de crédit, malgré ce que l'hypothèse de l'existence du fluide neutre présente de difficultés graves. On voit que ce système ne fait que traduire les lois générales que nous avons exposées, en les faisant dépendre de propriétés que l'on attribue à des fluides imaginaires. On verra par la suite qu'il explique aisément la plupart des effets électriques qu'il nous reste à faire connaître.

(1) Symmer, *Philosophical Transactions*; 1759.

[redacted]

CHAPITRE II.

LOI DE COULOMB.

Balance de torsion. — Loi des répulsions. — Loi des attractions. — Méthode des oscillations. — Quantités d'électricité. — Expériences de Coulomb relatives aux quantités d'électricité. — Recherches récentes sur la loi de Coulomb.

Après avoir reconnu le sens des actions électriques, il faut chercher à déterminer les lois numériques qui les règlent. Dans ce sujet d'études, nous devons nous attendre à rencontrer de grandes difficultés, car les forces que nous allons mesurer sont extrêmement petites, et, d'un autre côté, elles diminuent graduellement pendant les expériences, puisque les corps perdent assez rapidement l'électricité qu'on leur a donnée. Coulomb parvint néanmoins à comparer ces forces par un procédé qui ne laisse rien à désirer sous le rapport de l'exactitude et que nous connaissons déjà pour l'avoir employé à mesurer l'attraction universelle. Concevons un fil métallique extrêmement fin, fixé à son extrémité supérieure et supportant à l'autre bout une aiguille horizontale isolante terminée par une balle de sureau; si nous touchons cette balle avec un corps électrisé, il la repoussera en déviant l'aiguille, et la torsion que le fil éprouvera agira pour ramener la balle dans sa position première. On pourra donc équilibrer la répulsion électrique par la force de torsion, et, comme celle-ci est proportionnelle à l'angle de torsion, on comparera les forces électriques en comparant les angles dont il faudra tordre le fil pour les équilibrer.

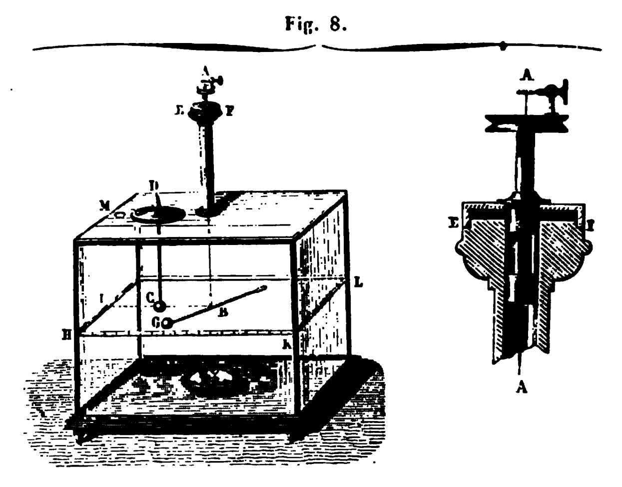
Balance de torsion. — La balance de torsion que Coulomb (¹)

(¹) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 370; 1785. La balance employée

construisit dans ce but est renfermée dans une grande cage en verre (*fig.* 8) : sur le couvercle s'élève verticalement un tube, et au haut de celui-ci on voit un treuil A qui soutient le fil métallique AB. Ce treuil, qui peut tourner dans sa monture, sert à orienter l'aiguille et à la placer dans la direction initiale BC, vis-à-vis du point I, qui est le zéro des divisions.

Le fil AB qui descend dans la cage est la pièce essentielle de l'instrument. Un de ceux que Coulomb employa était en

Fig. 8.



argent, et si fin, qu'une longueur de 1^{m} ne pesait que $0^{gr},01$; quand il était placé dans la balance, il ne fallait pour le tordre de 1° qu'une force égale à $\frac{1}{2300}$ de milligramme, appliquée à la boule G. La réaction qu'il exerçait, après avoir été tordu, était donc extrêmement faible et tout à fait comparable aux répulsions électriques. L'aiguille BG, qui tend le fil, devant être à la fois parfaitement isolante et très légère, Coulomb la fit d'une paille enduite de cire d'Espagne et terminée par une aiguille de gomme laque. A l'une des extrémités

par Coulomb était cylindrique et différait par plusieurs détails de construction de celle qui est figurée ci-contre.

il colla une petite balle de sureau G et à l'autre, pour faire contrepoids et éteindre les oscillations, un disque de papier passé à la térébenthine. Une petite pièce de bois D supporte un petit cylindre terminé par de la gomme laque à laquelle est fixée la balle de sureau C. Elle se trouve en regard de la première et reste, pendant les expériences, fixement placée vis-à-vis le point I. Avant de commencer les mesures, on enlève la balle fixe; on fait tourner le treuil A pour amener l'aiguille BC en équilibre vis-à-vis du point I, puis on replace la boule fixe, ce qui écarte un peu la balle mobile, et toutes deux se tiennent au contact, un peu pressées l'une contre l'autre, par la légère torsion qu'éprouve le fil. Cela fait, on électrise une grande épingle isolée par un manche de cire d'Espagne où elle est implantée par sa pointe; on l'introduit dans la balance par un trou M disposé à cet effet, et aussitôt qu'elle a touché l'une des balles elles s'électrisent et se repoussent toutes deux; l'aiguille se déplace en tordant le fil et, après quelques oscillations, elle se fixe en BG : à ce moment, la force de torsion fait équilibre à la répulsion électrique. On ne tarde pas à reconnaître que la distance des deux balles diminue peu à peu : cela tient à la déperdition progressive de l'électricité, déperdition qui est très rapide dans l'air humide, mais fort lente dans l'air sec; aussi doit-on prendre la précaution essentielle de placer dans la cage, longtemps avant d'opérer, des substances desséchantes, comme le chlorure de calcium, et alors les pertes deviennent assez faibles pour que les résultats ne soient pas sensiblement altérés par elles.

Il faut, maintenant, pouvoir apprécier dans chaque cas la distance CG des deux balles, et changer à volonté la torsion du fil; il faut conséquemment adapter à l'appareil deux systèmes de divisions. Le premier est tracé sur une bande de papier HKL collée sur la cage à la hauteur des balles; les traits qu'elle porte partent du zéro I qui est tracé sur le milieu, ils se continuent à droite et à gauche et mesurent en degrés les angles d'écart CBG : cela revient à dire que les longueurs des divisions, à partir du point zéro, sont les tangentes des angles d'écart. Pour apprécier ces angles quand l'aiguille s'est déviée, on place l'œil dans la direction prolongée de cette aiguille

et on lit les numéros des divisions qui se trouvent dans le rayon visuel.

Le deuxième système de division, qui est destiné à mesurer et à faire varier la torsion du fil, est placé au sommet de l'appareil; la pièce AEF (*fig.* 8), qui porte le fil, s'emboîte en EF sur la douille qui termine le tube de verre, peut tourner sur elle à frottement doux, et les contours de ces deux pièces portent, l'une un cercle divisé, l'autre un vernier qui le parcourt. On peut donc, si la boule a été écartée jusqu'en G par la répulsion électrique, la ramener vers C en tournant le micromètre supérieur de G vers C, ou augmenter la distance CG en tournant inversement l'appareil. L'angle de rotation se mesure dans tous les cas par le déplacement du vernier.

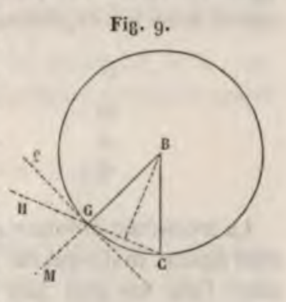
LOI DES RÉPULSIONS. — Tel est, dans son ensemble, l'appareil de Coulomb; nous n'avons plus qu'à indiquer comment on va s'en servir, et nous supposerons d'abord que, les deux boules ayant été chargées d'une électricité commune, on veuille mesurer leur répulsion à diverses distances. Dans une expérience de Coulomb, l'angle initial d'écart fut de 36°, et à ce moment la torsion du fil était elle-même de 36°. Alors on tourna le micromètre supérieur de G vers C, ce qui força les balles à se rapprocher, et, quand elles furent à 18° l'une de l'autre, on mesura la rotation du micromètre qui fut trouvée de 126°. Ici le fil a éprouvé deux torsions, l'une parce que le micromètre supérieur a marché de 126°, de G vers C; l'autre parce que l'aiguille inférieure a été déplacée de 18° de C en G, ce qui a produit une torsion totale égale à la somme 126 + 18 de ces angles, ou à 144°. Aussitôt que cette mesure est terminée, on continue de déplacer le micromètre dans le même sens jusqu'à réduire l'angle d'écart à $8\frac{1}{2}$ degrés, ce déplacement est de 567°, et la torsion est alors égale à 567 + $8\frac{1}{2}$ degrés; ou à $575\frac{1}{2}$ degrés. Nous résumons ces divers résultats par le Tableau suivant, dans lequel on a d'un côté les angles d'écart et de l'autre les angles de torsion; l'on y verra que, les premiers variant à peu près comme $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, les derniers suivent sensiblement la

proportion des nombres 1, 4, 16; c'est-à-dire que les arcs de torsion sont en raison inverse des carrés des angles d'écart.

Angles d'écart.	Arcs de torsion.
36	36
18	144
8 ½	575 ½

Si l'on remarque que les forces répulsives et les distances sont à peu près proportionnelles aux arcs de torsion et aux angles d'écart, on verra qu'au degré d'exactitude que comporte ce genre d'expériences les forces répulsives sont en raison inverse du carré des distances. Toutefois il convient d'interpréter les expériences précédentes de la manière la plus rigoureuse possible, et c'est ce que fit Coulomb. A cet effet, considérons une coupe horizontale de la balance (*fig.* 9); représentons par BC la position initiale de l'aiguille, et par BG sa direction quand elle est repoussée; soient α l'angle d'écart CBG et A la torsion du fil. Si nous désignons par F la force répulsive à l'unité de distance, elle devra, si la loi précédente est exacte, être égale à $\frac{F}{\overline{CG}^2}$ entre les boules C et G et être dirigée suivant GH; on pourra la décomposer en deux autres, l'une dirigée suivant GM, qui sera sans effet pour écarter la boule, l'autre agissant suivant GK, tangentiellement au cercle; celle-ci sera

Fig. 9.



$$\frac{F}{\overline{CG}^2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{F}{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

en désignant par r le rayon du cercle ou la longueur de l'aiguille. Mais en même temps que la boule tend à marcher suivant GK par l'influence de cette force, elle est ramenée dans la direction opposée par la réaction de torsion du fil. Cette dernière, qui est proportionnelle à l'angle de torsion A, peut

se représenter par KA, et, l'équilibre ayant lieu, on a

$$\frac{F}{4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2} = KA,$$

d'où l'on tire

$$\frac{F}{4r^2K} = A \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Or, le premier membre étant constant, le deuxième devra l'être également si la loi précédente est vraie. Voici le résultat du calcul pour les expériences précédentes :

α.	A.	$A \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.
36	36	3,614
18	144	3,568
8 ½	575 ½	3,169

La troisième colonne nous donne des nombres qui devraient être égaux, mais qui en réalité diminuent du premier au dernier. Cela ne doit pas nous étonner, car, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, il y a de la première à la dernière expérience une perte d'électricité qui diminue l'angle d'écart, et qui se fait sentir dans le résultat du calcul. Nous verrons, en outre, que la loi de Coulomb doit sensiblement cesser d'être applicable quand les balles se rapprochent beaucoup. Dès lors, nous admettrons que, sans ces causes de perturbation, les nombres calculés seraient égaux, et nous énoncerons la loi suivante: *La répulsion de deux balles, électrisées par un contact commun, est en raison inverse du carré des distances de leurs centres.*

LOI DES ATTRACTIONS. — Après avoir trouvé la loi des répulsions, il faut recommencer la même étude pour le cas où les deux balles auraient reçu des électricités contraires et s'attireraient. Les expériences sont extrêmement délicates et ne peuvent réussir qu'à la condition de tendre verticalement dans la balance entre les deux boules qui s'attirent un fil de soie qui les empêche de se réunir, ce qui pourrait arriver souvent et compromettrait le succès.

On commencera par électriser négativement la balle mobile, puis on l'écartera de sa position première d'un angle c, en tournant du même angle le micromètre supérieur; ensuite on électrisera positivement la balle fixe, en la touchant avec la tête d'épingle isolée. L'attraction se manifestera aussitôt de façon à réduire l'angle de déviation à une valeur plus petite a et à tordre le fil d'une quantité $c-a$. Si nous admettons: 1° que la distance est proportionnelle à l'arc a; 2° qu'on peut confondre la direction de la corde et celle de la tangente à l'arc; 3° enfin que l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, $\frac{F}{a^2}$ représentera la force qui tend à réunir les balles, et, $K(c-a)$ étant celle qui agit pour les écarter, l'équilibre aura lieu quand

$$\frac{F}{a^2}=K(c-a) \quad \text{ou} \quad \frac{F}{K}=a^2(c-a).$$

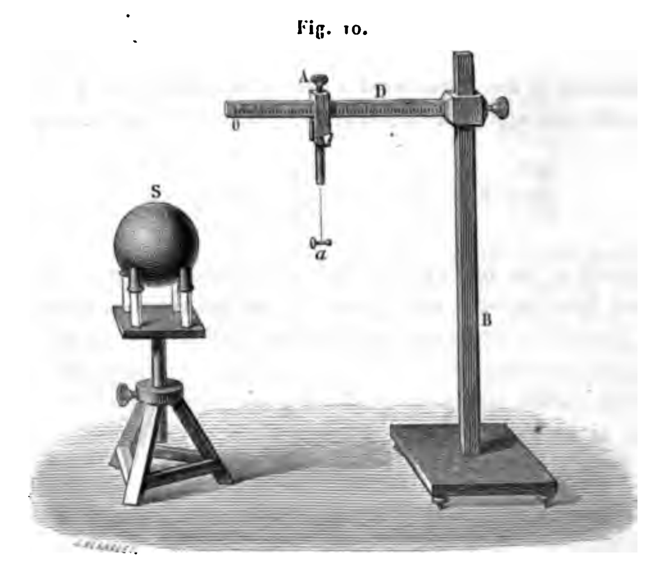
On connaît c, on mesurera a et l'on calculera $a^2(c-a)$. Ensuite on fera varier c, on répétera la même mesure de a et le même calcul, et l'expérience prouvera que $a^2(c-a)$ est sensiblement constant; d'où l'on conclura que la force attractive entre des balles chargées de fluides de noms contraires varie suivant la même loi que la force répulsive entre deux corps chargés du même fluide.

Pour que l'expérience réussisse, il faut que $\frac{F}{K}$ puisse devenir égal à $a^2(c-a)$, ce qui ne sera possible que lorsqu'on aura donné à c une valeur suffisamment grande. En effet, lorsque a augmente, $a^2(c-a)$ croît d'abord, puis diminue, en atteignant un maximum quand la différentielle de cette expression est nulle, c'est-à-dire quand $2a(c-a)-a^2=0$. Ce maximum a lieu pour $a=\frac{2}{3}c$, et sa valeur est $\frac{4}{27}c^3$. Si donc on a donné à a une valeur telle que $\frac{4}{27}c^3$ soit plus grand que $\frac{F}{K}$, l'équilibre pourra se réaliser; si au contraire $\frac{4}{27}c^3$ est plus petit que $\frac{F}{K}$, cet équilibre ne sera pas possible et la balle mobile se préci-

pitera sur la balle fixe. C'est pour empêcher cette réunion que l'on tend un fil de soie dans la balance.

MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — Pour confirmer ces résultats, Coulomb fit une nouvelle série d'expériences, par un procédé tout à fait différent et qui est une application d'une méthode générale que nous avons indiquée précédemment ([1]). Il prit une sphère métallique S, de 1 pied de diamètre, parfaitement isolée et chargée d'électricité (*fig.* 10). Il plaça ensuite vis-à-vis

Fig. 10.



de cette sphère un pendule *a* formé par une aiguille horizontale en gomme laque, terminée par un disque de papier doré de 7 lignes de diamètre et soutenue par un fil de cocon de 8 pouces attaché à un support A, de telle sorte que le prolongement de l'aiguille passât sensiblement par le centre de la sphère S; il chargea le pendule avec une électricité opposée à celle de S, et il le fit osciller. Nous démontrerons ultérieurement ([2]) que, si la loi des rapports inverses des carrés de la

([1]) *Voir* 1er fascicule, p. 119.
([2]) Chapitre *du Potentiel*.

distance est vraie, l'action exercée par l'électricité de la sphère sur le pendule doit être la même que si tout le fluide était condensé au centre S. Comme, d'un autre côté, l'aiguille de gomme laque était peu longue et que les oscillations avaient peu d'amplitude, on pouvait admettre que la force qui produit le mouvement était parallèle à elle-même dans toutes les positions de l'aiguille, et que celle-ci oscillait, comme le pendule géodésique, suivant la formule (1)

$$T = n\pi\sqrt{\frac{\Omega}{Fl}},$$

dans laquelle T exprime le temps de n oscillations, l la longueur de l'aiguille jusqu'au centre du disque de papier doré, F la force attractive exercée par la sphère sur le disque. En changeant ensuite la distance, qui était d, jusqu'à la rendre égale à d', on répète la même expérience, on observe de nouveau le temps T' de n oscillations, et l'on a

$$T' = n\pi\sqrt{\frac{\Omega}{Fl}};$$

puis, en comparant les temps,

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{F'}{F}.$$

Or l'expérience montre que les temps T et T' sont proportionnels aux distances d, d' des centres de la sphère S et du disque et l'on conclut que

$$\frac{F'}{F} = \frac{d^2}{d'^2},$$

c'est-à-dire que les forces attractives sont en raison inverse des carrés de la distance.

Coulomb comptait les durées à l'aide d'un chronomètre et mesurait les distances sur la règle D. A cet effet, on observe la division de la règle à laquelle s'arrête la pince A quand le disque de clinquant touche la sphère S, et une seconde lecture donne

(1) *Voir* 1er fascicule, p. 120.

la distance du disque à la surface de la sphère : il faut y ajouter le rayon de celle-ci pour avoir la distance au centre.

Voici le résultat de quelques expériences; on voit que les durées observées et calculées de 15 oscillations sont très sensiblement égales.

Distances.	Durée de 15 oscillations observée.	calculée.
9............	20ˢ	20ˢ
18............	41	40
24............	60	54

Les différences entre le calcul et l'observation sont du même ordre que dans les expériences précédentes et sont dues aux mêmes causes perturbatrices, c'est-à-dire à la déperdition de l'électricité et aussi à la distribution inégale des fluides à diverses distances.

Si l'on voulait comparer les répulsions à diverses distances, il suffirait de charger de fluides de même nom les deux appareils opposés; dans ce cas, l'aiguille se retournerait, mais elle oscillerait encore suivant les mêmes lois.

QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ. — Les expériences précédentes nous font connaître la loi des répulsions et des attractions de deux corps dont la distance change; il convient aussi de savoir ce qui arrive quand on communique à l'un des corps une électrisation de plus en plus intense. Pour énoncer à cet égard une loi précise, il faut d'abord définir ce qu'on entend par une quantité d'électricité, et savoir comment on la mesure.

Nous dirons que deux corps A et B de petites dimensions, mais de forme arbitraire, possèdent des charges électriques égales quand, placés successivement à la même distance d'un troisième C, électrisé dans le même sens, ils exercent la même répulsion. Si la force répulsive exercée par A est double, triple, etc., de la répulsion exercée par B, on dit que la charge de A est double, triple, etc., de celle de B. Ainsi la notion de quantités d'électricité est fournie par la considération de phénomènes purement mécaniques, et la mesure de ces quantités n'implique pas la connaissance des moyens de produire sur un corps une charge électrique déterminée.

On prendra pour unité d'électricité *la charge qu'il faut communiquer individuellement à deux petites sphères* A *et* B *B pour que, placées à l'unité de distance, elles exercent l'une sur l'autre une force répulsive égale à l'unité de force.* Il convient de choisir comme unités de longueur et de force des quantités qui se correspondent dans notre système métrique, par exemple le décimètre et le kilogramme, le centimètre et le gramme, le millimètre et le milligramme. Les valeurs numériques assignées à une même quantité d'électricité varieront avec le choix de ces unités, en raison inverse de l'unité de longueur et de la racine carrée de l'unité de force [1].

Considérons deux petits corps A et B possédant une charge égale à l'unité; puisqu'à la distance 1 ils exercent une répulsion 1, à une distance quelconque r ils exerceront, d'après la loi de Coulomb, une force répulsive $\frac{1}{r^2}$ Si l'on rend la charge de A m fois plus grande sans toucher à celle de B, la force répulsive devient $\frac{m}{r^2}$, d'après la définition des quantités d'électricité; enfin, si l'on fait la charge de B égale à m', la répulsion est $\frac{mm'}{r^2}$. Considérons comme positives les forces qui tendent à rapprocher les deux corps, comme négatives celles qui tendent à les écarter, nous aurons enfin

$$f = -\frac{mm'}{r^2}. \tag{1}$$

L'expression (1) convient à tous les cas. Si m et m' sont tous deux positifs ou négatifs, le second membre de (1) est négatif et la force f est répulsive; si m et m' sont de signe contraire, le second membre est positif et la force est attractive. La formule (1) est donc l'expression analytique de la loi de Coulomb.

EXPÉRIENCES DE COULOMB RELATIVES AUX QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ. — Les considérations qui précèdent ne nous apprennent pas comment, dans la pratique, on pourra opérer sur une

---

(1) D'après les principes exposés dans le 1er fascicule de ce Volume, p. 61.

quantité d'électricité double d'une autre par exemple. L'expérience suivante, due à Coulomb, va nous éclairer sur ce point.

Chargeons à la manière ordinaire les deux balles de la balance de torsion avec la même électricité, et, après qu'elles se seront repoussées, diminuons l'angle d'écart par la torsion du fil jusqu'à le réduire par exemple à 28°. Soit 148° la torsion totale. Touchons alors la boule fixe C avec une autre C′ qui soit à l'état neutre et absolument identique. Puisque l'électricité se répand sur des conducteurs en contact, les deux boules se trouveront désormais électrisées, et par raison de symétrie on doit admettre qu'elles le seront également. Si l'électricité était une matière, comme on l'admettait du temps de Coulomb, la quantité d'électricité de C se serait *partagée* entre C et C′, chacune des deux boules aurait après le contact une charge égale à la moitié de la charge primitive de C, et la répulsion entre C et G devrait être réduite à moitié; mais, dans l'ignorance où nous sommes de la vraie nature de l'électricité, nous ne devons rien préjuger à cet égard et recourir à la mesure de la force répulsive. Retirons donc la balle C′; nous constaterons que la répulsion a diminué et que, pour maintenir C et G à 28°, il ne faut plus qu'une torsion totale de 72°; 72 étant sensiblement la moitié de 148, nous devons en conclure que la quantité d'électricité conservée par C après le contact est bien la moitié de sa charge primitive, et plus généralement que, quand on touche un corps électrisé A avec un corps B à l'état neutre, la somme des charges des deux corps après le contact est égale à la charge primitive de A. L'expérience confirme que quand n corps, possédant des charges $m, m', m'', \ldots$, sont mis en contact, ils prennent des charges $m_1, m'_1, m''_1, \ldots$, telles que

$$m + m' + m'' + \ldots = m_1 + m'_1 + m''_1 + \ldots$$

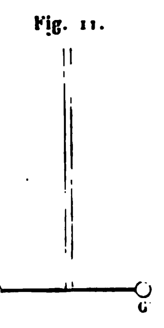
La somme algébrique des charges d'un nombre quelconque de conducteurs isolés n'est pas altérée quand on les met en contact d'une manière quelconque. La matérialité de l'électricité, telle qu'on l'admet dans l'hypothèse des fluides, n'est donc pas en contradiction avec la loi expérimentale du partage de l'électricité entre les corps conducteurs. C'est la seule con-

clusion que l'on puisse tirer des expériences de Coulomb dont nous venons de rendre compte.

RECHERCHES RÉCENTES SUR LA LOI DE COULOMB. — Les expériences de Coulomb ont été faites avec un soin et des précautions qui n'étaient guère dans les habitudes des physiciens du siècle dernier : aussi sont-elles demeurées classiques, et méritent-elles même plus de confiance que les expériences plus récentes de M. Harris (¹).

Ce physicien employait une balance nouvelle très ingénieuse, dans laquelle les forces électriques étaient équilibrées, non par la torsion d'un fil, mais par la pesanteur. A cet effet, l'aiguille supportant le corps électrisé mobile était suspendue par deux fils de cocon séparés comme l'indique la *fig.* 11. Un tel système est en équilibre sous l'influence de son propre poids quand les fils sont parallèles et l'aiguille GG′ dans le plan des fils. Si l'on essaye de la dévier, les fils prennent des positions obliques, le centre de gravité du système suspendu se relève et la pesanteur tend à le ramener à sa position primitive. Le mode de suspension employé par Harris est connu sous le nom de *suspension bifilaire*; il peut, dans des conditions convenables, acquérir une sensibilité égale à celle de la balance de torsion; nous aurons plus tard à en faire usage et nous réservons pour ce moment sa théorie complète.

Fig. 11.



Malheureusement, et bien qu'en employant un instrument précis, Harris n'a pris aucune précaution pour éviter l'influence des corps électrisés extérieurs à sa balance, et il a donné aux corps agissants des formes mal choisies au point de vue de la distribution électrique, par exemple celle des disques munis de cônes sur leur face postérieure; une telle disposition rend considérable l'influence perturbatrice de la déperdition. Il ne faut donc pas s'étonner que les résultats de ses expériences aient été souvent en désaccord avec la loi de Coulomb.

(¹) HARRIS, *Philosophical Transactions*, Part II (1834).

Nous verrons par la suite que les conséquences les plus éloignées de cette loi ont toujours été en parfaite conformité avec les résultats de l'observation. Au reste, des expériences exécutées par M. Riess [1] et par M. Marié-Davy [2], postérieurement à celles de Harris, ayant infirmé les conclusions du physicien anglais, nous nous dispenserons d'insister davantage sur ce genre de recherches et nous considérerons désormais la loi de Coulomb comme parfaitement générale et rigoureuse.

---

(1) Riess, *Reibungselectricität*, t. I, p. 92.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXI, p. 863 (1850), et *Mémoires de l'Académie de Montpellier, Section des Sciences*, t. II, p. 159.

CHAPITRE III.

DE LA DÉPERDITION DE L'ÉLECTRICITÉ.

Expériences de Coulomb. — Loi de la perte par l'air. — Expériences récentes. — Perte par les supports.

Dans l'étude que nous venons de faire des lois des attractions et des répulsions électriques, nous avons été gênés par la déperdition de l'électricité qui diminue peu à peu la charge des sphères et surtout leur force répulsive. Quand il s'agit d'établir une loi fondamentale aussi importante que celle de Coulomb, on ne doit pas se contenter de signaler une cause d'erreur et de vérifier grossièrement que l'écart de la théorie et de l'expérience est dans le sens prévu : il faut la corriger exactement. C'est dans ce but, et pour apporter plus de précision dans toutes les expériences faites à l'aide de la balance de torsion, que Coulomb [1] s'est livré à une étude soigneuse des lois de la déperdition de l'électricité. Nous allons exposer, avec quelque détail, ce travail demeuré classique.

L'électricité des conducteurs isolés se perd soit par suite de l'imperfection des supports, soit par le contact de l'air. Il n'est pas de substance qui soit entièrement dépourvue de la faculté de conduire l'électricité ; celles que l'on nomme *isolantes* ne sont que les substances conduisant mal, et l'on s'en assure aisément en touchant un corps électrisé avec des aiguilles de gomme laque, de verre ou de soufre. Au bout de quelque temps les aiguilles sont toujours chargées, sur une grande partie de leur longueur, d'une quantité d'électricité considérable à l'extrémité qui a touché, et de moins en moins grande en des points de plus en plus éloignés de cette extrémité. Dès lors, toutes les fois qu'un conducteur sera soutenu sur des supports,

[1] Les recherches de Coulomb sur la déperdition de l'électricité sont contenues dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 615 ; 1785.

il perdra par la conductibilité de ceux-ci une quantité plus ou moins grande de son électricité. D'un autre côté, l'air qui entoure les conducteurs agit comme les isoloirs ou d'une manière encore plus compliquée. Les poussières qu'il contient quand il est sec viennent se mettre en contact avec les surfaces électrisées, s'y chargent et sont ensuite repoussées et remplacées par d'autres : on admet quelquefois que les molécules d'air elles-mêmes agissent d'une manière analogue. Mais c'est surtout quand il est humide que l'air enlève aux corps leur électricité, soit parce que la vapeur d'eau est conductrice, soit surtout parce que l'humidité déposée sur les isoloirs les revêt d'une couche superficielle qui conduit l'électricité.

Du moment que la déperdition de l'électricité résulte de plusieurs actions qui se superposent, elle doit suivre des lois complexes, et l'on ne peut guère espérer de les déterminer d'une manière générale. Il vaut mieux, comme l'a fait Coulomb, se borner à chercher les lois qui conviennent à un cas particulier bien déterminé comme celui de la balance : au surplus, on ne devra attribuer à ces lois qu'une valeur purement empirique.

EXPÉRIENCES DE COULOMB. — Pour simplifier cette étude, Coulomb a d'abord cherché s'il y a des isoloirs qui isolent aussi bien que l'air ([1]). En général, la perte par les supports est de beaucoup la plus considérable, malgré la faible étendue par laquelle ils touchent le conducteur. Si l'on trouve un support qui enlève une quantité d'électricité négligeable, il satisfera suffisamment à la condition imposée par Coulomb.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, on commence par soutenir, par l'intermédiaire du support que l'on veut étudier, la balle fixe de la balance et, après l'avoir électrisée, on mesure de minute en minute la diminution de la force répulsive ; ensuite on supporte la même balle par deux isoloirs pareils au premier et l'on recommence l'épreuve. Si la perte est augmentée, c'est que

---

([1]) La loi de la perte par les supports n'est probablement pas la même que celle de la perte par l'air. A la lettre, la condition recherchée par Coulomb est donc impossible à remplir ; mais, si les supports ne recouvrent pas plus de la 100e partie du conducteur, par exemple, et si les supports perdent très-peu, la loi de la perte par l'air ne sera pas altérée par la présence des supports d'une quantité de l'ordre des erreurs de l'expérience.

chacun d'eux enlevait plus que l'air; si, au contraire, elle n'a pas varié, on doit conclure que chacun des supports ne laisse pas échapper plus d'électricité par ses points de contact que ne le ferait l'air lui-même : alors il n'y a qu'à étudier les lois de la perte, et elles sont les mêmes que si le corps était en entier plongé dans l'atmosphère de la cage, sans support pour l'y maintenir.

Coulomb reconnut par des essais de ce genre que le verre isole très mal dans les temps secs et pas du tout pendant les jours pluvieux, que la soie est préférable et que, de tous les corps, la gomme laque brune est le meilleur isolateur. Dèslors, il employa des soutiens de gomme laque ayant $0^m,001$ de diamètre et $0^m,02$ à $0^m,03$ de longueur, qui lui parurent suffisants pour isoler parfaitement les balles de sureau d'une balance, et la déperdition totale se trouvant ainsi réduite à celle de l'air, voici comment il la mesura.

LOI DE LA PERTE PAR L'AIR. — Les deux balles, qui étaient parfaitement égales, furent électrisées en commun par le procédé ordinaire : elles se repoussèrent, mais on les ramena l'une vers l'autre par une torsion convenable. A $6^h 50^m$ l'écart était de 20° et la torsion de 160°.

On diminua la torsion de 30° immédiatement après avoir fait l'observation : cela fit augmenter aussitôt l'écart des deux balles; mais, comme elles perdaient du fluide avec le temps, la répulsion diminua peu à peu, et à $6^h 53^m$ elles revinrent à l'écart de 20°, n'ayant plus qu'une répulsion de 160 — 30 ou 130°. On continua ensuite la même opération pendant tout le temps que les balles conservèrent une force répulsive suffisante.

Dans la première de ces épreuves consécutives, la perte de torsion a été de 30° pendant trois minutes : elle sera approximativement de $\frac{30°}{3}$ ou 10° en une minute. D'un autre côté, la répulsion totale était égale à 160° au commencement, et à 130° à la fin de l'expérience; en moyenne, c'est 145°. Par conséquent, on peut dire que le rapport de la perte de répulsion pendant une minute à la répulsion moyenne est égal à $\frac{10}{145}$.

En cherchant de la même manière les valeurs de ce rapport dans toutes les expériences successives qui ont été faites le

même jour, Coulomb a trouvé sensiblement le même nombre. La constance de ce rapport constitue dès lors une loi physique que l'on résume ainsi : *Le rapport de la diminution de force répulsive pendant une minute à la force répulsive totale est constant.*

Il faut s'empresser d'ajouter que ce rapport change d'un jour à l'autre, suivant que l'air est plus ou moins chargé de vapeur d'eau, et par conséquent plus ou moins conducteur. C'est ce dont on jugera par le Tableau suivant, où l'on voit le rapport demeurer constant dans les expériences faites à des intervalles très rapprochés, et augmenter avec l'état hygrométrique, d'une journée à l'autre.

INDICATIONS de l'hygromètre à cheveu.	TEMPS.	FORCE répulsive perdue.	FORCE répulsive moyenne.	RAPPORT de la force perdue pendant 1 minute à la force moyenne.
29 mai. Hygromètre, 69°.	h m s 5.45.30 5.53. 0 6. 2.30 6.12.15 6.33. 0 6.51. 0	° 20 20 20 20 20	° 150 130 110 75 60	0,0178 0,0164 0,0185 0,0180 0,0185
28 mai. Hygromètre, 75°.	6.32.30 6.38.15 6.44.30 6.53. 0 7. 3. 0 7.17. 0	20 20 20 20 20	140 120 100 80 60	0,0250 0,0253 0,0238 0,0250 0,0238
2 juillet. Hygromètre, 80°.	7.43.40 7.49. 0 7.57.20 8. 9.10 8.17.30	20 20 20 20	90 70 50 35	0,0514 0,0526 0,0333 0,0526
22 juin. Hygromètre, 87°.	11.53.45 11.56.45 11.59.45 12. 5. 0 12.16.15	20 20 20 20	90 70 50 28	0,0740 0,0909 0,0769 0,0741

Nous allons maintenant traduire cette loi expérimentale en formule : représentons par A l'angle de torsion à un moment quelconque, par $A - \delta A$ cette même quantité après qu'il s'est écoulé un intervalle δt très-petit. $\frac{\delta A}{\delta t}$ représentera la perte de torsion qui se ferait pendant l'unité de temps, et la torsion moyenne sera égale à $A - \frac{\delta A}{2}$; il faut donc écrire que le rapport de $\frac{\delta A}{\delta t}$ à $A - \frac{\delta A}{2}$ reste constant, ce qui donne

$$\frac{\delta A}{\delta t} = p\left(A - \frac{\delta A}{2}\right).$$

Cette formule représente exactement les résultats de l'expérience de Coulomb, dans laquelle l'intervalle δt est toujours de plusieurs minutes; mais comme dans, chaque expérience, la valeur de p est indépendante de δt, on peut faire tendre δt vers o et passer à la limite. Alors $\frac{\delta A}{\delta t}$ devient la dérivée A' de A par rapport à t prise en signe contraire, et l'on a

$$A' = -pA$$

d'où

(1) $$A = A_0 e^{-pt}.$$

p est le rapport constant que nous avons expérimentalement trouvé, A_0 est la torsion initiale. On voit que, les deux balles restant à une distance constante, la torsion décroît en progression géométrique quand t augmente en progression arithmétique.

On peut maintenant remarquer que les angles de torsion A, A_0 sont proportionnels aux forces répulsives F, F_0 qui s'exercent entre les balles, et écrire

$$F = F_0 e^{-pt}.$$

De plus, comme la distance des deux balles demeure constante, les forces répulsives F, F_0 sont en raison composée des quantités d'électricité E, E_0, et E' et E'_0 qui sont sur l'une et l'autre

de ces balles, ce qui donne

$$EE' = E_0 E'_0 e^{-pt},$$

et, comme les deux balles sont identiques, $E = E'$ et $E_0 = E'_0$; alors l'équation précédente devient

$$E^2 = E_0^2 e^{-pt}$$

ou

(2) $$E = E_0 e^{-\frac{pt}{2}}.$$

Les deux formules (1) et (2) pourront maintenant servir à calculer, la première l'angle de torsion, la deuxième la quantité d'électricité de chaque balle, après un temps quelconque, et pour faire aisément ce calcul il suffira de prendre les logarithmes des deux membres. On obtiendra ainsi

$$\log A = \log A_0 - pt \log e = \log A_0 - pt M,$$
$$\log E = \log E_0 - \frac{pt}{2} M.$$

M représente le module des Tables, et p le coefficient de déperdition qui devra être déterminé par une expérience particulière, faite immédiatement avant ou après l'expérience que l'on veut corriger et sous les conditions mêmes de cette expérience. C'est ainsi que Coulomb a toujours opéré.

EXPÉRIENCES RÉCENTES. — Coulomb n'a étudié qu'un cas particulier de la perte par l'air : celui de la balance dans les conditions de charge, de pression et d'état hygrométrique qui se trouvent habituellement réalisées. Il y aurait sans doute un vif intérêt à étendre ces recherches à des conditions plus variées, et c'est ce qu'ont cherché à faire depuis Coulomb un grand nombre d'expérimentateurs. Les résultats auxquels ils sont arrivés sont en partie contradictoires, et ne constituent pas pour la Science un progrès en rapport avec les difficultés expérimentales qu'on a dû essayer de surmonter.

La loi de déperdition énoncée par Coulomb a été vérifiée par tous les expérimentateurs, quand ils ont opéré dans les conditions moyennes où Coulomb s'était placé; il ne pouvait en être

autrement, car cette loi est évidente *a priori* : la vitesse de la déperdition $-\frac{dA}{dt}$ est une fonction de la charge qui peut être développée en série par la formule de Maclaurin et doit se réduire à son premier terme lorsque la charge est assez faible. On a donc

$$-\frac{dA}{dt}=pA,$$

d'où

$$A=A_0e^{-pt}:$$

c'est la formule même de Coulomb. Pour des charges excessives le développement de $-\frac{dA}{dt}$ devra être poussé plus loin et la loi de Coulomb remplacée par une autre moins simple et qu'il est impossible de déterminer *a priori*. C'est ce que les divers expérimentateurs ont constaté, mais sans pouvoir formuler de loi générale.

Sans même sortir des limites étroites où la loi de Coulomb est applicable, il faudrait savoir de quels éléments variables dépend la valeur du coefficient de déperdition et d'après quelles lois il varie. On conçoit *a priori* : 1° qu'il puisse être différent pour les deux espèces d'électricités; 2° qu'il dépende de la nature du corps (conducteur on non) et de celle du gaz dans lequel il se trouve placé; 3° de la température; 4° de l'état hygrométrique; 5° de l'état de repos ou de mouvement du gaz; 6° de la pression; 7° de la forme, de l'étendue, de la distance des corps dont l'influence peut s'exercer sur le corps que l'on considère.

1° *Influence de la nature de l'électricité*. Biot [1] avait exécuté des expériences comparatives sur les deux électricités positive et négative; il avait trouvé que toutes deux suivent la même loi de déperdition avec le même coefficient; mais, depuis cette époque, Faraday [2] admit que l'électricité négative se perd plus vite et Matteucci [3] trouva que la perte

(1) Biot, *Traité de Physique expérimentale et mathématique*.
(2) Faraday, *Experimental researches*.
(3) Matteucci, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXVIII, p. 385.

est la même pour les deux électricités quand la charge est faible, mais que l'électricité négative se perd plus vite pour de fortes charges. Enfin, d'après M. Charault ([1]), les écarts constatés soit par Faraday, soit par Matteucci, tiendraient simplement à l'action perturbatrice des supports qui auraient été incomplètement déchargés dans leurs expériences, et il faudrait revenir à l'affirmation de Biot. De son côté, M. Warburg ([2]) est arrivé à la même conclusion.

2° *Influence de la nature des corps et des gaz.* Pour étudier l'influence de la nature du gaz, Matteucci a employé une balance parfaitement close au milieu de gaz amenés à un état absolu de siccité par l'acide phosphorique anhydre; il vit que la perte devenait alors très-faible, mais qu'elle restait la même dans les gaz différents pris à une même température et sous une même pression. Au contraire, M. Warburg a cru constater que la perte est différente : elle serait deux fois plus rapide dans l'hydrogène que dans l'acide carbonique.

D'après Matteucci, la perte ne varie pas si les balles sont de verre, de résine ou de métal, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la conductibilité des corps : ce dernier résultat avait été déjà énoncé par Coulomb.

3° *Influence de la température.* Matteucci a reconnu que la perte est de plus en plus rapide quand la température du gaz s'élève, mais il n'a énoncé à cet égard aucune loi précise.

4° *Influence de l'état hygrométrique.* Coulomb avait déduit de ses expériences que le coefficient de déperdition variait sensiblement comme le cube du poids de vapeur d'eau contenu dans l'air. Matteucci a constaté l'accroissement rapide de la perte pour des états hygrométriques de plus en plus élevés, mais sans énoncer de loi. Enfin, d'après M. Charault, pour un même poids de vapeur d'eau contenu dans l'air, la déperdition est d'autant plus forte que le degré hygrométrique est plus élevé, c'est-à-dire que la température est plus basse; il

---

([1]) Charault, *Thèse de Doctorat.* (Paris, 1860), analysée dans le *Journal de Physique,* t. II, p. 91.

([2]) Warburg, *Annales de Poggendorff,* t. CXLV, p. 578; 1872. *Journal de Physique,* t. I, p. 229.

en est de même, pour un état hygrométrique constant, quand le poids de vapeur d'eau (c'est-à-dire la température) s'élève. Il est donc très-probable que la loi proposée par Coulomb doit être rejetée.

5° *Influence du mouvement.* Matteucci a déterminé le coefficient de déperdition de deux boules dont l'une était en repos dans l'intervalle de deux observations, tandis que l'autre était agitée. Chose surprenante, la déperdition s'est trouvée moindre pour la balle agitée. On peut vérifier ce résultat à l'aide d'un électroscope ordinaire et de deux boules électrisées au contact l'une de l'autre. On tient l'une immobile tandis que l'on agite l'autre, et l'on reconnaît que cette dernière exerce encore une action sur l'électroscope lorsque l'autre ne présente pas de trace d'électrisation. Le frottement de l'air agit-il ici pour régénérer l'électricité perdue ?

6° *Influence de la pression.* Quand on diminue la pression des gaz au milieu desquels les conducteurs électrisés sont plongés, on découvre d'autres particularités que nous allons étudier. Si l'on charge ces conducteurs avec une source puissante, ils ne conservent pas tout ce qu'ils reçoivent, ils perdent pendant les premiers moments une très-grande partie de leur fluide, qui s'échappe très-rapidement dans le gaz raréfié, et ne gardent qu'une charge limite qui se perd ensuite très-lentement et qui est d'autant plus faible que la pression du gaz est moindre. Voici comment Matteucci le démontre.

Il retire de la balance la balle fixe avec le support qui la soutient et il la dispose, toujours isolée, au milieu d'une cloche posée sur la machine pneumatique. Il raréfie l'air jusqu'à une pression déterminée; après quoi il charge la balle au moyen d'un conducteur qui traverse la cloche, et il a soin de lui fournir toujours la même quantité d'électricité. Immédiatement après, il laisse rentrer l'air, il reprend la balle pour la remettre dans la balance et pour mesurer, par la répulsion qu'elle produit, la charge électrique qu'elle a reçue dans l'air raréfié. Il trouve que cette charge électrique est d'autant moindre que le vide est plus parfait et *en raison directe de la pression de l'air* au moment où la charge a été donnée.

On verra que l'électricité à haute tension se dissémine, en

effet, dans l'air raréfié en y développant des phénomènes curieux. Pour le moment, contentons-nous d'avoir constaté l'existence de cette déperdition rapide, et, puisque le conducteur a conservé ensuite une charge limite, voyons comment celle-ci se perd dans l'air raréfié où elle est produite. A cet effet, Matteucci construisit une balance de torsion dans une cloche où l'on pouvait faire le vide et où l'on électrisait les balles par un conducteur mobile qui s'enfonçait à frottement dans la tubulure. Quand l'air avait été raréfié, que les balles avaient été électrisées et qu'elles avaient pris leur charge limite, on suivait la diminution progressive de l'écart des deux balles, et l'on trouva que la déperdition est d'autant plus lente que la raréfaction de l'air est plus grande. Nous ne citerons qu'un seul exemple. L'air étant à la pression de $0^{m},757$, on électrise les balles jusqu'à une torsion de 38°. Après $4^{h}5^{m}$, elles étaient revenues au contact. On diminua ensuite la pression jusqu'à $0^{m},400$, on électrisa de nouveau jusqu'à reproduire l'écart initial de 38°, et, après 14^{h}, l'écartement était encore égal à 13°. Quand on diminue la pression davantage, les balles restent encore plus longtemps écartées. Toutefois Walsh a observé et l'on a fréquemment vérifié que le passage de l'électricité dans un gaz extrêmement raréfié devient très-difficile et ne s'effectue plus dans le vide parfait.

7° *Influence de la forme, etc.* Une partie des résultats discordants que nous avons enregistrés ci-dessus doit certainement être attribuée à la différence de forme et de dimensions des appareils employés par les divers expérimentateurs qui se sont occupés de la déperdition électrique. Il résulte en particulier des expériences de Matteucci que la vitesse de la déperdition à l'intérieur d'une balance dépend de la distance des boules, c'est-à-dire de leur influence réciproque. La perte d'une même torsion de 10° dans trois expériences successives se faisait, pour une même valeur de la torsion moyenne, sensiblement en $10^{m}30^{s}$ pour un écart de 36°, en $6^{m}30^{s}$ pour un écart de 26° et en $4^{m}30^{s}$ pour un écart de 18°. Puisque la distance des deux balles a une influence si considérable, à plus forte raison ne peut-on rien conclure, pour un conducteur placé dans des conditions quelconques, de ce qu'on a ob-

servé dans la balance pour des balles qui étaient dans des conditions particulières et bien déterminées ([1]).

PERTE PAR LES SUPPORTS. — Quand les supports que l'on emploie cessent d'isoler complètement, il arrive nécessairement que la perte d'électricité est augmentée, et l'on pourrait se proposer de chercher aussi la loi de cette perte par les isolateurs imparfaits; mais c'est une question que l'on n'a pas abordée dans sa généralité, à cause de sa complication. Coulomb s'est contenté de montrer qu'un support qui n'isole pas parfaitement une forte charge peut en isoler une plus faible, et il a cherché les rapports qui doivent exister entre les longueurs des supports et les charges qu'on veut isoler. Voici comment il a opéré.

Il conserve dans la balance de torsion l'aiguille de gomme laque qui soutient la balle mobile et qui est un isolant parfait; mais il remplace le support de la boule fixe, qui était en gomme laque, par un fil de soie de 15 pouces. Il charge les deux balles d'une électricité commune, et il cherche, comme précédemment, le rapport de la perte de torsion pendant 1^m à la torsion moyenne, en maintenant les balles à une distance constante. Il trouve d'abord que ce rapport est beaucoup plus grand que celui qui est trouvé dans la même journée avec un isolateur parfait de la boule fixe : cela prouve qu'une partie de l'électricité s'échappe par le fil de soie. Mais peu à peu ce rapport diminue et devient égal à ce qu'il est quand l'isolement est complet, et cela veut dire que le fil de soie qui laisse échapper une forte charge en maintient une plus faible. C'est ce que prouvent les expériences suivantes :

([1]) D'après Riess (*Reibungselectricität*, t. I, p. 138), le coefficient de déperdition croît avec la charge à l'air libre, tandis qu'il diminue dans une balance close.

Au bout d'un temps t, la balle mobile, qui est parfaitement isolée, a conservé une charge E que l'on peut calculer d'après la loi de Coulomb par la formule

$$E = E_0 e^{-\frac{pt}{2}}$$

A cette même époque, la balle fixe qui n'est pas isolée parfaitement n'a plus qu'une charge E' plus petite que E, mais la torsion A que l'on observe est toujours proportionnelle à E et à E', et l'on a

$$A = EE';$$

en éliminant E_0 et E entre ces trois équations, on trouve

$$E' = \frac{A}{\sqrt{A_0}} e^{\frac{pt}{2}}.$$

On peut donc calculer la charge restée sur la boule fixe après le temps observé t, où l'isolement commence à devenir parfait : c'est ce que fit Coulomb d'abord pour le fil de 15 pouces. Il a répété ensuite la même expérience en soutenant la boule fixe par un fil de soie quatre fois plus long, c'est-à-dire de 60 pouces; il a déterminé le temps t' et la torsion A', pour lesquels l'isolement devenait parfait; il a trouvé dans ce deuxième cas

$$E'' = \frac{A'}{\sqrt{A'_0}} e^{\frac{pt'}{2}},$$

et il a vu que E'' était double de E'; par conséquent, il a admis que les quantités d'électricité qu'un même fil peut isoler sont proportionnelles à la racine carrée des longueurs.

Coulomb a pu encore comparer les pouvoirs isolants de diverses substances. En comparant les quantités d'électricité qui peuvent être isolées par des fils de gomme laque et de soie de même longueur et de même diamètre, il a trouvé que la soie conduisait dix fois plus que la gomme laque.



CHAPITRE IV.

CONSÉQUENCES ET VÉRIFICATION DE LA LOI DE COULOMB. — POTENTIEL.

La loi de Coulomb est la loi élémentaire des actions électriques. — L'électricité libre se porte à la surface des corps conducteurs. — Conséquence relative à la loi de Coulomb.

Composantes de la force exercée sur un point électrisé. — Potentiel. — Propriété des dérivées secondes de la fonction V. — Action d'un corps électrisé sur un point intérieur. — Potentiel d'une couche sphérique homogène sur un point intérieur ou extérieur. — Attraction d'une sphère sur un point intérieur. — Propriété des dérivées secondes de la fonction V pour un point placé à l'intérieur d'un corps électrisé. — Application de la théorie du potentiel au cas de la gravitation universelle. — Électricité en équilibre sur un corps conducteur. — Tension électrique.

LA LOI DE COULOMB EST LA LOI ÉLÉMENTAIRE DES ACTIONS ÉLECTRIQUES. — Si l'on corrige, comme l'a fait Coulomb, les résultats bruts des expériences sur les attractions et les répulsions électriques de l'effet de la déperdition, on reconnaît que la loi qu'il a énoncée les représente parfaitement à une perturbation près, qui se produit quand les boules sont trop rapprochées et dont nous donnerons ultérieurement l'explication. Ainsi nous pouvons considérer comme parfaitement démontré que *deux petites sphères électrisées* A *et* B *s'attirent ou se repoussent proportionnellement au produit mm' de leurs charges et en raison inverse du carré de la distance r de leurs centres, pourvu que celle-ci demeure toujours considérable par rapport à leurs rayons.*

S'il était possible de réduire à une petite fraction de millimètre le rayon des balles de sureau employées dans la balance, il est vraisemblable qu'on vérifierait la loi de Coulomb jusqu'à de très faibles distances.

Supposons donc que les charges m et m' de A et de B demeurent constantes, mais que les dimensions de ces corps deviennent de plus en plus petites, et la loi de Coulomb pourra être considérée comme exacte pour les distances r de plus en plus faibles. A la limite, c'est-à-dire pour des *points électrisés*, elle sera exacte tant que r sera différent de zéro.

Au reste, comme il est pratiquement impossible de communiquer une charge finie m à un corps de dimensions infiniment petites, il n'y a pas à se préoccuper, au point de vue expérimental, d'attribuer un sens quelconque à l'expression

$$f = -\frac{mm'}{r^2} \tag{1}$$

de la loi de Coulomb, quand on suppose $r = 0$: f devient alors infini; mais il n'en serait pas de même si, par exemple, les masses m et m' diminuaient proportionnellement au volume des corps A et B. Pratiquement, les actions électriques demeurent toujours finies.

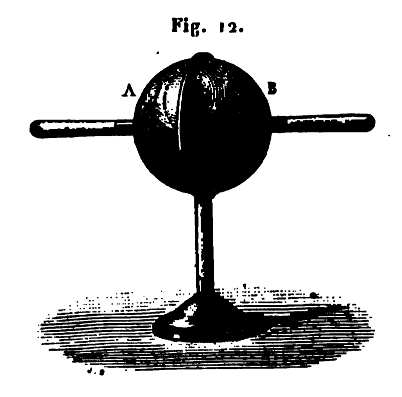
Ces restrictions une fois établies, il n'y a plus aucun inconvénient à se servir de l'expression (1) pour représenter l'action réciproque de deux points électrisés, c'est-à-dire qu'on *peut considérer la loi de Coulomb comme la loi élémentaire des actions électriques*. Il y a plus, et nous ferons voir que seule cette loi peut rendre compte de certains faits que nous allons d'abord démontrer expérimentalement.

L'ÉLECTRICITÉ SE PORTE A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS. — Plaçons dans la balance de Coulomb, au lieu de la balle fixe, une sphère électrisée A et mesurons la répulsion qu'elle exerce; puis, après l'avoir enlevée de la balance, faisons-la toucher par une sphère absolument identique B, mais prise à l'état naturel; elle cédera la moitié de son électricité, et, remise dans la balance, elle n'y produira plus qu'une répulsion moitié moindre. Recommençons ensuite la même épreuve en faisant successivement toucher A par d'autres sphères B', B'', ..., formées de matières conductrices quelconques, les unes pleines, les autres réduites à une enveloppe extrêmement mince, mais ayant toutes la même surface que A, et nous obtiendrons le

même résultat que dans le premier cas; mais la diminution de force répulsive serait différente si la surface de B différait de celle de A. D'où il faut conclure que la distribution du fluide ne dépend ni de la nature, ni de la masse du conducteur, mais uniquement de la forme et de l'étendue de sa surface. On est naturellement porté à en induire que l'électricité ne pénètre pas à l'intérieur, mais s'accumule à la surface des corps : c'est ce que nous allons confirmer par des épreuves plus directes.

On prend une sphère métallique isolée O (*fig.* 12), et on

Fig. 12.



fait disposer deux calottes hémisphériques A et B dont le rayon intérieur est notablement plus grand que le rayon extérieur de O, qui sont munies de manches en verre et que l'on peut appliquer sur la sphère O. Après qu'on a caché la surface entière de celle-ci sous les calottes et établi le contact, on électrise le système, on relève les hémisphères en les laissant appliqués l'un contre l'autre, mais de telle sorte qu'ils ne touchent plus O, et on les sépare. On constate, à l'aide d'un pendule, qu'ils sont électrisés, tandis qu'en faisant le même essai sur la sphère O on la trouve à l'état naturel. Cette expérience, attribuée à Biot (1), est tout à fait démonstrative :

---

(1) *Traité de Physique exp. et math.*, t. II, p. 264. Cavendish avait déjà réalisé cette expérience (Harris, *Leçons élémentaires d'électricité*, traduction anglaise, p. 25).

on peut l'opérer en sens inverse, en électrisant O avant de la recouvrir avec les hémisphères; le résultat est toujours le même, l'électricité abandonne *complétement* la sphère pour se porter à la surface extérieure des hémisphères.

On peut encore électriser une sphère creuse de laiton A (*fig.* 13) qui est percée d'un trou B à sa partie supérieure, et on la touche avec un petit disque de clinquant isolé C qui reçoit par ce contact une partie de l'électricité qui couvre le point touché. Or, quand on le plonge à l'intérieur, on ne ramène aucune électricité, mais quand on l'appuie légèrement sur l'extérieur ou même contre les bords du trou, il se charge toujours.

Fig. 13.



Cette expérience paraît au premier abord moins complète que la précédente, car la surface intérieure communique par les bords du trou avec la surface extérieure, dont elle forme en quelque sorte une deuxième nappe. Cependant nous voyons qu'on n'y trouve pas d'électricité. Mais la théorie indique que, pourvu que le trou soit très-étroit, la quantité d'électricité répandue sur la surface interne de la sphère n'est qu'une fraction extrêmement minime de celle qui se trouve à la surface externe : on peut même élargir beaucoup l'orifice sans que l'électricité apparaisse en quantité appréciable à l'intérieur.

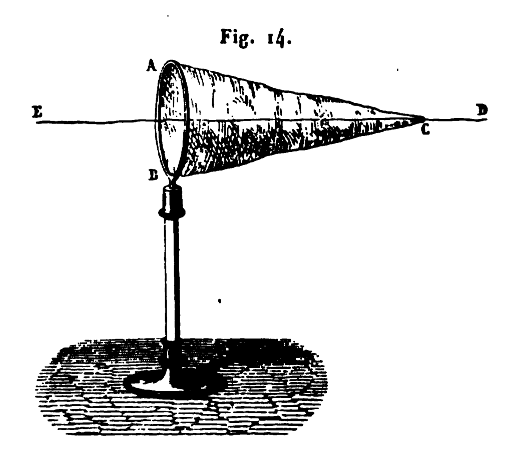
Les mêmes considérations s'appliquent aux expériences suivantes, imaginées par Faraday (¹). Il soutient, par un support isolant, un cercle métallique AB (*fig.* 14) auquel est attaché un sac conique en toile de lin ABC, tout à fait semblable aux filets à insectes. Un fil de soie ECD, placé dans l'axe du cône, permet de retourner le filet. Après avoir électrisé cet appareil,

(¹) FARADAY, *Experimental researches*, t. I, p. 365.

on trouve, en le touchant avec le disque de clinquant, que l'extérieur est électrisé pendant que l'intérieur ne l'est pas; puis, en tirant le fil EC de manière à ramener à l'intérieur la face qui était externe, on voit que les rôles des deux surfaces ont changé en même temps que leurs positions, c'est-à-dire que l'électricité a quitté l'une pour se porter sur l'autre.

On remarquera que la surface du filet est tout à fait discontinue, et cependant l'électricité n'apparaît pas en quantité notable à la surface intérieure du treillis de fil.

Fig. 14.



On peut transformer cette expérience de la manière suivante. Une cage en fil métallique est suspendue au conducteur de la machine électrique et pourvue de pendules ou de houppes de papier doré à l'intérieur et à l'extérieur. Aussitôt qu'on électrise la cage, tous les pendules ou les houppes extérieures divergent, tandis que les pendules intérieurs restent appliqués contre la surface métallique.

Voici encore sur le même sujet une expérience très-ancienne et tout aussi curieuse. Sur un gros tube de verre, on colle l'extrémité d'un long ruban d'étain laminé qu'on laisse pendre, et qui est terminé par un pendule formé de deux petites balles de sureau. On électrise ce ruban, ce qui fait diverger les balles, puis on l'enroule sur le tube en tournant celui-ci, et l'électricité, qui d'abord était répandue sur les deux surfaces, abandonne

peu à peu les parties du ruban qui se superposent en s'enroulant, et se concentre sur celles qui restent libres : aussi voit-on croître leur charge et augmenter la divergence des balles. L'effet inverse se produit quand ensuite on déroule la bande métallique.

CONSÉQUENCE RELATIVE A LA LOI DE COULOMB. — Ces diverses expériences, dont quelques-unes sont susceptibles d'une grande précision, établissent que la charge électrique d'un corps conducteur se porte entièrement à sa surface extérieure. Nous allons démontrer que cela suffit pour qu'on ne puisse imaginer aucune loi élémentaire des actions électriques différente de celle de Coulomb.

Désignons par $\varphi(r)$ la force attractive ou répulsive exercée par une quantité d'électricité égale à 1 sur une autre quantité égale à 1 placée à la distance r, et posons, pour abréger,

$$r^2\varphi(r) = \mathrm{F}(r).$$

Nous allons démontrer que $\mathrm{F}(r)$ est constant. S'il ne l'est pas, il augmente ou diminue. Soient r_1 et r_2 deux limites assez rapprochées pour que $\mathrm{F}(r)$ augmente toujours quand r varie de r_1 à r_2.

Considérons un conducteur sphérique de diamètre $\mathrm{AB} = r_1 + r_2$ (*fig.* 15) chargé d'électricité positive. Celle-ci doit, d'après nos expériences, se porter tout entière à la surface et, par raison de symétrie, s'y distribuer uniformément. Pour que l'équilibre soit ainsi établi, il faut que la force exercée par la couche infiniment mince d'électricité libre sur une molécule placée en un point intérieur P quelconque soit nulle. En effet, une molécule d'électricité neutre placée en P équivaut à des quantités équivalentes d'électricité positive et négative sur lesquelles la force provenant de la couche sphérique agirait en sens contraire : cette molécule serait décomposée, et l'équilibre détruit.

Prenons le point P sur le diamètre AB, de sorte que $\mathrm{AP} = r_1$, $\mathrm{BP} = r_2$, et menons un plan PRS perpendiculaire à AB qui décompose la couche électrique en deux zones inégales RAS, RBS. Concevons un cône d'ouverture infiniment petite $d\omega$, ayant son

sommet en P. Il découpe sur la couche sphérique deux éléments K et S qui exercent en P des actions dirigées suivant l'axe du cône et directement opposées : elles ont pour valeur

$$\frac{d\omega\,\overline{PK}^2}{\sin V_1}\varphi(\overline{PK}),\quad \frac{d\omega\,\overline{PH}^2}{\sin V_2}\varphi(\overline{PH}).$$

V_1 et V_2 étant les angles sous lesquels le cône coupe la sphère. Or ces angles sont égaux entre eux; par suite, les forces exercées par les éléments K et H sont entre elles comme $\overline{PK}^2\varphi(\overline{PK})$ et $\overline{PH}^2\varphi(\overline{PH})$, ou encore comme $F(\overline{PK})$ et $F(\overline{PH})$; mais on a $r_1 < PK < PH < r_2$, et par suite $F(\overline{PK}) < F(\overline{PH})$.

Le raisonnement qui précède s'applique à tous les éléments suivant lesquels on peut décomposer les deux zones RAS, RBS par des cônes d'ouverture infiniment petite ayant leur sommet en P; toutes les actions élémentaires exercées par la zone RBS l'emportent donc sur les actions correspondantes de RAS et il en est de même de leurs résultantes. Il n'y a donc pas équilibre. Donc la supposition que nous avons faite est inadmissible et l'on a nécessairement

Fig. 15.

$$F(r) = K,$$
$$\varphi(r) = \frac{F(r)}{r^2} = \frac{K}{r^2};$$

c'est-à-dire que les actions électriques sont en raison inverse du carré de la distance (¹). La loi de Coulomb se trouve ainsi démontrée d'une manière nouvelle, et cette démonstration, fondée sur des expériences beaucoup plus précises que celles de la balance, ne laisse prise à aucune objection.

Nous accepterons désormais la loi de Coulomb comme fondamentale et nous allons développer dans ce Chapitre quelques-

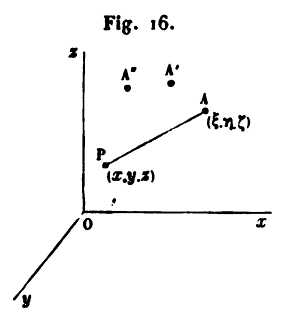
(¹) Cette élégante démonstration est due à M. Bertrand (*Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. II, p. 418 : 1873).

unes de ses conséquences analytiques. Nous prouverons notamment que, si la loi de Coulomb est exacte, il ne peut y avoir d'électricité à l'intérieur d'un corps conducteur. C'est la réciproque de la proposition que nous venons de démontrer.

COMPOSANTES DE LA FORCE EXERCÉE SUR UN POINT ÉLECTRISÉ. — Considérons un point P (*fig.* 16) possédant une charge électrique μ et soumis à l'action d'une série de points électrisés A, A', ... possédant des charges m, m', ... et situés d'une manière quelconque.

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires et désignons par x, y, z les coordonnées du point P; par ξ, η, ζ; ξ',

Fig. 16.



η', ζ', ... celles des points A, A', ...; enfin par r, r', ... leurs distances au point P.

La force f qui s'exerce entre A et P est, d'après la loi de Coulomb, $\frac{-\mu m}{r^2}$; elle est dirigée suivant AP et ses composantes sont

$$\frac{-\mu m}{r^2}\frac{(\xi - x)}{r} = -\frac{\mu m}{r^3}(\xi - x),$$

$$\frac{-\mu m}{r^2}\frac{(\eta - y)}{r} = -\frac{\mu m}{r^3}(\eta - y),$$

$$\frac{-\mu m}{r^2}\frac{(\zeta - z)}{r} = -\frac{\mu m}{r^3}(\zeta - z).$$

Celles-ci doivent être considérées comme positives ou négatives, suivant qu'elles agissent pour accroître ou diminuer les coordonnées du point P.

Les forces f', f'',... provenant des points A', A'',... donnent des composantes analogues, et la résultante F appliquée en P a pour composantes X, Y, Z.

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= -\mu \sum \frac{m(\xi - x)}{r^3}, \\ Y &= -\mu \sum \frac{m(\eta - y)}{r^3}, \\ Z &= -\mu \sum \frac{m(\zeta - z)}{r^3}. \end{aligned} \right.$$

La somme Σ comprend un nombre de termes égal à celui des points agissants. On remarquera que la résultante

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

devient infinie quand l'une quelconque des distances r s'annule, et qu'elle se réduit à zéro quand tous les points A sont à une distance infinie.

On peut de même calculer l'action exercée sur le point P par un corps ou un système de corps électrisés, conducteurs ou non. A cet effet, on supposera chacun des corps agissants décomposé, par trois systèmes de plans parallèles aux plans coordonnés, en éléments de volume infiniment petits, et l'on exprimera X, Y, Z comme la somme des composantes provenant de chacun de ces éléments. On remarquera : 1° que, quand le volume de l'un des éléments considérés tend vers zéro, on peut, sans modifier l'action lointaine qu'il exerce, supposer la charge électrique qu'il possède concentrée en son centre de gravité; 2° que, si l'on considère la distribution électrique comme continue dans toute la masse de l'un quelconque des corps agissants, la charge individuelle de chaque élément de volume de ce corps est infiniment petite, puisque la charge totale est finie; que de plus elle est proportionnelle au volume $dx\,dy\,dz$ de l'élément, et à une fonction continue ρ des coordonnées de son centre de gravité. On appelle ρ la densité électrique au point considéré.

On aura donc

$$(2)\quad \begin{cases} X = -\mu \displaystyle\iiint \rho \frac{(\xi - x)\,dx\,dy\,dz}{r^3}, \\ Y = -\mu \displaystyle\iiint \rho \frac{(\eta - y)\,dx\,dy\,dz}{r^3}, \\ Z = -\mu \displaystyle\iiint \rho \frac{(\zeta - z)\,dx\,dy\,dz}{r^3}. \end{cases}$$

L'intégration devra être étendue à chacun des corps électrisés et limitée à leur surface.

S'il arrive, comme c'est le cas pour les corps conducteurs, que l'électricité se trouve répandue sur une surface sans épaisseur, on décomposera celle-ci en éléments de surface $d\sigma$. Un raisonnement analogue à celui qui précède établira que la charge de chaque élément peut être représentée par $\rho\,d\sigma$, ρ étant une fonction continue des coordonnées qu'on appellera densité superficielle. On trouvera pour X, Y, Z les expressions

$$(3)\quad \begin{cases} X = -\mu \displaystyle\int \frac{\rho\,d\sigma(\xi - x)}{r^3}, \\ Y = -\mu \displaystyle\int \frac{\rho\,d\sigma(\eta - y)}{r^3}, \\ Z = -\mu \displaystyle\int \frac{\rho\,d\sigma(\zeta - z)}{r^3}. \end{cases}$$

POTENTIEL. — Attribuons au point P une charge positive égale à l'unité ; les équations (1) deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} X = \sum - \dfrac{m(\xi - x)}{r^3}, \\ Y = \sum - \dfrac{m(\eta - y)}{r^3}, \\ Z = \sum - \dfrac{m(\zeta - z)}{r^3}; \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$(5)\quad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$(6)\quad \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = \frac{\xi - x}{r^3}.$$

D'après la relation (6) on peut écrire la première équation (4)

$$(7) \qquad X = \sum -m \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$$

et de même

$$(7') \qquad \begin{cases} Y = \sum -m \dfrac{d\frac{1}{r}}{dy}, \\ Z = \sum -m \dfrac{d\frac{1}{r}}{dz}. \end{cases}$$

Posons

$$(8) \qquad V = \sum \frac{m}{r},$$

on a

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = \sum \dfrac{md\frac{1}{r}}{dx} = -X, \\ \dfrac{dV}{dy} = -Y, \\ \dfrac{dV}{dz} = -Z. \end{cases}$$

Ainsi les trois composantes X, Y, Z de la force sont les dérivées partielles d'une même fonction — V des coordonnées des points agissants et de celles du point P. Il suffira de calculer la fonction V pour déterminer, en grandeur et en direction, la force électrique en P.

Dans le cas des équations (2) et (3) on trouve de même

$$(10) \qquad V = \int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r},$$

$$(11) \qquad V = \int\int \frac{\rho\, d\sigma}{r}.$$

X, Y et Z sont toujours les dérivées partielles de — V.

La fonction V, considérée d'abord par Laplace (¹) dans les calculs relatifs à l'attraction universelle, a été appliquée par

(¹) Laplace, *Traité de Mécanique céleste*. Paris, 1799-1825.

Poisson ([1]) à l'étude analytique des phénomènes électriques. Green ([2]), qui en a fait un très-bel usage, l'a désignée sous le nom de *fonction potentielle*, et Gauss ([3]) sous celui de *potentiel*, qui est généralement adopté.

Le potentiel V d'un système électrisé demeure fini pour tout point P dont la distance r à chacun des points agissants est différente de o; il s'annule pour un point à l'infini. Il en est de même des composantes X, Y, Z, qui sont *les dérivées partielles du potentiel prises en signes contraires* ([4]).

([1]) Poisson, *Mémoires de l'Institut*, p. 1 et 163; 1811.

([2]) Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828, et *Journal de Crelle*, t. XLIV et XLVII.

([3]) Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die in verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* (*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*), 1839.

([4]) Soit R la distance de P à l'origine et supposons que R tende vers l'infini; le système électrisé qui agit sur le point P étant tout entier à une distance finie de l'origine, la distance r de l'un quelconque de ses points au point P se confond à la limite avec R, et par suite on a

$$\lim \mathrm{VR} = \lim \sum \frac{m\mathrm{R}}{r} = \sum m. \tag{1}$$

Le produit du potentiel en P par le rayon vecteur de P tend vers une limite égale à la charge du système qui produit le potentiel.

De même les produits XR^2, YR^2, ZR^2 $\mathrm{X}x^2$, $\mathrm{Y}y^2$, $\mathrm{Z}z^2$ tendent vers des limites finies et déterminées. Soient α, β, γ les angles du rayon vecteur de P avec les trois axes; à la limite les droites qui joignent chacun des points agissant au point P sont parallèles entre elles et font avec les axes les mêmes angles α, β, γ. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} &\lim \frac{\xi - x}{r} = \cos\alpha,\\ &\lim \frac{\eta - y}{r} = \cos\beta,\\ &\lim \frac{\zeta - z}{r} = \cos\gamma,\\ &\lim r = \mathrm{R}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim \mathrm{XR}^2 = \lim \sum \frac{-m(\xi - x)}{r^3}\,\mathrm{R}^2 = -\left(\sum m\right)\cos\alpha,\\ &\lim \mathrm{YR}^2 = -\left(\sum m\right)\cos\beta,\\ &\lim \mathrm{ZR}^2 = -\left(\sum m\right)\cos\gamma; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

PROPRIÉTÉS DES DÉRIVÉES SECONDES DE LA FONCTION V. — On a

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} = \sum -\dfrac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\dfrac{\xi - x}{r}\right)^2\right], \\ \dfrac{d^2V}{dy^2} = \sum -\dfrac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\dfrac{\eta - y}{r}\right)^2\right], \\ \dfrac{d^2V}{dz^2} = \sum -\dfrac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\dfrac{\zeta - z}{r}\right)^2\right]. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, il vient

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{d^2V}{dy^2} + \dfrac{d^2V}{dz^2} \\ = \sum -\dfrac{3m}{r^3}\left[1 - \dfrac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}{r^2}\right] = 0. \end{cases}$$

On représente habituellement la somme des trois dérivées secondes $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ par le symbole ΔV. La propriété exprimée par l'équation (13) s'écrit alors

$$(13\ bis)\qquad \Delta V = 0.$$

Bien entendu, elle n'est démontrée que pour le cas où aucune des distances r ne devient égale à zéro.

ACTION D'UN CORPS ÉLECTRISÉ SUR UN POINT INTÉRIEUR. — Jusqu'ici nous avons écarté avec soin le cas où l'un des éléments qui entrent dans les intégrales X, Y, Z, V devient infini. C'est cependant ce qui arrive quand on cherche l'action exercée par un corps électrisé sur un point intérieur à ce corps : on sait que, même dans ce cas, les actions électriques demeurent en

---

on a, enfin,

$$(4)\quad \begin{cases} \lim X x^2 = \lim X R^2 \dfrac{x^2}{R^2} = -\left(\sum m\right)\cos\alpha,\ \cos^2\alpha = -\left(\sum m\right)\cos^3\alpha, \\ \lim Y y^2 = -\left(\sum m\right)\cos^3\beta, \\ \lim Z z^2 = -\left(\sum m\right)\cos^3\gamma. \end{cases}$$

Ces propriétés du potentiel sont tout à fait caractéristiques.

général finies; et par suite les composantes X, Y, Z ne sont plus représentées par les intégrales (2), lesquelles n'offrent aucun sens dès qu'un de leurs éléments devient infini.

La difficulté provient de l'action exercée sur le point P, que l'on considère, par les portions du corps électrisé infiniment voisines. En effet, décrivons une sphère du point P comme centre, avec un rayon fini, mais aussi petit qu'on voudra. La surface de cette sphère divise le corps en deux régions, l'une extérieure, à laquelle la loi de Coulomb est certainement applicable et dont le potentiel en P a une valeur V_1 parfaitement déterminée; l'autre, intérieure à la sphère, dont le potentiel V^2, exprimé par l'équation (10), contiendrait un élément infini, et pour laquelle il n'est d'ailleurs nullement évident que l'on ait le droit d'appliquer la loi de Coulomb, qui n'est démontrée expérimentalement que pour des distances finies.

Écartons pour le moment cette dernière difficulté, d'ordre purement physique, et admettons que la loi de Coulomb est toujours applicable. La difficulté analytique provenant de ce que l'un des éléments des intégrales (2) et (10) devient infini tient uniquement à la manière dont nous avons formé les éléments de volume et disparaît quand on opère de la manière suivante.

Nous prendrons la sphère, décrite du point P comme centre, assez petite pour que la densité électrique dans son intérieur puisse être considérée comme constante ([1]).

Transportons l'origine O des coordonnées au point P et prenons comme coordonnées nouvelles des coordonnées polaires r, θ et ψ. Un élément de volume $abcda'$, déterminé par les accroissements dr, $d\theta$, $d\psi$ attribués aux coordonnées (*fig.* 17), a pour expression

$$r\,d\theta \,.\, r\sin\theta\,d\psi\,.\,dr.$$

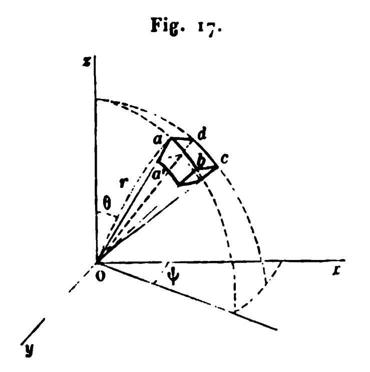
([1]) Analytiquement parlant, cela n'est possible que si la distribution électrique est partout continue; nous nous bornerons à considérer ce seul cas, renvoyant aux traités spéciaux pour le développement complet de la question. Au reste, on voudra bien remarquer que les distributions électriques discontinues sont plutôt des fictions analytiques que des réalités physiques.

Le potentiel V_2 de la sphère sur le point P est donc

$$V_2 = \rho \int\int\int \frac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, dr}{r}$$
$$= \rho \int_0^r r\, dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2\pi\rho r^2.$$

L'intégrale exprimée de cette manière ne contient plus d'élément infini, et le potentiel V_2 a une valeur finie et déterminée, qui tend vers zéro avec r. Il suit de là que le potentiel total $V = V_1 + V_2$ au point O est fini et déterminé, et par suite que l'expression générale à laquelle se rapporte l'équation (10) ne devient infinie qu'en apparence, quand on l'applique à un point intérieur.

Fig. 17.



En remplaçant x, y, z par

$$x = r \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\psi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

on trouve pour les dérivées partielles $\frac{dV_2}{dx}$, $\frac{dV_2}{dy}$, $\frac{dV_2}{dz}$ les expressions

$$\frac{dV_2}{dx} = \frac{dV_2}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dV_2}{dr}\frac{x}{r} = \frac{dV_2}{dr} \sin\theta \cos\psi$$
$$= \rho \int_0^r dr \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

et de même

$$\frac{dV_2}{dy} = \rho \int_0^r dr \int_0^{2\pi} \sin\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta,$$
$$\frac{dV_2}{dz} = \rho \int_0^r dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta\, d\theta.$$

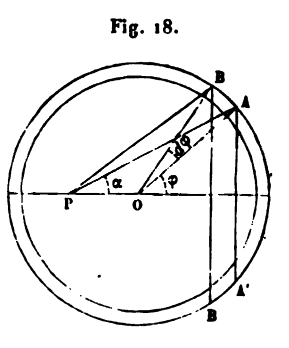
Ces intégrales sont nulles, quel que soit r; par suite :

1° L'action exercée par une sphère électrique homogène sur un point O placé en son centre est nulle.

2° Pour étudier l'action exercée par un corps électrisé sur un point intérieur O, on peut faire abstraction des éléments d'intégrale fournis par une sphère extrêmement petite, entourant immédiatement ce point; il en résulte que l'action d'un corps électrisé sur un point intérieur demeure finie, quelle que soit la distribution électrique à la surface ou dans l'intérieur de ce corps. Les composantes X, Y, Z de cette action sont toujours égales aux dérivées premières du potentiel prises en signe contraire.

Potentiel d'une couche sphérique homogène, en un point intérieur ou extérieur. — I. Considérons une couche sphérique homogène, infiniment mince, de rayon R et d'épaisseur e, et un point P intérieur (*fig.* 18). Soient ρ la densité électrique en tous les points de cette couche, ABA′B′ une zone élémentaire dont l'arc générateur sous-tend au centre de la sphère l'angle $d\varphi$, les angles φ sont comptés à partir de la droite PO qui joint le point P au centre de la sphère. Cherchons à déterminer l'élément de potentiel dV fourni par la portion de couche sphérique comprise dans cette zone. La surface ABA′B′ est $2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi$; le volume correspondant $2\pi R^2 e \sin\varphi d\varphi$; enfin l'élément de potentiel dV est

Fig. 18.



$$dV = 2\pi R^2 e\rho \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{PA}.$$

Posons $PO = a$; le triangle AOP donne

$$PO = \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\varphi}.$$

Le potentiel en P de la couche sphérique tout entière est

$$V = 2\pi Re\rho \int_0^\pi \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\varphi}}\, d\varphi.$$

Quand $a < R$, ce qui est le cas de la *fig.* 18, cette dernière intégrale a pour valeur 2; on a donc

$$(14) \qquad V = 4\pi R e\rho.$$

Cette valeur est indépendante de la position du point P à l'intérieur de la couche sphérique. En désignant par m la masse électrique de la couche

$$m = 4\pi R^2 e\rho,$$

on voit que l'on peut écrire la valeur de V

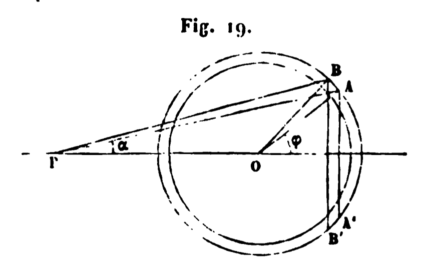
$$V = \frac{m}{R};$$

c'est la valeur du potentiel au centre O de la sphère.

Puisque V est constant à l'intérieur de la couche sphérique, les dérivées partielles $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ sont nulles, et, par conséquent, l'action de la couche sur un point électrisé, placé à son intérieur, est identiquement nulle. Nous avons déjà vu (p. 73) que la loi de Coulomb est seule compatible avec cette propriété.

II. Revenons au cas d'une couche infiniment mince, mais supposons le point P à l'extérieur de la couche (*fig.* 19), nous

Fig. 19.



conserverons aux lettres la même signification; on a toujours

$$V = 2\pi R e\rho \int_0^\pi \frac{R \sin\varphi}{\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\varphi}},$$

mais cette intégrale a pour valeur $\frac{2R}{a}$, quand on suppose $a > R$, et la valeur de V se réduit à

$$(15) \qquad V = \frac{4\pi R^2 e\rho}{a} = \frac{m}{a}.$$

Le potentiel est variable avec la position du point P, mais conserve la même valeur que si toute la masse électrique était condensée au centre de la sphère.

L'expression de V étant indépendante du rayon R de la couche, la même conclusion est applicable à une couche sphérique d'épaisseur finie ou à une sphère pleine. On a donc, en général,

$$(16) \qquad V = \frac{M}{a},$$

et cette propriété subsiste même quand le point attiré est situé à la surface de la sphère.

La force exercée sur le point P est dirigée suivant OP, par raison de symétrie, et sa valeur est

$$(17) \qquad F = -\frac{dV}{da} = \frac{M}{a^2}.$$

Cette force est du signe de M, c'est-à-dire qu'elle agit pour écarter ou pour rapprocher le point P du centre de la sphère suivant que la charge de la sphère est positive ou négative; elle est la même que si toute la masse agissante était placée au centre. C'est un théorème dont nous avons déjà fait et dont nous ferons ultérieurement un fréquent usage [1].

ATTRACTION D'UNE SPHÈRE SUR UN POINT INTÉRIEUR. — Nous nous proposons actuellement de former le potentiel d'une sphère homogène de rayon R en un point P intérieur, dont la distance au centre O de la sphère est a. A cet effet, nous décrirons du point O comme centre une surface sphérique

---

[1] Notamment pour expliquer la variation de la pesanteur à l'intérieur de la Terre, p. 21.

passant par le point P. Le potentiel V_1 de la couche sphérique extérieure est

$$V_1 = \int_a^R 4\pi\rho r\,dr = 2\pi\rho(R^2 - a^2).$$

Le potentiel V_2 du noyau intérieur est

$$V_2 = \tfrac{4}{3}\pi\rho a^2.$$

Par suite, le potentiel total est

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi\rho R^2 - \tfrac{2}{3}\pi\rho a^2. \tag{18}$$

Le potentiel va en décroissant du centre, où il a pour valeur $2\varpi\rho R^2$, à la surface où il est $\frac{4}{3}\pi\rho R^2$ (1).

La force à laquelle le point P est soumis est dirigée suivant le rayon et a pour valeur

$$F = -\frac{dV}{da} = \frac{4}{3}\pi\rho a;$$

elle est nulle au centre de la sphère.

Prenons trois axes de coordonnées passant par le centre de la sphère; on aura $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{da}\frac{da}{dx} = -\frac{4}{3}\pi\rho x;$$

et de même

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{4}{3}\pi\rho z.$$

Enfin

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho.$$

---

(1) L'expression (18) doit être remplacée à l'extérieur de la sphère par la suivante :

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{a}, \tag{18 bis}$$

dont la valeur à la surface de la sphère est $\frac{4}{3}\pi\rho R^2$, et qui devient nulle pour $a = \infty$.

Par suite, on a pour un point placé à l'intérieur d'une sphère homogène

$$(19) \qquad \Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\rho.$$

PROPRIÉTÉ DES DÉRIVÉES SECONDES DE V POUR UN POINT INTÉRIEUR A UN CORPS ÉLECTRISÉ. — Nous allons démontrer que la relation (19) subsiste pour un point P quelconque placé à l'intérieur d'un corps électrisé.

A cet effet, nous traçons à l'intérieur de ce corps une sphère, comprenant le point P, et de rayon assez petit pour qu'on puisse considérer la densité électrique ρ comme constante dans son intérieur. Le potentiel total en P se compose du potentiel V_1, provenant de la portion extérieure à la sphère, et du potentiel V_2 fourni par la portion intérieure. On a

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2;$$

or, d'après ce qui précède, $\Delta V_1 = 0$, $\Delta V_2 = -4\pi\rho$: donc

$$(20) \qquad \Delta V = \Delta V_2 = -4\pi\rho.$$

La démonstration qui précède ne s'appliquerait pas s'il y avait discontinuité dans la distribution électrique autour du point P; cependant la relation (20) est tout à fait générale.

Il est à remarquer qu'elle comprend, comme cas particulier, la relation (13); car il suffit de faire $\rho = 0$ dans l'équation (19) pour obtenir $\Delta V = 0$.

APPLICATION DE LA THÉORIE DU POTENTIEL AU CAS DE L'ATTRACTION UNIVERSELLE. — La loi élémentaire des actions électriques est représentée par la formule

$$f = -\frac{\mu . m}{r^2}.$$

La loi élémentaire de l'attraction des masses pesantes,

$$f = \frac{\mu . m}{r^2},$$

n'en diffère que par le signe. Désignons toujours sous le nom de potentiel la fonction

$$V = \sum \frac{m}{r}.$$

Les dérivées premières du potentiel seront égales en grandeur et en signe aux composantes de la force

$$X = \frac{dV}{dx},$$

$$Y = \frac{dV}{dy},$$

$$Z = \frac{dV}{dz}.$$

Les théorèmes qui précèdent sur le potentiel et ses dérivées premières et secondes subsistent sans modification; mais quand on veut calculer la valeur de la force, par exemple l'attraction des sphères, il ne faut pas opérer de changement de signe dans la valeur des dérivées du potentiel.

Les propriétés que nous allons étudier à la fin de ce Chapitre sont particulières à l'étude de l'électricité.

ÉLECTRICITÉ EN ÉQUILIBRE SUR UN CORPS CONDUCTEUR. — Pour que l'électricité soit en équilibre sur un corps où elle peut se mouvoir librement, il faut que l'action exercée en un point quelconque, intérieur au corps conducteur, soit nulle, sans quoi de l'électricité neutre serait décomposée; on doit donc avoir

$$-X = \frac{dV}{dx} = 0,$$

$$-Y = \frac{dV}{dy} = 0,$$

$$-Z = \frac{dV}{dz} = 0.$$

Il résulte de là que, dans l'intérieur d'un corps conducteur,

(20) $$V = \text{const.};$$

on a donc identiquement

$$\frac{d^2V}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2V}{dy^2}=0, \quad \frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

et, puisque ΔV a toujours pour valeur $-4\pi\rho$,

$$\rho = 0. \tag{22}$$

La densité électrique à l'intérieur d'un corps conducteur est nulle; par suite, *la totalité de la charge communiquée à un corps conducteur se porte à la surface extérieure de ce corps.*

Cette conclusion se présente ici comme une conséquence de la loi de Coulomb, appliquée comme loi élémentaire des actions électriques et pour des distances infiniment petites. Nous avons fait observer que la loi de Coulomb n'est pas susceptible de vérification expérimentale directe dans ces conditions; mais nous avons démontré par l'expérience que l'électricité se porte à la surface des corps conducteurs, et par suite l'application de la loi de Coulomb aux très-petites distances se trouve justifiée *a posteriori.* Elle peut donc être appliquée désormais sans aucune restriction.

TENSION ÉLECTRIQUE. — Une molécule électrique, placée en un point P à la surface d'un conducteur, n'a aucune tendance à se déplacer dans le plan tangent en P; mais elle est sollicitée dans la direction de la normale par une force que nous allons chercher à évaluer.

Le potentiel V, constant dans toute l'étendue du conducteur, est variable à partir de sa surface : c'est une fonction discontinue. Sa dérivée $\frac{dV}{dn}$, prise dans la direction de la normale, est indéterminée au point de discontinuité. Si l'on désigne respectivement par

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+\varepsilon}, \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{-\varepsilon}$$

les valeurs de la dérivée $\frac{dV}{dn}$ à une petite distance ε à l'extérieur

ou à l'intérieur du corps, on a, puisque V est constant à l'intérieur,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-\iota} = 0.$$

Nous démontrerons un peu plus tard que l'on a, en désignant par ρ la densité superficielle au point P,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+\iota} = -4\pi\rho.$$

Quelle est la valeur de F sur la surface électrisée elle-même? Il faut bien remarquer que nous ne savons rien de la manière dont se termine un corps conducteur, au voisinage des corps non conducteurs qui l'entourent. Nous ignorons absolument si les propriétés qui caractérisent les corps non conducteurs succèdent brusquement, ou par une gradation continue, aux propriétés des conducteurs. C'est donc grâce à une convention que nous plaçons la charge des conducteurs sur une surface absolument dénuée d'épaisseur, et il ne faut pas nous abuser sur la valeur d'une convention pareille au point de vue purement expérimental. En réalité, il est naturel de supposer que $\frac{dV}{dn}$ varie d'une manière continue au voisinage de la surface géométrique d'un conducteur. Alors cette dérivée est partout égale et de signe contraire à la force exercée, et a pour valeur moyenne, dans l'épaisseur de la couche électrique, $-2\pi\rho$. Nous poserons donc

$$F = 2\pi\rho; \tag{23}$$

nous ajouterons qu'on établit rigoureusement cette relation pour le cas d'une distribution électrique sur une surface géométrique dénuée d'épaisseur.

La force F se rapporte à l'unité d'électricité. Sur un élément de surface $d\sigma$, la masse électrique est $\rho d\sigma$, et la force exercée $F\rho d\sigma = 2\pi\rho^2 d\sigma$. L'électricité, ne pouvant se déplacer au delà de la surface du conducteur, exerce sur le milieu isolant une pression égale à la force à laquelle elle est soumise : on

convient de la rapporter à l'unité de surface, comme une pression hydrostatique; nous la désignerons par T,

(23) $$T = 2\pi\rho^2.$$

Elle est toujours positive, c'est-à-dire dirigée vers l'extérieur : on l'appelle la *tension électrique* au point considéré. Elle varie comme le carré de la densité.

CHAPITRE V.

THÉORÈME DE GREEN. — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES.

Surfaces équipotentielles ou surfaces de niveau électriques. — Lignes de force. — Théorème de Green. — Conséquences du théorème de Green. — Diagrammes électriques.

SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES OU SURFACES DE NIVEAU ÉLECTRIQUES. — Le potentiel relatif à un système quelconque de corps électrisés est une fonction des coordonnées du point P, auquel il se rapporte, laquelle est continue à une exception près que nous venons de signaler : c'est le cas où le point P se déplace de manière à traverser la surface d'un corps conducteur.

En général l'équation $V = \text{const.}$ définit une famille de surfaces désignées sous le nom de *surfaces équipotentielles* ou *surfaces de niveau électrique*. Elles jouissent de plusieurs propriétés remarquables. En premier lieu, la direction de la force électrique en un point quelconque P est normale à la surface de niveau qui passe par ce point; car, si l'on prend pour axes de coordonnées rectangulaires deux droites Ox, Oy parallèles au plan tangent en P et une droite Oz parallèle à la normale, on a

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0,$$

et par suite

$$F = -\frac{dV}{dz}$$

en grandeur et en direction.

Supposons tracées les deux surfaces

$$V = A, \quad V = A + \alpha,$$

α étant une quantité très petite. Quand le point P passe de la première surface à la seconde, le potentiel subit un accroissement fixe $\delta V = \alpha$; mais les segments δn, interceptés sur les normales à la surface $V = A$, varient en général suivant la position du point P. Quand α tend vers zéro, le quotient

$$\frac{\delta V}{\delta n} = \frac{\alpha}{\delta n}$$

a pour limite — F ; par suite, la force exercée au point P est dirigée vers les potentiels décroissants et varie en raison inverse de la distance δn de deux surfaces de niveau infiniment voisines, dont l'une passe au point considéré. Si donc on a tracé sur un diagramme deux surfaces équipotentielles très voisines, on pourra obtenir graphiquement la valeur approchée de la force F aux divers points de l'une de ces surfaces. Là où les deux surfaces sont très voisines, la force électrique est considérable; là où elles sont éloignées, la force est très petite.

Lignes de force. — La direction de la force électrique varie d'une manière continue avec les coordonnées du point P; elle est celle des trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles, lignes que nous désignerons, d'après Faraday ([1]), sous le nom de *lignes de force*.

Si l'on conçoit un diagramme comprenant une série de surfaces équipotentielles relatives à des valeurs du potentiel très rapprochées et croissant en progression arithmétique, et des lignes de force aussi serrées que possible, on obtiendra sans peine la grandeur et la direction approchées de la force, et cela pour un point quelconque P du diagramme : la direction est celle des lignes de force les plus voisines de P, et la grandeur est en raison inverse des segments interceptés sur ces lignes par les deux surfaces équipotentielles qui comprennent dans leur intervalle le point considéré.

([1]) Faraday (*Experimental researches in electricity*, t. I, p. 383 et suiv.) avait été conduit par ses expériences sur l'influence électrique, et indépendamment de toute théorie mathématique, à la considération des *lignes de force;* comme elles s'écartent en général beaucoup de la forme rectiligne, il fut conduit à dire que la force électrique se propage en ligne courbe.

Les mêmes considérations sont applicables au cas de l'attraction universelle; mais l'usage des surfaces de niveau et des lignes de force, si fréquent en Physique, où l'on est obligé de se contenter de solutions pratiques et approchées, ne paraît guère susceptible de fournir en Astronomie des résultats intéressants.

THÉORÈME DE GREEN. — Proposons-nous de trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \Delta V \, dv = \int\int\int \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d_2 V}{dz^2} \right) dx \, dy \, dz,$$

étendue à tout l'espace compris dans une surface fermée S quelconque (*fig.* 18).

Fig. 18.

On a identiquement

$$(1) \qquad \int\int\int \frac{d^2 V}{dx^2} \, dx \, dy \, dz = \int\int\int \left(d \frac{dV}{dx} \right) dy \, dz.$$

Considérons un prisme élémentaire ayant pour base l'élément $dy\,dz$ dans le plan des yz et ayant son arête parallèle à l'axe des x; ce prisme découpe dans la surface deux éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, dont les centres de gravité ont pour abscisses x_1 et x_2; la portion de l'intégrale (1) fournie par ce prisme est

$$(2) \qquad \int\int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=x_1} \right] dy \, dz.$$

Soient α_1 et α_2 les cosinus des angles que la direction, extérieure à la surface, des normales à $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ fait avec l'axe des x, on a

$$dy\,dz = -\alpha_1\,d\sigma_1 = \alpha_2\,d\sigma_2,$$

et la portion d'intégrale (2) prend la forme

$$\int\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_1}\alpha_1\,d\sigma_1 + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_2}\alpha_2\,d\sigma_2\right];$$

par suite, l'intégrale (1), étendue à toute la surface S, est

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int\frac{dV}{dx}\,\alpha\,d\sigma.$$

Un raisonnement analogue donnera

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dy^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int\frac{dV}{dy}\,\beta\,d\sigma,$$

$$\int\int\int\frac{d^2V}{dz^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int\frac{dV}{dz}\,\gamma\,d\sigma.$$

En ajoutant ces trois dernières équations membre à membre, on a

(3) $$\int\Delta V\,dv = \int\int\left(\frac{dV}{dx}\,\alpha + \frac{dV}{dy}\,\beta + \frac{dV}{dz}\,\gamma\right)d\sigma.$$

Désignons maintenant par dn un élément pris extérieurement sur la normale à la surface S. On a

$$\alpha = \frac{dx}{dn},\quad \beta = \frac{dy}{dn},\quad \gamma = \frac{dz}{dn},$$

et, en substituant dans l'équation (3), on reconnaît que la quantité sous le signe $\int$, dans le second membre, est la différentielle complète de V par rapport à n. On a donc finalement [1]

(4) $$\int\Delta V\,dv = \int\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma.$$

---

(1) L'équation (4) n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale

Nous avons démontré la relation générale

$$\Delta V = -4\pi\rho;$$

on a donc

$$\int \Delta V\,dv = -4\pi \int \rho\,dv.$$

On remarquera que $\int \rho\,dv$ est la somme M des masses électriques enfermées par la surface S; par suite,

$$(5) \qquad \int\int \frac{dV}{dn}\,d\sigma = -4\pi M.$$

Quand M est nul, l'intégrale renfermée dans le premier membre de l'équation est nulle aussi; il en résulte plusieurs conséquences importantes.

Conséquences du théorème de Green. — Prenons pour la surface S le cylindre ayant pour bases deux éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ de surfaces de niveau infiniment voisines, et pour génératrices des normales communes à ces surfaces. On remarquera que $\frac{dV}{dn}$ représente la composante, normale à la surface, et prise en signe contraire, de la force exercée au point P que l'on considère. Or, la force électrique étant normale aux surfaces de niveau, la surface latérale du cylindre ne fournit à l'intégrale $\int\int \frac{dV}{dn}\,d\sigma$ que des éléments nuls, et, par suite, cette intégrale se réduit aux éléments fournis par les deux bases

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2.$$

1° S'il n'y a pas de masses électriques contenues entre les deux éléments de surface, cette somme est nulle d'après l'équation (5)

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = 0;$$

---

démontrée par Green (*Essay on the application of mathematical Analysis*, etc., art. 3). Soit U une fonction continue quelconque de x, y, z. On a

$$\int U\,\Delta V\,dv = \int\int U\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \int\int\int \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right) dx\,dy\,dz.$$

Cette formule se réduit à l'équation (4) quand on y fait $U = 1$.

mais, à la limite, on a

$$d\sigma_1 = d\sigma_2$$

et, par suite,

(6) $$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 = -\left(\frac{dV}{dn}\right)_2.$$

Comme nous avons supposé, en établissant le théorème de Green, que toutes les normales sont dirigées de l'intérieur à l'extérieur de la surface, cette dernière équation signifie que la force électrique F varie d'une manière continue partout où il n'y a pas de masses électriques agissantes.

2° S'il y a entre les deux éléments de surface une masse électrique égale à m, on a toujours, d'après l'équation (5),

(7) $$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi m.$$

Traçons en avant et en arrière de la surface d'un conducteur électrisé, à des distances égales ε, deux portions de surfaces de niveau ([1]), et réunissons-les par des normales. Soient ρ la densité électrique en un point, $d\sigma_3$ l'élément correspondant de surface électrisée; l'équation (7) devient

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-\varepsilon} d\sigma_1 + \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+\varepsilon} d\sigma_2 = -4\pi\rho\, d\sigma_3;$$

mais, à l'intérieur du conducteur, $\frac{dV}{dn}$ est nul, $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-\varepsilon} = 0$, et l'on a, à la limite,

$$d\sigma_2 = d\sigma_3;$$

il en résulte

(8) $$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+\varepsilon} = -4\pi\rho.$$

C'est la proposition que nous avons annoncée (p. 90).

3° On a vu que, en chaque point d'une surface équipoten-

([1]) Le potentiel étant constant à l'intérieur du corps électrisé, on prendra arbitrairement une surface parallèle à la surface du corps pour surface de niveau intérieure.

tielle, la force exercée est représentée par $-\frac{dV}{dn}$; il en est de même à la surface d'un corps électrisé. Il résulte de là que l'on ne modifie pas l'action exercée sur tous les points extérieurs à une surface équipotentielle donnée S, par les masses électriques intérieures à cette surface, quand on substitue à ces masses électriques une distribution fictive d'électricité répandue sur S et possédant en chaque point une densité ρ,

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}. \tag{9}$$

En effet, l'action sur les points extérieurs infiniment voisins de S ne sera pas changée par cette substitution; la fonction V conservera sur toute la surface S la valeur constante qu'elle possédait auparavant, et par suite V restera déterminé pour tout point extérieur à S, comme il l'était précédemment.

La quantité

$$\int \rho\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma$$

de cette distribution est, d'après le théorème de Green, égale à $-\frac{1}{4\pi}(-4\pi M) = M$, c'est-à-dire égale à la somme algébrique des masses électriques enfermées par la surface.

On remarquera que, la force électrique en chaque point de la couche étant normale à la surface et dirigée vers l'extérieur, l'électricité, distribuée d'après la formule (9), est en équilibre. On pourra faire usage de cette propriété, dans un certain nombre de cas, pour la transformation des problèmes électriques.

Considérons une série de surfaces équipotentielles S, S', ... et des lignes de force limitant sur l'une d'elles un élément de surface. Ces lignes forment une sorte de tube continu qui intercepte sur les surfaces suivantes des éléments de grandeur variable $d\sigma$, $d\sigma'$, ... Nous avons vu que l'on peut remplacer l'action des masses électriques intérieures à un de ces tubes par une distribution fictive d'électricité effectuée sur l'élément $d\sigma$, de telle sorte que l'action exercée sur un point

extérieur à S demeure la même; on pourrait établir une distribution analogue sur l'élément $d\sigma'$ de S', ... La densité électrique de chacune de ces distributions est toujours

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

En appliquant le théorème de Green à une portion de tube limitée à deux surfaces équipotentielles, on reconnaît immédiatement que la quantité $\rho\, d\sigma$ de ces distributions est invariable. Il en est de même si l'on considère un tube de lignes de force interceptant sur les surfaces équipotentielles des surfaces finies.

Cette propriété des lignes de force est caractéristique; elle nous sera utile dans la suite.

DIAGRAMMES ÉLECTRIQUES. — Les diagrammes construits au moyen des surfaces équipotentielles et des lignes de force offrent une disposition analogue à celle des Cartes topographiques, sur lesquelles on figure le relief d'un terrain à l'aide des courbes de niveau et des lignes de plus grande pente : leur lecture est aussi aisée et leur emploi permet de résoudre graphiquement un grand nombre de problèmes d'électricité pratique. Il importe donc de se familiariser avec leur usage. Nous en fournirons ici quelques exemples, auxquels se rapporte la *Pl. II*.

1° *Point unique.* — Les surfaces équipotentielles ont pour équation

$$V = \frac{m}{r};$$

ce sont des sphères ayant pour centre le point A. Si l'on fait croître V en progression arithmétique, les valeurs correspondantes de r deviennent de plus en plus rapprochées à mesure que V est plus grand. Supposons notamment la charge m égale à 1, et donnons à V les valeurs

$$V = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ \infty;$$

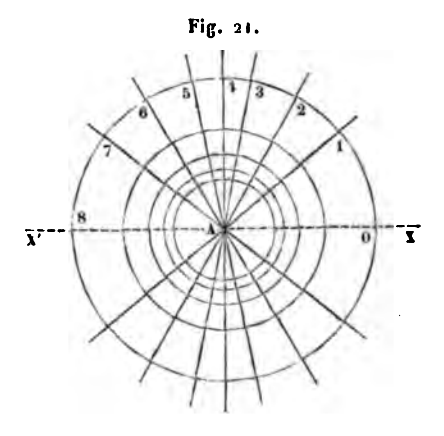
elles correspondent à $r = \infty,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ 0$.

Les lignes de force sont des droites issues du point A. Les segments interceptés sur ces lignes par les sphères équipoten-

tielles sont d'autant plus grands, et par suite la force est d'autant plus petite, qu'on s'éloigne davantage du point A.

Pour donner au diagramme électrique toute la précision possible, il convient de faire partir du point électrisé un nombre de lignes de force proportionnel à la charge et de supposer celles-ci également réparties dans l'espace. Il résulte de là, pour les diagrammes plans, une difficulté que l'on écartera, d'après M. Maxwell, grâce à la convention suivante. On supposera que l'on fait tourner le diagramme autour d'un axe XX' passant par le point A (*fig.* 21). Dans ce mouvement, une droite

Fig. 21.



telle que A 1, faisant un angle θ_1 avec AX', décrit un cône et intercepte sur une sphère, décrite de A comme centre avec l'unité pour rayon, une zone de surface $2\pi(1-\cos\theta_1)$. Si l'on désigne par m la charge du point A, m étant un nombre entier, on placera, dans l'intervalle XX', m lignes de force, auxquelles on donnera des directions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, telles que

$$2\pi(1-\cos\theta_1)=\frac{4\pi}{m},$$

$$2\pi(1-\cos\theta_2)=2\frac{4\pi}{m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\pi(1-\cos\theta_m)=m\frac{4\pi}{m}=4\pi,$$

de telle sorte que les zones comprises entre deux lignes consécutives soient toutes égales à $\frac{1}{m}$ de la surface entière de la sphère. La dernière de ces lignes coïncide avec AX'. La *fig.* 21 se rapporte à $m = 8$.

Au lieu de déterminer θ_1, θ_2, ... par les équations précédentes, il sera plus simple de construire graphiquement les droites A1, A2, ..., en divisant le diamètre de l'un des cercles du diagramme en m parties égales, élevant en ces points des perpendiculaires à XX' et joignant au centre les points d'intersection avec la circonférence.

D'après un théorème précédent, relatif aux surfaces équipotentielles (p. 98), le diagramme, construit pour un point électrisé, est encore exact pour un conducteur électrisé ayant la forme sphérique, et possédant une charge, égale à celle du point A, uniformément répandue sur sa surface.

2° *Deux points électrisés possédant des charges égales et de signes contraires.* — Le potentiel, en un point dont les distances aux points A et B sont r et r', est

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

L'équation des surfaces équipotentielles est donc

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{V}{m}. \tag{10}$$

Elles sont de révolution autour de la ligne AB qui joint les deux points. Leurs méridiennes sont en général des courbes du quatrième degré.

Suivant que $r \lessgtr r'$, le potentiel est positif ou négatif. Quand V est positif et très-grand, r est très-voisin de zéro; la courbe représentée par l'équation (10) se confond sensiblement avec un cercle ayant pour centre le point A. Pour $V = 0$, on a $r = r'$; l'équation (10) représente une droite perpendiculaire au milieu de AB; pour des valeurs intermédiaires du potentiel, l'équation (10) représente des courbes ovoïdes, aplaties vers B et protubérantes en dehors. En attribuant à V des valeurs négatives, on retrouve en ordre inverse les mêmes courbes enveloppant le point B.

Les *fig.* 1, 2, 3 de la *Pl. II* sont destinées à montrer comment on peut construire graphiquement les méridiennes des surfaces équipotentielles d'un système de deux points et les lignes de force correspondantes.

Occupons-nous d'abord des surfaces équipotentielles (*Pl. II*, *fig.* 1). Le potentiel total V en un point est la somme algébrique du potentiel V_1 relatif au point A et du potentiel V_2 relatif au point B :

$$V = V_1 + V_2.$$

Traçons autour des points A et B les surfaces équipotentielles correspondant à des valeurs de V_1 et de V_2 croissant en progression arithmétique. Soient, en particulier, deux de ces surfaces, les sphères $V_1 = p$, $V_2 = q$. Le potentiel à leur intersection a pour valeur

$$V = p + q;$$

donc, sur le diagramme, la méridienne de la surface $V = p + q$ passe par tous les points d'intersection des cercles équipotentiels, tels que la somme algébrique de leurs numéros d'ordre soit égale à $p + q$.

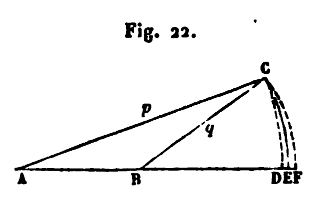
On peut rapprocher autant qu'on veut la raison de la progression arithmétique, et par suite obtenir autant de points que l'on voudra de chacune des surfaces équipotentielles.

Dans le cas particulier qui nous occupe, le potentiel relatif au point B est négatif, et l'on a tracé sur la figure les cercles correspondant aux potentiels 2, 3, 4, 5, 6 et 7 fournis par le point A, -2, -3, -4, -5, -6, -7, fournis par le point B. La surface de potentiel zéro passe par les intersections $(3, -3)$, $(4, -4)$, $(5, -5)$, ..., la surface de potentiel $+1$ par $(3, -2)$, $(4, -3)$, $(5, -4)$, ... Dans la figure, les surfaces équipotentielles de chacun des deux points sont tracées en pointillé, les surfaces équipotentielles du système en traits pleins.

On voit sur la *fig.* 2 (*Pl. II*) comment on trace les lignes de force. On attribue aux lignes de force de chacun des points A et B un numéro d'ordre; considérons le point d'intersection C de deux de ces lignes (*fig.* 22) possédant les n^{os} p et q. La première limite sur la sphère, décrite du point A comme centre et pas-

sant par le point d'intersection, une zone de p unités, c'est-à-dire que, si l'on remplace le point A par une distribution électrique effectuée sur cette sphère, la zone CD limitée par AC possédera p unités d'électricité ; de même sur la sphère décrite du point B comme centre, avec BC pour rayon, la ligne de force q limite une zone CF à laquelle on peut attribuer la charge q. Considérons maintenant la surface équipotentielle du système A et B passant au point C; on peut de même remplacer le système AB par une distribution d'électricité sur cette surface, de telle sorte que la zone CE correspondante comprenne p unités d'électricité pour le point A, q unités pour le point B, en tout $p + q$ unités. La ligne de force d'ordre $p + q$ passe donc par le point C.

Fig. 22.



On obtiendra autant de points que l'on voudra de cette ligne de force en prenant l'unité d'électricité assez petite pour que les points d'intersection soient très-rapprochés.

Dans le cas actuel, les lignes de force correspondant au point B, dont la charge est négative, doivent porter des numéros d'ordre négatifs. Dans la *fig.* 2 (*Pl. II*), les lignes de force de chacun des deux points sont marquées en pointillé, et celles du système en traits pleins.

La *fig.* 3 (*Pl. II*) montre le diagramme complet dont les *fig.* 1 et 2 indiquent la construction. Dans cette figure et dans toutes les figures suivantes, les surfaces équipotentielles sont marquées en pointillé, les lignes de force en traits pleins.

3° *Deux points électrisés possédant des charges de même signe.* — On a

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'},$$

et les surfaces de niveau électrique ont pour équation

$$(11) \qquad \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} = \text{const.}$$

La *fig.* 4 de la *Pl. II* se rapporte au cas $m = m'$, la *fig.* 5 au cas $m = 4m'$ (1).

Pour de très-grandes valeurs positives de V les surfaces de niveau se dédoublent en deux nappes sensiblement sphériques enveloppant les points A et B; pour des valeurs de V plus faibles, les deux nappes ressemblent à celles de surfaces de révolution ayant pour méridiennes des lemniscates; elles se réunissent en une surface dont la méridienne est une courbe en ∞, et qui présente par conséquent un point nodal : c'est ce qui se présente dans le cas de la *fig.* 4 (*Pl. II*) ($m = 12$, $AB = 12$) pour une valeur entière du potentiel $= 4$, et dans la *fig.* 5 ($m = 20$, $m' = 5$) pour une valeur égale à $\frac{50}{AB}$. Au delà les surfaces équipotentielles se déforment encore et se rapprochent de plus en plus d'être des sphères quand on attribue à V des valeurs de plus en plus petites.

Au point nodal, la valeur de $\frac{dV}{dn}$ est indéterminée, mais la force électrique est nulle. On reconnaît sans peine que ce point correspond à une position d'équilibre instable. C'est ce qui se produit chaque fois qu'une surface équipotentielle présente un nœud.

4° *Deux points électrisés possédant des charges de signes contraires.* — La *fig.* 6 (*Pl. II*) se rapporte à ce cas, pour des valeurs de $m = 20$ et $-m' = -5$. Nous désignons ici par m' la valeur absolue de la charge négative du point B. Il est à remarquer que dans ce cas la surface équipotentielle de potentiel zéro est une sphère entourant le point B; elle a pour équation

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{m}{r} = \frac{m'}{r'}.$$

La distance des deux points étant désignée par a, le centre C de la sphère est à une distance de B égale à $\frac{m'^2}{m^2 - m'^2} a$, et son rayon est $\frac{mm'}{m^2 - m'^2} a$. Ces quantités deviennent infinies pour

(1) Les *fig.* 1, 2, 3, 5 et 6 de la *Pl. II* ont été dessinées d'après Maxwell.

$m = m'$, et en effet, dans ce cas, nous avons vu que la surface de potentiel zéro est un plan perpendiculaire au milieu de AB.

Toutes les surfaces équipotentielles intérieures à la sphère C ont un potentiel négatif, celles qui sont extérieures ont un potentiel positif. On remarquera que toutes les lignes de force parties de B vont se terminer en A, tandis qu'un nombre $m - m'$ de celles qui partent de A vont se terminer à l'infini. Nous verrons plus loin l'importance de cette observation.

Une remarque non moins importante, c'est que, puisque la sphère C est au potentiel zéro, on ne changera rien à la force exercée aux points extérieurs à cette sphère, si on la remplace par une surface conductrice en communication avec le sol. Celle-ci ne possédera alors aucune charge ; mais, si l'on venait à supprimer la charge du point B, la sphère conductrice, soumise désormais à la seule influence de A, prendrait une charge déterminée, et le potentiel, nul en un point quelconque du conducteur, serait nul aussi dans son intérieur. A l'extérieur, le potentiel serait partout le même que si le point B existait.

Il résulte du théorème de Green (p. 90) que la charge qu'il faut supposer répartie sur une surface équipotentielle entourant un point B électrisé, pour qu'elle produise à l'extérieur la même action que lui, est égale à celle du point. La sphère C posséderait donc une charge négative, égale à celle du point B. Nous verrons un peu plus tard l'utilité de cette observation pour l'étude de l'influence d'un point sur une sphère (*voir* p. 131).

5° Nous nous demanderons encore quel est le diagramme qui convient pour représenter une portion de l'espace où la force électrique conserve partout la même grandeur et la même direction : c'est ce qu'on appelle un *champ électrique constant*. Le potentiel est alors une fonction linéaire des coordonnées, les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles équidistants, et les lignes de force des droites perpendiculaires à ces plans et équidistantes entre elles; le diagramme se compose donc de deux systèmes de droites rectangulaires régulièrement espacées.

CHAPITRE VI.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN CONDUCTEUR.

Distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur. — Méthode de Coulomb dite *du plan d'épreuve*. — Distribution sur un ellipsoïde, sur un disque circulaire, sur deux sphères en contact. — Expériences diverses de Coulomb. — Lames allongées. — Disques. — Cylindres. — Pointes.

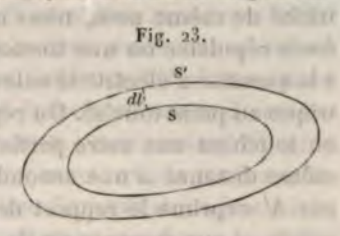
DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN CONDUCTEUR. — Nous avons vu (p. 88) que l'électricité se distribue à la surface d'un conducteur de telle sorte que la résultante des actions électriques en tout point P intérieur est nulle, que par suite le potentiel V est constant dans tout l'intérieur d'un corps conducteur, et que sa surface est une surface de niveau électrique. La densité électrique, telle qu'elle a été définie analytiquement (p. 77), est en général variable d'un point à l'autre de la surface, et, si l'on désigne par dn une portion de normale menée extérieurement à la surface du corps et limitée à une surface de niveau infiniment voisine, on a en chaque point (p. 98)

$$(1) \qquad \rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

Dans l'hypothèse de la matérialité de l'électricité, on pourrait supposer que le fluide répandu à la surface d'un conducteur y possède une épaisseur ε uniforme et une densité variable $\frac{\rho}{\varepsilon}$, ou bien qu'il y affecte une densité uniforme δ et une épaisseur ε variable dont la valeur est $\frac{\rho}{\delta}$. Ces deux manières, analytiquement équivalentes, d'envisager la distribution élec-

trique, n'offrent plus pour nous aucun intérêt théorique, mais la dernière a l'avantage de fournir un diagramme particulier de la distribution électrique que nous ne pouvons nous dispenser de signaler à cause de sa simplicité. En chaque point de la surface S (*fig.* 23) d'un conducteur électrisé, portons sur une normale à la surface une longueur dl proportionnelle à l'*épaisseur électrique* au point considéré. Les extrémités de ces normales forment une surface fermée S' qui enveloppe le conducteur. La densité ρ définie par l'équation (1) est proportionnelle à la distance normale dl des deux surfaces et la charge totale est proportionnelle au volume de la couche qu'elles limitent.

Fig. 23.



Il est à remarquer que dl, proportionnel à ρ, est en raison inverse de dn, c'est-à-dire que la distance normale de S et de S' est en raison inverse de la distance de S à la surface de niveau électrique infiniment voisine.

MÉTHODE DU PLAN D'ÉPREUVE. — Coulomb [1] a imaginé le premier une méthode qui permet d'étudier expérimentalement la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur.

On fixe un disque plan de clinquant à l'extrémité d'une aiguille en gomme laque qui est longue et très-fine (c'est ce que Coulomb nomme le *plan d'épreuve*), puis on l'applique sur les points du conducteur dont on veut étudier la charge. Si ce disque est très-petit et la courbure du corps peu prononcée, on doit admettre que le plan d'épreuve emporte, quand on le retire, une charge proportionnelle à la densité électrique au point touché; il en serait de même si, au lieu d'un disque, le petit conducteur d'épreuve avait la forme d'une sphère, d'un hémisphère, etc. [2].

---

[1] *Mémoires de l'Académie*, p. 425; 1787.

[2] Il n'est pas très-facile de déterminer le rapport de la quantité d'électricité emportée par le plan d'épreuve à celle qui existe sur une surface égale autour du point touché. Coulomb admettait, sans preuve suffisante, qu'un plan d'épreuve en forme de disque emporte une quantité d'électricité double de

Si donc nous plaçons ensuite ce plan d'épreuve dans la balance de torsion à la place de la boule fixe, vis-à-vis de l'aiguille mobile primitivement chargée d'une quantité constante d'électricité de même nom, nous mesurerons à une distance α une force répulsive ou une torsion A, et elle sera proportionnelle à la quantité d'électricité enlevée, c'est-à-dire à la densité électrique au point touché. On répète ensuite la même observation en touchant une autre partie du conducteur, on mesure à la même distance α une seconde torsion A', et le quotient de A par A' exprime le rapport des densités électriques aux deux points et aux époques où ils ont été successivement touchés.

Coulomb jugea, non sans raison, qu'il importait de soumettre le principe même de la méthode du plan d'épreuve au contrôle de l'expérience. Il prit à cet effet une sphère électrisée, et, après avoir touché l'un de ses points avec le plan d'épreuve, il introduisit celui-ci dans la balance vis-à-vis de l'aiguille primitivement chargée et mesura la répulsion A qui maintenait l'écart à 20°. Immédiatement après, il mit la sphère en contact avec une autre sphère isolée qui lui était identique, mais à l'état naturel, puis il les sépara : il avait ainsi réduit à la moitié la charge totale et, par suite, la densité électrique sur la première; alors il la toucha de nouveau avec le plan d'épreuve, remit celui-ci dans la balance et ne trouva plus qu'une répulsion moitié moindre à la même distance de 20°.

Après s'être ainsi assuré de la légitimité de la méthode, tout au moins dans le cas des sphères, Coulomb se préoccupa de corriger l'erreur qui résulte de la déperdition progressive de l'électricité des conducteurs. Supposons que l'on veuille comparer les densités électriques en des points a, b quelconques; il faudra d'abord toucher a et mesurer la répulsion A; cette opération prendra environ trois minutes. Ensuite il faudra faire

---

celle qui existe au point touché, et l'on a admis depuis, sans de meilleures raisons, qu'il emporte seulement une quantité égale.

Un seul cas a été étudié analytiquement d'une manière complète : c'est celui d'un corps d'épreuve hémisphérique que l'on applique par sa base sur le corps électrisé. M. Beltrami a démontré (*Journal de Physique*, t. VII, p. 176) qu'il prend une quantité d'électricité triple de celle qui existe au point touché sur une surface égale à sa base.

la même mesure sur *b*, ce qui donnera une répulsion B et emploiera trois autres minutes; mais il est évident que, la charge du point *b* ayant été diminuée pendant l'intervalle qui sépare les deux mesures, le rapport de A à B sera plus grand que celui des charges réelles que les deux points possèdent au même moment. Pour annuler cette erreur, Coulomb revient ensuite au point *a*, après le même intervalle de trois minutes; il recommence la mesure, ce qui donne une autre torsion A′, et il admet, ce qui est très-suffisamment exact, que la moyenne de A et de A′ exprime la répulsion que l'on eût trouvée en *a* si l'on avait touché ce point en même temps que l'on a touché le point *b*. Avec cette précaution d'alterner les contacts après des intervalles de temps égaux, la méthode de Coulomb ne laisse plus rien à désirer, et nous pourrons avoir toute confiance aux résultats qu'elle a fournis dans les divers cas où elle a été appliquée.

M. Riess (1) a indiqué un autre moyen de tenir compte de la déperdition: il consiste à employer deux plans d'épreuve aussi identiques que possible, à l'aide desquels on touche simultanément les deux points du conducteur que l'on veut comparer. L'un des plans est aussitôt porté dans la balance, tandis que l'autre est suspendu à l'intérieur d'une cloche de verre, d'où on le retire ensuite pour le porter à son tour dans la balance. Le coefficient de déperdition est déterminé dans la balance même et au commencement des expériences; on peut donc se servir de ce coefficient pour calculer la charge initiale de la boule abandonnée à elle-même dans une capacité close analogue à celle de la balance et pendant une durée connue. La méthode de M. Riess ne peut rendre de services réels que pour étudier la distribution électrique sur un corps dont l'état électrique est exposé à varier rapidement, comme un corps mal isolé, un conducteur de machine électrique, etc.

Nous sommes maintenant en possession de méthodes qui nous permettent d'étudier expérimentalement la distribution de l'électricité. Elles sont d'autant plus précieuses que l'étude théorique de la distribution présente, dans la plupart des cas,

---

(1) Riess, *Reibungselectricität*, t. I, p. 137.

des difficultés analytiques insurmontables. Cependant on a obtenu théoriquement un certain nombre de résultats susceptibles de vérification expérimentale, et sur lesquels nous devons plus particulièrement insister, puisque chacun d'eux nous fournira une nouvelle démonstration *a posteriori* de la loi fondamentale de l'électricité.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UN ELLIPSOÏDE OU SUR UN DISQUE CIRCULAIRE. — Il n'y a pas de méthode générale permettant de déterminer *a priori* le rapport des densités électriques aux divers points d'un conducteur de forme connue. Ce n'est qu'à l'aide d'artifices particuliers qu'on arrive à résoudre théoriquement la question dans un certain nombre de cas.

Nous allons, à titre d'exemple, déterminer la distribution qu'affecte l'électricité sur un ellipsoïde conducteur.

Nous démontrerons d'abord qu'une couche homogène d'électricité comprise entre deux ellipsoïdes concentriques homothétiques est sans action sur un point électrisé intérieur.

1. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\[2ex] \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}=1 \end{cases}$$

les équations des deux ellipsoïdes. Pour exprimer qu'ils sont homothétiques, il suffit de joindre aux équations (1) la suivante :

$$(2)\qquad \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

Soit N (*fig.* 24) un point quelconque intérieur aux deux ellipsoïdes et dont les coordonnées sont p, q, r. Par ce point on mène arbitrairement une droite qui coupe l'ellipsoïde intérieur en N et B, l'extérieur en A′ et B′. Nous démontrerons d'abord que l'on a

$$\overline{AA'}=\overline{BB'}.$$

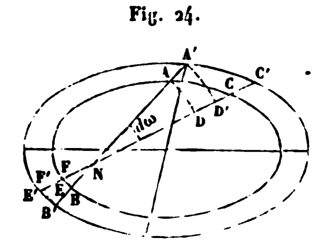
Désignons en effet par α, β, γ les cosinus des angles de la

droite NA avec les axes; les coordonnées des points A et B sont

$$p + \alpha.\overline{NA}, \quad p - \alpha.\overline{NB},$$
$$q + \beta.\overline{NA}, \quad q - \beta.\overline{NB},$$
$$r + \gamma.\overline{NA}, \quad r - \gamma.\overline{NB}.$$

Ces coordonnées doivent satisfaire à la première équation (1),

Fig. 24.



ce qui donne deux équations que nous retrancherons membre à membre. Nous obtenons

$$\left(\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$$
$$+ 2\left(\overline{NA} + \overline{NB}\right)\left(\frac{p\alpha}{a^2} + \frac{q\beta}{b^2} + \frac{r\gamma}{c^2}\right) = 0$$

ou

$$(3) \quad \left(\overline{NB} - \overline{NA}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = 2\left(\frac{p\alpha}{a^2} + \frac{q\beta}{b^2} + \frac{r\gamma}{c^2}\right).$$

On a de même

$$\left(\overline{NB'} - \overline{NA'}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2}\right) = 2\left(\frac{p\alpha}{a'^2} + \frac{q\beta}{b'^2} + \frac{r\gamma}{c'^2}\right)$$

ou, en tenant compte de la relation (2),

$$(4) \quad \left(\overline{NB'} - \overline{NA'}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = 2\left(\frac{p\alpha}{a^2} + \frac{q\beta}{b^2} + \frac{r\gamma}{c^2}\right).$$

Les équations (3) et (4) donnent immédiatement

$$\overline{NA'} - \overline{NA} = \overline{NB'} - \overline{NB},$$

(5) $$\overline{AA'} = BB',$$

ce que nous voulions démontrer.

2. Du point N comme sommet décrivons un cône élémentaire d'angle solide $d\omega$ (¹). Il intercepte dans la couche comprise entre les ellipsoïdes deux éléments de volume ACA'C', BEB'E'. Du point N comme centre, avec des rayons successivement égaux à $\overline{NA}$ et à $\overline{NA'}$, $\overline{NB}$ et $\overline{NB'}$, décrivons des sphères : elles intercepteront sur le même cône élémentaire des éléments de volume ADA'D', BFB'F' qui ne diffèrent de ACA'C', BEB'E' que par des quantités infiniment petites par rapport à ces éléments. Nous pouvons donc indifféremment prendre les uns pour les autres.

Les éléments ADA'D', BFB'F' exercent sur le point N des actions directement opposées : je dis qu'elles sont égales. En effet, les éléments homogènes et de même épaisseur AA' = BB' peuvent être décomposés en un même nombre d'éléments infiniment minces. Proposons-nous de trouver l'action de l'un de ces éléments, de rayon r et d'épaisseur δr, sur l'unité d'électricité placée en N. Le volume de l'élément est $r^2 d\omega dr$, et, en désignant par ρ la densité électrique uniforme de la couche, il contient une quantité d'électricité $\rho r^2 d\omega dr$ dont l'action sur le point N est

$$\frac{\rho r^2 d\omega dr}{r^2} = \rho d\omega dr;$$

elle est donc indépendante de r, et, par suite, chacun des éléments en même nombre et de même épaisseur dr dans lesquels nous avons décomposé les volumes ADA'D', BFB'F' exerce des actions égales. Il en est de même des volumes ADA'D', BFB'F'.

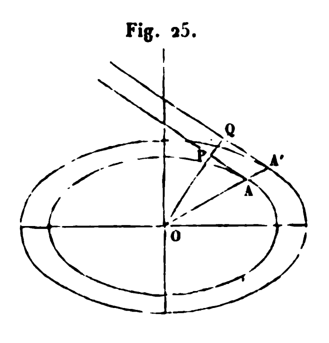
(¹) C'est-à-dire qui intercepte la surface $d\omega$ sur une sphère de rayon 1 décrite du sommet du cône comme centre.

Le volume compris entre les deux ellipsoïdes pouvant être décomposé par des cônes élémentaires en volumes ADA'D', BFB'F' dont les actions s'annulent deux à deux, l'action de la couche totale sur le point intérieur quelconque N est nulle. Cette propriété, indépendante du rapport $\frac{a'}{a}$ de similitude des deux ellipsoïdes homothétiques, est encore vraie quand ils sont infiniment voisins ([1]).

3. Cela posé, si l'on considère, à la surface d'un ellipsoïde conducteur, une couche d'électricité de densité uniforme limitée extérieurement par un ellipsoïde homothétique infiniment voisin, ou, ce qui revient au même, une distribution électrique sans épaisseur dont la densité en chaque point soit proportionnelle à la distance des deux ellipsoïdes, l'électricité ainsi distribuée sera en équilibre, puisque l'action exercée en un point quelconque intérieur au conducteur sera nulle.

Il en résulte que la densité électrique aux extrémités des axes de l'ellipsoïde est proportionnelle à ces axes. En général, la densité électrique en un point quelconque est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point. En effet, l'épaisseur comprise entre les deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins (c'est-à-dire la distance des plans tangents parallèles menés aux deux ellipsoïdes) est, par suite de l'homothétie, proportionnelle à la distance OP de l'un de ces plans tangents au centre d'homothétie O (*fig.* 25).

Fig. 25.



La longueur de la perpendiculaire OP est, comme on sait,

$$(6)\qquad p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

([1]) Ce mode de démonstration est emprunté à M. von Lang (*Einleitung in die theoretische Physik*, p. 153; Braunschweig, 1867).

Le dernier nombre donné par Coulomb ne présente absolument aucun sens, puisque la méthode du plan d'épreuve cesse d'être applicable au voisinage immédiat du bord où le rayon de courbure est extrêmement petit; si l'on fait abstraction de ce nombre, on reconnaîtra que la concordance de la théorie et de l'expérience laisse peu de chose à désirer. On doit d'ailleurs observer, pour l'appréciation exacte de tout ce qui suit, que la théorie de l'électricité, due à Poisson, est de trente ans postérieure aux recherches expérimentales de Coulomb.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR DEUX SPHÈRES EN CONTACT. — L'étude théorique de la distribution de l'électricité sur deux sphères en contact a été faite par Poisson ([1]) et complétée par M. Plana ([2]) et par M. Roche ([3]). Nous n'indiquerons pas les méthodes qu'ils ont employées; nous nous bornerons à comparer les résultats des expériences de Coulomb à ceux que prévoit le calcul.

Coulomb a d'abord cherché suivant quel rapport la charge électrique totale se partage entre deux sphères inégales. Il a trouvé que la densité électrique moyenne, celle qu'on observe après la séparation des sphères, est toujours plus grande sur la plus petite des deux sphères. Le Tableau suivant, dressé par Coulomb d'après l'ensemble de ses expériences, donne le rapport des densités moyennes sur les deux sphères; on y a joint le même rapport calculé théoriquement par Poisson :

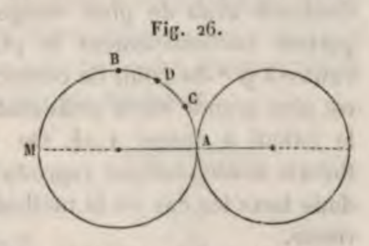
Rapport des rayons des sphères.	Rapport des densités moyennes observé par Coulomb.	Rapport des densités moyennes calculé par Poisson.
1........	1	1
2.........	1,08	1,16
4.........	1,30	1,32
8.........	1,65	1,44
∞........	2,00	$1,65 = \frac{\varpi^2}{6}$

([1]) Poisson, *Mémoires de l'Institut*, 1811, Ire Partie, p. 1.
([2]) Plana, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, 2e série, t. VII, p. 71.
([3]) Roche, *Mémoires de l'Académie de Montpellier, Section des Sciences*, t. II, p. 115.

Le dernier nombre proposé par Coulomb est une limite qu'il avait trouvée par induction; mais on doit remarquer que la méthode du plan d'épreuve devient de plus en plus défectueuse pour la plus petite des deux sphères à mesure que son rayon décroît, que par suite elle doit conduire à une valeur limite inexacte.

Coulomb a cherché aussi à déterminer par l'expérience la distribution de l'électricité sur les sphères pendant le contact. Considérons d'abord deux sphères égales (*fig.* 26); on trouve que la charge est nulle au point A de contact et qu'elle reste insensible jusqu'au point C, à une distance angulaire de 20°. A partir de ce point, en s'éloignant encore de A, on commence à trouver une charge électrique appréciable qui augmente rapidement jusqu'au point B, situé à 90°, et lentement depuis B jusqu'au point M opposé au contact. Coulomb avait déterminé ces charges avec beaucoup de soin; il avait encore fait des expériences en réunissant deux sphères inégales dont les rayons R, R' étaient dans le rapport de 1 à 2, et il avait noté les densités comparées des couches électriques sur la petite sphère, à partir du contact jusqu'à l'extrémité opposée du diamètre qui joint les centres. Tous ces nombres attendaient pour ainsi dire la théorie mathématique, afin de lui servir d'épreuve. Aussi Poisson calcula-t-il les rapports des charges en ces différents points, et la comparaison des résultats de l'expérience et du calcul se trouve dans les Tableaux suivants :

Fig. 26.



Sphères égales.

Distances angulaires à partir du contact.	Densités électriques observées.	Densités électriques calculées.
20	0,000	0,000
30	0,208	0,170
60	0,799	0,745
90	1,000	1,000
180	1,057	1,140

Sphères inégales, $R = 1$, $R' = 2$

Distances angulaires à partir du contact.	Épaisseurs électriques observées.	calculées.
30°..........	0,000	0,000
60..........	0,588	0,556
90..........	1,000	1,000
180..........	1,333	1,353

Dans le dernier exemple, où les sphères sont inégales, Coulomb avait de plus comparé l'état des deux globes, en portant successivement le plan d'épreuve sur l'un et sur l'autre à 90° du point de contact; il avait trouvé que la densité est plus grande sur le petit globe, dans le rapport de 1,25 à 1 : le calcul a donné 1,24. On voit avec quelle exactitude la théorie mathématique reproduit les conditions expérimentales dans tous les cas où la méthode du plan d'épreuve est rigoureuse.

EXPÉRIENCES DIVERSES DE COULOMB. — LAMES ALLONGÉES. — DISQUES. — CYLINDRES. — POINTES. — Coulomb a encore étudié la distribution électrique dans un assez grand nombre de cas pratiques qui n'ont pas été traités analytiquement. Il a, par exemple, examiné la distribution de l'électricité sur une lame d'acier qui avait 11 pouces de longueur, 1 pouce de largeur et $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur; il donna au plan d'épreuve la forme d'un rectangle qui avait 3 lignes de largeur et 1 pouce de longueur, de façon qu'on pouvait l'appliquer sur toute la largeur de la lame à la fois et à diverses distances de ses extrémités. Les expériences furent faites d'abord au milieu, ensuite à 1 pouce de l'extrémité, puis à l'extrémité même, et enfin l'on fit une dernière épreuve en plaçant le plan sur le prolongement de la lame : la densité électrique s'est montrée à peu près constante depuis le milieu jusqu'à 1 pouce de l'extrémité; elle augmente ensuite jusqu'à devenir égale à 2,02 à cette extrémité même. Avec des lames plus longues, la densité demeure encore constante jusqu'à 1 pouce de l'extrémité. Quand on place le plan d'épreuve sur le prolongement de la lame, il emporte une

charge quatre fois plus grande que celle qu'il prend au milieu; mais cette dernière expérience n'offre pas le sens précis et rigoureux que lui attribuait Coulomb [1].

L'augmentation rapide de la densité électrique que nous venons de constater dans le cas d'une lame allongée se retrouve sur le rebord de toutes les plaques. Nous rappellerons à cet égard les résultats obtenus par Coulomb avec un disque circulaire (*voir* p. 115).

Les prismes, les cylindres allongés donnent lieu à des remarques analogues. Par exemple, Coulomb étudia un cylindre à base circulaire de 2 pouces de diamètre et de 30 pouces de longueur; il était terminé par deux hémisphères, c'est-à-dire tout à fait semblable aux tiges des conducteurs des machines électriques. Voici les résultats obtenus par Coulomb :

	Densité électrique.
Milieu........................	1,00
2 pouces de l'extrémité........	1,25
1 pouce de l'extrémité........	1,80
Extrémité....................	2,30

Nous voyons en résumé que, sur toutes les parties planes d'un conducteur, la densité électrique est faible; mais, là où le rayon de courbure est très-petit, le long des arêtes vives par exemple, la densité augmente rapidement : elle est pratiquement énorme et serait théoriquement infinie à l'extrémité d'une pointe bien aiguisée.

Aux variations de la densité électrique que nous venons de constater correspondent des variations analogues et plus accusées encore de la tension, qui est (*voir* p. 91) proportionnelle au carré de la densité. La tension sur les arêtes vives ou sur les pointes est telle que la résistance opposée au mouvement de l'électricité par le milieu gazeux ambiant est en

(1) Coulomb fait observer que dans les expériences précédentes l'électricité ne se répand que sur la face supérieure du plan d'épreuve, tandis qu'ici elle se répand sur les deux faces opposées : en divisant par 2 le résultat obtenu, on trouve, en effet, le même nombre que quand le plan d'épreuve est posé sur l'extrémité de la lame.

général vaincue : il en résulte de curieux phénomènes que nous étudierons plus tard. Bornons-nous pour le moment à tirer une conclusion pratique : c'est qu'on doit terminer par des formes arrondies tous les conducteurs sur lesquels on veut maintenir une charge durable.

Nous renverrons au Mémoire original de Coulomb pour quelques cas de distribution dont l'intérêt ne nous a pas paru suffisant pour les consigner ici.

CHAPITRE VII.

CAPACITÉS ÉLECTRIQUES. — PHÉNOMÈNES D'INFLUENCE.

Sources constantes d'électricité. — Définition expérimentale du potentiel à l'intérieur d'un conducteur. — Capacités électriques. — Partage des charges électriques entre des conducteurs en communication lointaine. — Mesure des capacités et des potentiels. — Analogie du potentiel et de la température, des capacités électriques et calorifiques.

Influence électrique. — Expérience d'Œpinus. — Influence d'un point sur une sphère. — Images électriques. — Influence de deux sphères.— Cas général de l'influence. — Coefficients d'induction. — Influence sur un corps présentant des cavités intérieures. — Écrans électriques. — Applications diverses. — Influence sur un corps armé de pointes. — Pouvoir des pointes et des flammes. — Tourniquet électrique. — Mesure du potentiel en un point de l'air.

Explication de l'attraction des corps légers.

CAPACITÉS ÉLECTRIQUES.

SOURCES CONSTANTES D'ÉLECTRICITÉ. — Nous savons que l'électricité peut être développée à la suite d'actions mécaniques, telles que le frottement; nous verrons plus tard qu'elle peut aussi apparaître sous l'influence de la chaleur, ou encore des actions chimiques qui se produisent dans les bocaux de piles. Les deux électricités prennent toujours naissance en quantités égales, et, si la cause de production d'électricité est permanente, comme dans une machine électrique en mouvement ou dans une pile, l'électricité se reproduit à mesure qu'on lui fournit un écoulement, de manière à ramener la source à un état d'électrisation constant.

On pourrait le démontrer en touchant un point déterminé du conducteur d'une machine électrique, à l'état de mouve-

ment uniforme, avec une petite sphère d'épreuve. On reconnaîtrait, à l'aide de la balance de Coulomb, que, pour un état atmosphérique invariable, la petite sphère reçoit toujours la même charge, quelles que soient les pertes d'électricité que la machine ait subies dans l'intervalle des mesures, par exemple en chargeant des batteries, donnant des étincelles, etc. La même constatation est plus facile et plus précise pour les piles électriques isolées, en employant à cet effet les électromètres très-délicats que nous décrirons par la suite.

Au lieu de toucher directement un point d'une source électrique avec la sphère d'épreuve, il est préférable de mettre celle-ci en communication lointaine avec la source par un fil assez délié, pour n'avoir par lui-même qu'un effet négligeable sur la distribution électrique en équilibre sur la sphère. Dans ces conditions, on observe que la charge reçue est la même en quelque point de la source que soit attachée la seconde extrémité du fil, ce qui n'avait pas lieu dans le cas du contact direct de la sphère d'épreuve. La charge qu'elle reçoit dans ces conditions nouvelles est donc une constante caractéristique de l'état de la source.

Puisque la sphère et la source, réunies par le fil, ne forment qu'un conducteur unique, à l'intérieur duquel le potentiel doit être constant, on voit que le potentiel de la source est égal à celui de la sphère, et qu'il suffit de déterminer celui-ci pour connaître celui-là. On voit aussi que toute source électrique est caractérisée par une valeur particulière du potentiel qu'elle possède et qu'elle peut communiquer : les machines électriques communes sont des sources à potentiel très-élevé; les piles, des sources à faible potentiel.

DÉFINITION EXPÉRIMENTALE DU POTENTIEL A L'INTÉRIEUR D'UN CONDUCTEUR. — Le potentiel d'une sphère conductrice de rayon R portant une charge M est

$$V = \frac{M}{R}. \tag{1}$$

Pour $R = 1$, le potentiel est numériquement égal à la charge.

Ainsi *le potentiel d'une source électrique constante est la*

charge qu'elle communique à une sphère de rayon 1 que l'on met en communication lointaine avec la source par un fil de masse négligeable.

Quand on a chargé, à l'aide d'une même source, plusieurs corps assez éloignés les uns des autres pour ne pas exercer entre eux d'influence appréciable, ils sont tous au potentiel V de la source, et, si on les met en communication lointaine, ils conservent leur potentiel. De là cette définition expérimentale du potentiel d'un conducteur : ***c'est la charge qu'il faut donner à une sphère de rayon 1 pour que, mise en communication lointaine avec le corps, elle ne lui fournisse pas d'électricité et n'en reçoive pas de lui.***

CAPACITÉ ÉLECTRIQUE (¹). — Quand une distribution d'électricité est en équilibre sur un conducteur, la densité électrique ρ possède en chaque point de sa surface une valeur déterminée, et la charge totale M a pour valeur $\int \rho\, d\sigma$, la sommation étant étendue à tous les éléments de surface du conducteur. Le potentiel V à l'intérieur du corps est constant et égal à $\int \frac{\rho\, d\sigma}{r}$; r est la distance de l'élément $d\sigma$ au point intérieur que l'on considère.

Si l'on suppose maintenant que l'on communique au même conducteur une charge pM, elle sera en équilibre, si on la suppose distribuée de telle sorte que la densité en chaque point de la surface soit $p\rho$; car le potentiel deviendra alors pV et sera constant dans tout l'intérieur du corps, ce qui est justement la condition de l'équilibre électrique. Nous admettrons que cet équilibre n'est possible que d'une seule manière (²).

(¹) La notion expérimentale de capacité électrique est due à Volta (*Journal de Physique de l'abbé Rozier*, avril 1779).

(²) Quand deux distributions électriques sont en équilibre sur un conducteur, chacune séparément, leur ensemble est évidemment en équilibre; observons de plus que, si une distribution d'électricité positive est en équilibre, de telle sorte que la densité en un point quelconque du conducteur soit ρ, une distribution d'électricité négative, ayant en chaque point la densité $-\rho$, sera aussi en équilibre d'elle-même.

Cela posé, supposons que la même charge M puisse affecter sur un corps deux

Ainsi, quand la charge augmente dans un certain rapport, le potentiel croît dans le même rapport, c'est-à-dire que ces deux quantités sont proportionnelles; on a

$$M = CV, \tag{2}$$

et C désigne une constante, dépendant seulement de la forme et des dimensions du conducteur que l'on considère. Le coefficient C se nomme *capacité électrique* du corps : *c'est la charge que prend le corps quand on le porte au potentiel* 1.

Nous savons que, pour une sphère de rayon R, on a

$$V = \frac{M}{R}, \quad M = RV.$$

La capacité d'une sphère est donc égale à son rayon.

Pour un corps quelconque,

$$C = \frac{M}{V} = \frac{\int \rho\, d\sigma}{\int \frac{\rho\, d\sigma}{r}},$$

et la capacité est une fonction des dimensions linéaires r du conducteur, de degré $+1$. La capacité électrique doit donc être considérée comme représentant une longueur.

PARTAGE DES CHARGES ÉLECTRIQUES ENTRE DES CONDUCTEURS TRÈS-ÉLOIGNÉS. — Soient V, V', ... les potentiels, C, C',... les capacités électriques de corps trop éloignés les uns des autres pour exercer entre eux une influence sensible. Leurs charges sont CV, C'V', ...

Si l'on établit entre eux des communications lointaines, par

distributions correspondant à des densités ρ et ρ' différentes; l'ensemble de la distribution ρ de quantité + M et de la distribution $-\rho'$, de quantité $-$ M, constituerait un état d'équilibre possible, caractérisé par une masse totale nulle et une densité variable $\rho - \rho'$.

Nous admettons que $\rho = \rho'$, c'est-à-dire qu'un corps conducteur qui n'est soumis à l'influence d'aucun autre et qui possède des charges égales d'électricités contraires est nécessairement à l'état neutre en tous ses points. L'expérience confirme qu'il en est toujours ainsi, et l'on peut fournir de ce théorème une démonstration rigoureuse, déduite de la formule de Green (*voir* le *Traité d'électricité* de M. Mascart, t. I, p. 236).

des fils de masse négligeable, ils prendront tous un même potentiel U, et, comme la charge totale demeure invariable ainsi que la capacité de chacun des corps, on a

$$(3)\quad \begin{cases} (C + C' + \ldots)U = CV + C'V' + \ldots, \\ U = \dfrac{CV + C'V' + \ldots}{C + C' + \ldots}. \end{cases}$$

Mesures des capacités et des potentiels. — Il résulte de là une méthode générale pour la mesure des capacités, des potentiels et des charges électriques.

Considérons seulement deux corps : une petite sphère a l'état neutre et le corps que l'on veut étudier. La capacité de la sphère est r, sa charge et son potentiel initiaux sont nuls; on a donc simplement

$$(4)\qquad (C + r)U = CV;$$

on mesurera sans peine le potentiel final U de la petite sphère, par exemple en déterminant sa charge rU au moyen de la balance de Coulomb. L'équation (4) ne renferme plus que deux quantités inconnues C et V.

1° Si le corps est de petites dimensions, on pourra mesurer sa charge initiale dans la balance de Coulomb. Quand on connaît la charge initiale $M = CV$, l'équation (4) permet de déterminer la capacité C, et par suite le potentiel initial V; de même, si l'on connaît C ou V, on pourra déterminer M.

2° Si le corps est de très-grandes dimensions, sa capacité est très-grande par rapport à la capacité r de la sphère, et, par suite, U est très-voisin de V; à la limite, c'est-à-dire pour $C = \infty$, on a $U = V$: on peut prendre le potentiel final de la sphère pour mesure du potentiel initial du conducteur. Un corps de capacité infinie possède donc la propriété des sources électriques constantes.

3° Si l'on ne connaît pas la charge initiale M du corps et si ses dimensions ne sont pas très-grandes, on pourra, après l'avoir mis en relation une première fois avec la sphère d'épreuve, décharger celle-ci (en la mettant en communication

avec le sol), rétablir la communication avec le corps et déterminer son potentiel U_1; on aura

$$(5) \qquad (C+r)U_1 = CU.$$

L'équation (5), dans laquelle U et U_1 sont connus, détermine la capacité C; l'équation (4) détermine alors le potentiel initial V et, par suite, la charge initiale M.

Au lieu de mettre directement le corps en relation avec la sphère d'épreuve, ce qui ne donnerait de résultats exacts que pour des corps de faibles dimensions, on peut employer une sphère R de grand rayon, dont on détermine à chaque fois le potentiel au moyen de la sphère d'épreuve, etc.

ANALOGIE DU POTENTIEL AVEC LA TEMPÉRATURE ET DE LA CAPACITÉ ÉLECTRIQUE AVEC LA CAPACITÉ CALORIFIQUE. — Si l'on considère, dans l'équation (3), les lettres V et C comme représentant les premières des températures, les dernières des capacités calorifiques, on reconnaît que cette équation détermine la température finale U d'un système de corps de capacités calorifiques C, C′, ... et de températures initiales V, V′, ... On peut, en effet, écrire l'équation (3)

$$\Sigma C(V-U) = 0;$$

elle exprime alors que la somme des quantités de chaleur reçues par les corps dont la température initiale V est inférieure à U est égale à la somme des quantités de chaleur perdues par les autres, de sorte qu'il n'y a de chaleur ni reçue, ni perdue par le système.

Toutefois, cette analogie remarquable ne subsiste que sous un certain point de vue. Nous savons, en effet : 1° que les capacités calorifiques ne sont pas rigoureusement indépendantes de la température, tandis que les capacités électriques, par leur définition même, sont indépendantes du potentiel; 2° que la capacité calorifique d'un corps est proportionnelle à son volume, c'est-à-dire pour des solides semblables, au cube des dimensions homologues; la capacité électrique varie proportionnellement à la première puissance de ces dimensions;

de plus elle est la même pour des conducteurs de même surface extérieure, qu'ils soient pleins ou creux; 3° que la capacité calorifique est proportionnelle à un coefficient spécifique, variable avec la *matière*, non avec la *forme* du corps, tandis que la capacité électrique d'un conducteur est indépendante de sa *matière* et proportionnelle à un coefficient spécifique, caractéristique de sa *forme* extérieure; 4° enfin la capacité calorifique d'un corps ne dépend pas de la position qu'il occupe par rapport à d'autres; au contraire, nous ne tarderons pas à reconnaître que la capacité électrique d'un conducteur est modifiée par le voisinage d'un autre conducteur, et c'est pourquoi, dans tout ce qui précède, nous avons supposé ces divers conducteurs assez éloignés les uns des autres pour que les termes fournis à la valeur du potentiel de l'un quelconque d'entre eux par l'électricité en équilibre à la surface de tous les autres fût négligeable.

Ces restrictions établies, on pourra, en toute sûreté, traiter par analogie les questions d'électricité, en appliquant les théorèmes analogues démontrés pour la chaleur. La sphère d'épreuve, établie en communication lointaine avec un corps, jouera le rôle d'un *thermomètre à potentiels*, et, quand elle sera choisie assez petite, elle donnera directement les potentiels, comme le thermomètre donne les températures et pour les mêmes motifs.

On voit de même que, quand deux corps sont au même potentiel (même température électrique), il ne peut passer d'électricité de l'un sur l'autre par voie de communication lointaine; que, s'ils sont à des potentiels différents, l'électricité passera du corps à haut potentiel sur le corps à faible potentiel, etc.

INFLUENCE ÉLECTRIQUE.

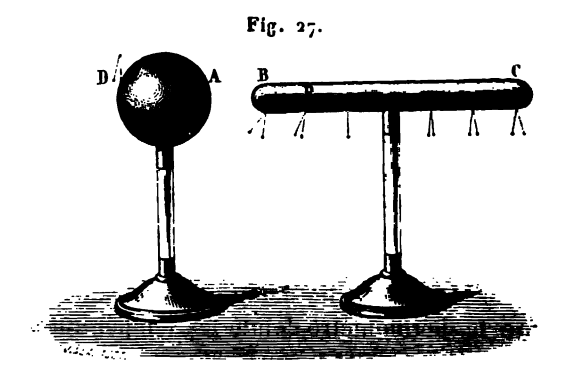
EXPÉRIENCE D'ŒPINUS. — Jusqu'ici nous n'avons considéré que des corps assez éloignés pour que leur action réciproque soit négligeable. Mais le problème de l'équilibre électrique sur un système de conducteurs voisins est, en général, beaucoup plus compliqué et donne lieu à des phénomènes étudiés depuis longtemps sous le nom de *phénomènes d'influence* ou *d'in-*

duction électrique [1]. Nous étudierons d'abord le cas très-simple de deux conducteurs, dont l'un est électrisé, tandis que l'autre est primitivement à l'état neutre.

Plaçons dans le voisinage d'un corps A, chargé positivement (*fig*. 27) et muni d'un pendule électrique, un conducteur BC isolé par un support en verre et portant une série de doubles pendules.

1. Aussitôt qu'on a approché BC de A, le pendule placé à la partie postérieure de A se rapproche de la surface, comme si le corps A avait perdu de son électricité; en même temps les doubles pendules placés aux extrémités de BC divergent. Le corps BC est donc électrisé, sans avoir été frotté.

Fig. 27.



Pour reconnaître la nature de l'électricité développée en B et C, on se sert d'un bâton de verre ou de résine électrisé par le frottement ou d'un pendule chargé dans un sens déterminé, et l'on constate que l'électricité est positive en C et négative en B. De plus, il y a sur le cylindre une section M qui est à l'état neutre, que l'on nomme *ligne moyenne*, et à partir de laquelle les charges croissent avec des signes inverses en s'approchant des extrémités, comme le montre la divergence des pendules de la *fig*. 27. La ligne moyenne est plus rapprochée de B que de C.

---

[1] C'est Canton (*Philos. Transact.*, 1753) qui a le premier signalé les phénomènes de l'électrisation par influence. Ils ont été étudiés par Œpinus (*OEpini tentamen*, etc., p. 129; 1758), auquel est due la disposition de l'expérience de Cours décrite dans tous les Ouvrages.

La théorie des deux fluides explique ce premier groupe de faits de la manière la plus simple. L'électricité de A exerce en un point quelconque P, intérieur au conducteur BC, une force attractive sur l'électricité négative, répulsive sur l'électricité positive; il y a donc séparation de fluide neutre; l'électricité négative se porte dans la région B voisine de A, et une quantité équivalente d'électricité positive dans la région éloignée C. Ces électricités séparées exercent à leur tour, en P, une action de sens contraire à celle de A et qui finit par la contrebalancer exactement; alors la décomposition du fluide neutre cesse, l'électricité est en équilibre sur le conducteur BC.

En ce qui concerne la position de la ligne neutre, on remarquera que l'action de A est plus considérable en B qu'en C; il doit en être de même de la force antagoniste, laquelle, au voisinage immédiat de la surface électrisée, est proportionnelle à la densité électrique (*voir* p. 90). Cette densité est donc plus grande en B qu'en C; par suite, la ligne neutre est plus voisine de B que de C.

Il ne reste plus à expliquer que la chute du pendule D porté par le corps A. On y parvient sans peine en observant que les électricités séparées en B et C exercent en tout point Q, intérieur à A, une action qui a pour effet d'appeler de l'électricité positive en E, où la densité va croître, de l'électricité négative en D, où la densité diminuera par suite de la combinaison de cette électricité négative avec une quantité équivalente d'électricité positive. Le pendule D doit donc retomber partiellement.

2. Quand on met le corps A en communication avec le sol, tous les pendules de BC retombent. Ce corps est revenu à l'état neutre. Il y a, toutefois, une cause d'erreur dont il faut tenir compte : c'est la déperdition de l'électricité qui se produit plus activement sur l'électricité positive repoussée en C que sur l'électricité négative de B. On peut donc trouver sur BC une faible charge négative; mais ce n'est là qu'une perturbation [1] dont on diminuera l'effet en opérant le plus vite possible.

---

[1] Cette perturbation suffit pour masquer aux yeux des premiers expérimentateurs, et de Coulomb lui-même, la vraie nature de l'influence.

duction ... le retour de BC à
simple ... l'équilibre est dé-
l'autre ... Les actions concordantes
Pl... ...cité neutre; l'électricité
(*fig.* ... jusqu'à ce que l'équi-
isol... ...ieu que quand il n'y a
pen...

I ... sol, tandis qu'il est
la ... retombent, ceux
si ... D de A s'abaisse
d... ...dépendants du point
L ... communication avec le sol.
... chargé négative-

... influencé com-
... elle-même;
... neutre et
... com-
... électrique
... ...tes; ré-
... ...mentée,

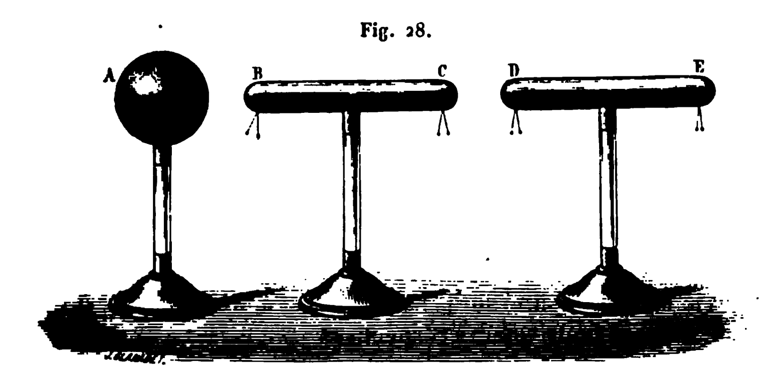
... ...tes de
... ...difié.
... somme
... nulle
... varie pas
... qu'on
... par in-
... ...cher
... trouve

... quantité
... électri-
... corps,
... de nou-
... ...niment.
... L'expé-

rience n'est limitée que par l'effet de la déperdition éprouvée par A pendant la durée de l'expérience.

Les premiers physiciens qui ont étudié l'influence ont cherché à reconnaître si l'électricité ainsi développée jouit de toutes les propriétés de l'électricité de frottement, en particulier si elle est susceptible de provoquer elle-même l'influence. Ils ont employé deux ou plusieurs cylindres analogues à BC et isolés (*fig.* 28). On met d'abord en place le corps A et le

Fig. 28.



second cylindre DE. Celui-ci doit être à une distance suffisante pour que l'influence de A soit peu sensible. On interpose le cylindre BC et l'on voit aussitôt les pendules de D et de E diverger assez fortement par l'influence de BC. Un corps influencé est donc susceptible de produire lui-même l'influence sur un troisième corps à l'état neutre, et ainsi de suite.

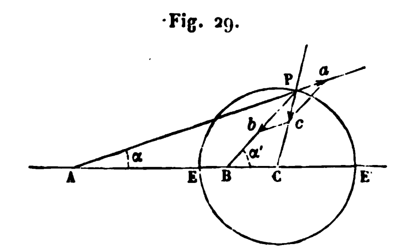
INFLUENCE D'UN POINT ÉLECTRISÉ SUR UNE SPHÈRE. — Il ne nous suffit pas d'avoir interprété d'une manière générale l'expérience d'Œpinus : il faut nous rendre un compte exact des phénomènes, et c'est ce qui ne peut avoir lieu qu'en substituant des calculs précis aux raisonnements généraux, mais un peu vagues, auxquels nous avons dû avoir recours.

La disposition employée par Œpinus est sans doute parfaitement appropriée aux nécessités d'une démonstration expérimentale, mais elle soulève des difficultés d'analyse que nous ne pouvons aborder. Nous étudierons par le calcul un cas

beaucoup plus facile, celui de l'influence exercée par un point électrisé A sur une sphère C isolée et primitivement à l'état neutre. On se rapprochera pratiquement de ces conditions théoriques en substituant au point électrisé A une très-petite sphère isolée analogue aux boules d'épreuve employées par Coulomb.

1. Considérons d'abord deux points électrisés A et B possédant respectivement des charges de signe contraire $+m$ et $-m'$, et supposons $m > m'$. La surface équipotentielle de potentiel zéro est déterminée par la condition

Fig. 29.



$$(1) \qquad \frac{m}{r} = \frac{m'}{r'}.$$

Nous avons démontré (p. 104) que c'est une sphère (*fig.* 29) dont le centre C, situé sur la ligne AB, est à des distances de A et de B ayant pour valeurs respectives

$$(2) \qquad \overline{AC} = \frac{m^2 \overline{AB}}{m^2 - m'^2}, \quad \overline{BC} = \frac{m'^2 \overline{AB}}{m^2 - m'^2},$$

et dont le rayon R est

$$(3) \qquad R = \frac{mm' \overline{AB}}{m^2 - m'^2} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}.$$

Si l'on supprime le point B, et qu'on substitue à la surface équipotentielle de rayon R une sphère conductrice en communication avec le sol, celle-ci prendra (p. 105), sous l'influence du point A, une charge égale à $-m'$. Nous supposons données la charge m du point A, la distance $AC = d$ du point A au centre de la sphère et le rayon R de celle-ci. Nous nous proposons d'abord de déterminer la charge $-m'$ de la sphère.

Des équations (2) et (3) on tire

$$\frac{m'}{m} = \frac{R}{d},$$

ou

$$m' = m\frac{R}{d}. \tag{4}$$

La charge $-m'$ varie proportionnellement à la masse électrique qui produit l'influence et en raison inverse de sa distance au centre de la sphère. Nous avons déjà constaté d'une manière générale que la charge développée par l'influence est d'autant plus grande que le corps influençant est plus rapproché.

Cherchons maintenant comment la charge $-m'$ est distribuée. Puisque la surface conductrice de la sphère est une surface de niveau, la force résultante en un point quelconque P, très-voisin de cette surface, est dirigée normalement à celle-ci. Soit ρ la densité électrique au point P; l'unité d'électricité positive placée en P est soumise à une force dont la valeur comptée vers l'extérieur est $4\pi\rho$; on a donc

$$\overline{Pc} = -4\pi\rho. \tag{5}$$

Mais, d'une part, la distribution portée par la sphère produit à l'extérieur le même effet qu'une charge égale concentrée au point B (*voir* p. 105); elle exerce donc sur l'unité d'électricité une force attractive

$$\overline{Pb} = \frac{m'}{\overline{PB}^2}. \tag{6}$$

D'autre part, l'action du point A est répulsive et a pour valeur

$$\overline{Pa} = \frac{m}{\overline{PA}^2}. \tag{7}$$

Pc est la résultante de ces deux forces et, par suite, la droite bc est parallèle à AP et les deux angles APB, Pbc sont égaux. De plus, d'après l'équation (8), on a

$$\frac{m}{\overline{PA}} = \frac{m'}{\overline{PB}} \tag{1}$$

et enfin, d'après (6), (7) et (1),

$$\frac{\overline{Pa}}{\overline{Pb}} = \frac{\dfrac{m}{\overline{PA}}}{\dfrac{m'}{\overline{PB}}} \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

Les deux triangles APB, Pbc, ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables, d'où

$$\frac{\overline{Pc}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{Pa}}{\overline{PB}},$$

$$(8) \qquad \overline{Pc} = \overline{AB}\frac{\overline{Pa}}{\overline{PB}} = (\overline{AC} - \overline{BC})\frac{\overline{Pa}}{\overline{PB}}.$$

Il ne reste qu'à substituer, dans l'équation (8), les valeurs

$$\overline{Pc} = -4\pi\rho, \quad \overline{AC} = d, \quad \overline{BC} = \frac{R^2}{d}, \quad \overline{Pa} = \frac{m}{\overline{PA}^2}, \quad \overline{PB} = \frac{n}{m}\overline{PA},$$

tirées des équations (5), (3), (7) et (1); on obtient

$$(9) \qquad \rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2 - R^2}{R}\frac{m}{\overline{PA}^3}.$$

La densité électrique au point P varie en raison inverse du cube de sa distance au point A.

2. Ainsi se trouve complétement traité le cas de l'influence exercée, sur une sphère en communication avec le sol, par un point électrisé extérieur. Pour passer au cas de l'influence d'un point sur une sphère isolée, on remarquera : 1° qu'une charge électrique quelconque est d'elle-même en équilibre sur une sphère quand sa densité est uniforme; que, de plus, l'influence subie par un conducteur isolé ne modifie pas la *quantité* de la charge qu'il possède, mais seulement la distribution qu'elle affecte; 2° que deux charges séparément en équilibre sur un conducteur sont encore en équilibre quand on les superpose l'une à l'autre.

Soient donc M la charge totale, $-m' = -\frac{mR}{d}$ celle qui se-

rait maintenue sur la sphère par l'influence du point A, si la sphère était en communication avec le sol. La distribution réelle pourra être considérée comme la somme de la distribution $-m'$, dont la densité en chaque point est en raison inverse du cube de la distance au point A, et de la distribution $M+m'$, de densité uniforme.

Si l'on suppose notamment que la sphère est primitivement à l'état neutre, ce qui nous ramène au cas de l'expérience d'Œpinus, la densité électrique en un point quelconque aura pour valeur

$$\rho = \frac{m}{4\pi R}\left(\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{\overline{PA}^3}\right),$$

Au point E de la sphère le plus voisin de A, on a

$$\overline{PA} = d - R \quad \text{et} \quad \rho_E = \frac{m}{4\pi}\,\frac{R - 3d}{d(d-R)^2},$$

R étant plus petit que d. Cette densité est négative. Au point E', diamétralement opposé, on a

$$\rho_{E'} = \frac{m}{4\pi}\,\frac{R + 3d}{d(d+R)^2};$$

la densité est positive. La ligne neutre est déterminée par la relation

$$\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{\overline{PA}^3} = 0,$$

$$\overline{PA} = \sqrt[3]{d(d^2 - R^2)}.$$

Cette équation représente un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne BA, et qui divise la sphère en deux zones inégales. La surface de la zone négative est la plus faible; c'est ce que nous avions constaté dans l'expérience d'Œpinus; elle tend vers zéro, quand le point influençant se rapproche indéfiniment, et vers la moitié de la surface de la sphère, quand le point s'éloigne à l'infini.

Quand la charge M de la sphère est positive, la densité ρ est

$$(10) \qquad \rho = \frac{1}{4\pi R}\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{d} - m\,\frac{d^2 - R^2}{\overline{AP}^3}\right).$$

Si l'on suppose M et m donnés et d variable, pour une valeur très-grande de d la densité sera positive en tous les points de la sphère; cette densité s'annulera au point E pour une valeur de d déterminée par l'équation

$$\frac{M}{R}+\frac{m}{d}-m\frac{d+R}{(d-R)^2}=0,$$

qui n'admet qu'une seule racine positive entre R et $+\infty$. Enfin, pour des valeurs moindres de d, la densité ρ sera négative, et il y aura une ligne neutre dont on obtiendra l'équation en égalant à zéro la quantité entre parenthèses dans l'équation (10).

Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'influence exercée par un point extérieur. On peut suivre la même marche pour étudier l'influence exercée par un point intérieur à la sphère. Si l'on revient à la considération des deux points A et B possédant les charges $+m$ et $-m'$, et que l'on supprime le point A, l'effet produit sur les points intérieurs à la sphère C ne sera pas changé en remplaçant cette surface de niveau par une surface sphérique conductrice en relation avec le sol. Celle-ci prendra sur sa face interne une charge égale à $+m'$, et, comme le conducteur est tout entier au potentiel zéro, l'action exercée à l'extérieur, par l'ensemble du point B et de la distribution portée par la sphère, sera nulle. Cette distribution possède, en chaque point, une densité égale et contraire à celle qui serait produite par l'influence de la charge m placée en A; par suite, sa densité ρ est donnée par l'équation (9); mais on peut en obtenir une expression, en fonction de la distance $BC = d'$, à l'aide des mêmes relations qui ont servi à établir l'équation (9); c'est

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\frac{R^2-d'^2}{R}\frac{n}{\overline{PB}^3}. \tag{11}$$

IMAGES ÉLECTRIQUES. — On voit que l'influence de la charge positive m placée en A est la même que celle de la charge négative $-m'=-m\frac{R}{d}$ placée en B. Les points A et B sont dits

conjugués par rapport à la sphère. Sir W. Thomson ([1]) appelle le point B l'*image électrique* du point A, et inversement.

La considération des images électriques permet de transformer un certain nombre de problèmes d'électricité; un corps électrisé quelconque extérieur à une sphère peut, en effet, être remplacé, au point de vue de l'influence, par un autre, intérieur à la sphère, et qui sera l'image du premier. Sir W. Thomson a fait les applications les plus élégantes de cette méthode; c'est ainsi qu'il est parvenu à résoudre, d'une manière relativement simple, la question de l'influence réciproque entre deux sphères, qui n'avait été traitée par Poisson ([2]) qu'à l'aide d'une analyse extrêmement laborieuse.

INFLUENCE RÉCIPROQUE DE DEUX SPHÈRES ÉLECTRISÉES. — Coulomb avait compris toute l'importance de l'étude expérimentale de l'influence entre corps électrisés et s'était précisément arrêté au cas des conducteurs sphériques; il se trouve ainsi que l'on peut comparer les résultats de ses expériences à ceux des calculs de Poisson et de Sir W. Thomson, et vérifier une fois de plus l'exactitude des principes qui servent de base à la théorie de l'électricité.

Coulomb plaçait les conducteurs sphériques à étudier sur un appareil représenté *fig.* 30, qui permet d'écarter, en le faisant glisser sur une rainure, le pied de l'isoloir qui supporte l'une des sphères; on mesurait les distances sur une règle graduée, et l'on constatait la nature de l'électricité répandue sur les sphères en touchant leurs différents points avec un plan d'épreuve que l'on présentait ensuite à un électroscope chargé.

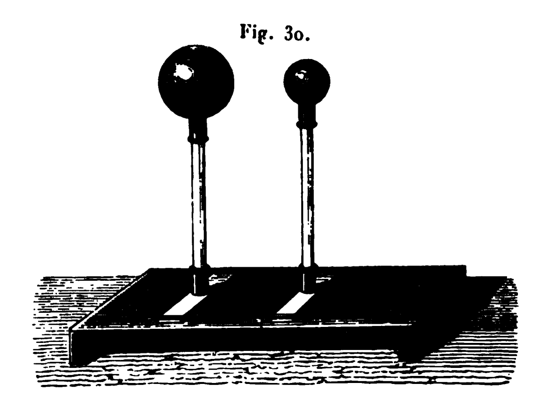
([1]) W. THOMSON, *Reprint of papers on electricity and magnetism* (*Geometrical investigations with reference to the distribution of electricity on spherical conductors*), p. 52 et suiv.; London, 1872.

([2]) POISSON, *Mémoires de l'Institut*, 1811, p. 1 et 163. L'équation de Poisson a été résolue par M. Cayley d'une manière simple (voir *Journal de Physique*, t. VII, p. 202; 1878).

Riemann, à son tour, a développé une méthode mixte, dans laquelle l'analyse de Poisson se trouve extrêmement simplifiée par la considération des images électriques (RIEMANN, *Schwere, Elektricität und Magnetismus, bearbeitet von Hattendorff*, p. 189 et suiv ; Hannover, 1876).

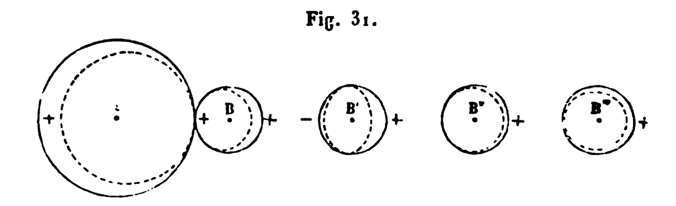
Le premier et le plus simple des cas examinés par Coulomb est celui où les deux sphères de dimensions inégales sont d'abord mises au contact et chargées en commun. On sait déjà

Fig. 30.



qu'à ce moment il n'y a pas de fluide libre aux points qui se touchent. On éloigne ensuite la petite sphère B, et alors, l'influence réciproque changeant d'intensité, on voit se produire en B′ (*fig.* 31) (¹) de l'électricité négative sur la partie qui regarde

Fig. 31.



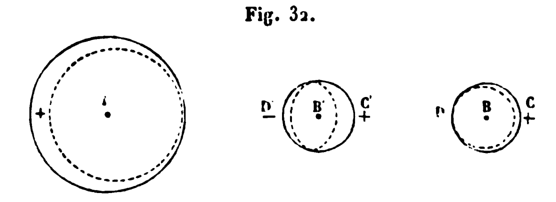
A et de la positive au point opposé. La distance continuant à augmenter, la petite sphère arrive à une position déterminée B″ où elle n'a plus que de l'électricité positive et se retrouve à l'état naturel aux parties les plus voisines de A, comme au

(¹) Cette figure, ainsi que les deux suivantes, offre un exemple de diagramme des *épaisseurs électriques*. Les lignes en traits pleins représentent la surface des conducteurs; celles en pointillé les surfaces limitant les couches imaginaires d'électricité de densité uniforme, positive ou négative dont ils sont revêtus.

moment où le contact avait lieu. Quand, enfin, elle est en B‴ et au delà, elle est chargée positivement dans tous ses points, mais inégalement. Il faut donc admettre que l'influence a d'abord augmenté jusqu'à une distance AB′, puis qu'elle a diminué, et que, arrivée en B″, la sphère B contient la même quantité de fluide libre, distribué à peu près de la même manière qu'au moment où elle touchait A. Coulomb a mesuré la distance de A à B″, et il a vu qu'elle diminuait jusqu'à devenir nulle quand la sphère B augmentait jusqu'à devenir égale à A : les mesures qu'il a obtenues pourront servir d'épreuves à la théorie mathématique.

Dans le deuxième cas, qui est beaucoup plus général, les deux sphères ont reçu séparément, sans être mises au contact, des quantités quelconques de fluide de même nom; dès lors, l'une d'elles en possède moins qu'elle n'en prendrait si on les faisait toucher : supposons que ce soit B. Il y a toujours une position B (*fig.* 32) pour laquelle tout le fluide est concentré

Fig. 32.

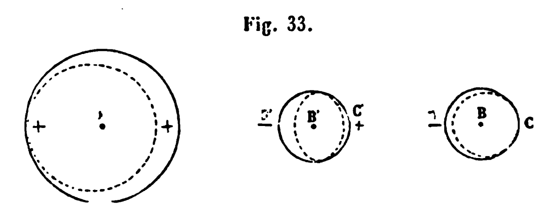


vers C et a abandonné la partie D qui est en regard de A. Quand la distance diminue jusqu'en B′, l'influence augmente en énergie, et il se fait une décomposition de fluide neutre qui amène de l'électricité négative en D′ et ajoute du fluide positif en C′ à celui que la sphère avait primitivement reçu. Alors il y a une ligne moyenne comme dans nos premières expériences : elle est entre B′ et D′.

Il y a enfin à examiner le troisième cas où les deux sphères seraient chargées d'électricités contraires en quantité quelconque. Ici il y a toujours attraction entre les électricités qui tendent à s'accumuler sur les faces en regard, et il y a une position B (*fig.* 33) pour laquelle l'électricité a abandonné le point opposé C. En rapprochant la sphère B, une décomposi-

tion secondaire aura lieu et l'on trouvera de l'électricité positive en C′, négative en D′; celle-ci sera plus abondante que

Fig. 33.



celle-là, et la ligne moyenne se placera généralement entre le centre et le point C′.

Coulomb s'est contenté de constater ces faits généraux, tous en parfait accord avec la théorie, sans tenter de mesures numériques.

Cas général de l'influence. — Coefficients d'induction. — Quand n corps électrisés séparément dans le même sens ou en sens contraires sont mis en présence, la distribution de l'électricité sur chacun d'eux est modifiée par l'action des $n-1$ autres. Le nouvel état d'équilibre est caractérisé par la condition que la résultante des actions électriques des n distributions soit nulle en tout point intérieur à l'un quelconque des conducteurs : le problème à résoudre consiste à déterminer la densité électrique en tout point de leur surface.

On ne possède pas de méthode pour résoudre le cas général de l'influence; mais on peut démontrer quelques théorèmes intéressants et d'une application fréquente. Nous nous bornerons aux suivants.

Théorème I. — *Quand on considère le système formé par n conducteurs, le potentiel de l'un quelconque d'entre eux est une fonction linéaire des charges de tous les corps du système.*

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots$ les densités sur chacun des n corps, M_1, $M_2, \ldots$ leurs charges totales, $V_1, V_2, \ldots$ leurs potentiels, r_1, $r_2, \ldots$ les distances d'un point quelconque de la surface de l'un des corps à un point intérieur au corps 1. $M_1, M_2, \ldots$, $V_1, V_2, \ldots$ sont des constantes données, $\rho_1, \rho_2, \ldots$ des va-

ni un calcul convenable fixerait la valeur. Le poten-
pour expression

$$= \int \frac{\rho_1 d\sigma_1}{r_1} + \int \frac{\rho_2 d\sigma_2}{r_2} + \ldots = A_1 + A_2 + \ldots.$$

uppose que les charges deviennent respectivement $M_2, \ldots$, sans que les distributions soient modifiées, persistera et les n termes dont se compose le po- deviendront respectivement $p_1 A_1, p_2 A_2, \ldots$, c'est- que chaque terme variera proportionnellement à la orrespondante. V_1 est donc une fonction linéaire de des n corps du système, et il en est de même de ..., :

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = K_{11} M_1 + K_{12} M_2 + \ldots, \\ V_2 = K_{21} M_1 + K_{22} M_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

t facile de préciser le sens des coefficients des équa- (1). Si l'on y fait $M_1 = 1$, $M_2 = M_3 = \ldots = 0$, elles se nt respectivement à

$$V_1 = K_{11}, \quad V_2 = K_{21}, \quad V_3 = K_{31}, \quad \ldots.$$

efficients $K_{11}, K_{21}, \ldots$ représentent donc les poten- ue prennent les n corps quand le premier possède une égale à l'unité, tous les autres une charge nulle, c'est- quand les $n - 1$ derniers corps étaient à l'état neutre l'influence; en faisant $M_2 = 1$, $M_1 = M_3 = \ldots = 0$, on ait de même les coefficients $K_{12}, K_{22}, \ldots$.

ÈME II. — *Le coefficient K_{pq} de la charge M_q dans ession du potentiel V_p est égal au coefficient K_{qp} de ns l'expression de V_q.*

étermination des n potentiels V_1, V_2 paraît, d'après les ons (1), dépendre de n^2 coefficients. Mais nous allons que l'on a en général

$$K_{pq} = K_{qp},$$

réduit le nombre des coefficients distincts à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Nous emprunterons à M. Bertrand [1] la démonstration de cet important théorème. Elle s'appuie sur le lemme suivant.

1. Considérons deux systèmes formés de corps conducteurs électrisés, et désignons par

m la charge d'un point quelconque du premier,
m' celle d'un point quelconque du second,
r la distance de ces deux points,
V le potentiel du premier système en m',
V' celui du second système en m.

On a, par définition, $V=\sum\frac{m}{r}$, $V'=\sum\frac{m'}{r}$. Proposons-nous de former la quantité $\sum\frac{mm'}{r}$. A cet effet, nous pouvons d'abord réunir tous les termes qui se rapportent à un point du premier système et mettre m en facteur : on obtient ainsi une somme partielle $m\sum\frac{m'}{r}=mV'$; il faut alors réunir en une somme unique les sommes partielles produites par chacun des points, et l'on a la somme générale $\sum mV'$. Mais, en formant cette somme, nous avons pris chaque élément, tel que $\frac{mm'}{r}$, deux fois, une fois avec m, une fois avec m', en facteur. Il faut donc diviser par 2 le résultat obtenu,

$$\sum\frac{mm'}{r}=\frac{1}{2}\sum mV'; \tag{2}$$

mais on peut aussi procéder dans un ordre inverse, réunissant d'abord tous les termes qui se rapportent à un point du second système, ce qui donne une somme partielle $m'V$, puis ajoutant les sommes elles-mêmes :

$$\sum\frac{mm'}{r}=\frac{1}{2}\sum m'V. \tag{3}$$

---

[1] BERTRAND, *Journal de Physique*, t. III, p. 73; 1874.

De la comparaison de (2) et (3) il résulte

$$\Sigma m V' = \Sigma m' V, \tag{4}$$

et cette équation n'exprime qu'une identité.

Rien n'empêche que les deux systèmes considérés ne soient formés des mêmes conducteurs dans deux états d'électrisation différents. Nous supposerons que dans le premier système les corps 1, 2,... possèdent respectivement les charges $M_1, M_2, \ldots$ et les potentiels $V_1, V_2, \ldots$, qui sont constants à l'intérieur de chacun des conducteurs; que dans le second les corps 1, 2, ... possèdent les charges $M'_1, M'_2, \ldots$, et les potentiels $V'_1, V'_2, \ldots$. En formant les sommes $\Sigma m V'$, on peut mettre en facteur le potentiel V' dans tous les termes qui se rapportent à un même conducteur, et l'on obtient une somme partielle MV' : M est la charge que possède dans le premier système le corps dont le potentiel est V' dans le second. Le nombre des sommes partielles est égal à celui des corps du système. On a donc

$$\Sigma m V' = M_1 V'_1 + M_2 V'_2 + \ldots,$$

et de même

$$\Sigma m' V = M'_1 V_1 + M'_2 V_2 + \ldots.$$

Enfin l'équation (4) prend la forme particulière

$$M_1 V'_1 + M_2 V'_2 + \ldots = M'_1 V_1 + M'_2 V_2 + \ldots. \tag{5}$$

L'équation (5) exprime une propriété purement analytique, puisque les deux systèmes considérés, formés des mêmes conducteurs à des états d'électrisation différents, ne peuvent coexister.

2. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème énoncé ci-dessus. A cet effet, nous supposerons que dans le premier système les charges de tous les corps soient nulles, à l'exception de M_p, et que dans le second les charges soient nulles, à l'exception de M'_q; les potentiels des n corps dans le premier et dans le second système sont respective-

ment, d'après les équations (1),

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} V_1 = K_{1p}M_p, & V'_1 = K_{1q}M'_q, \\ V_2 = K_{2p}M_p, & V'_2 = K_{2q}M'_q, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ V_q = K_{qp}M_p, & V'_p = K_{pq}M'_q, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Formons maintenant l'équation (5); toutes les charges étant nulles dans le premier système à l'exception de M_p, et dans le second à l'exception de M_q, chacun des membres de l'équation (5) se réduit à un seul terme

$$M_p V'_p = M'_q V_q,$$

ou, en remplaçant V'_p et V_q par leurs valeurs,

$$K_{pq} M_p M'_q = K_{qp} M'_q M_p,$$

$$(7)\qquad K_{pq} = K_{qp}.$$

C'est la proposition que nous voulions démontrer.

Théorème III. — *Quand on considère un système de n conducteurs, la charge de l'un quelconque d'entre eux est une fonction linéaire des potentiels de tous les corps du système.*

Pour s'en convaincre, il suffit de résoudre les équations (1) par rapport aux charges; on voit alors que celles-ci sont des fonctions linéaires des potentiels

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots, \\ M_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Théorème IV. — *Le coefficient C_{pq} du potentiel V_q dans l'expression de M_p est égal au coefficient C_{qp} de V_p dans l'expression de M_q.*

Pour démontrer cette proposition, on emploiera la méthode qui nous a servi pour les coefficients K, en faisant dans le premier système tous les potentiels nuls, à l'exception de V_p, et dans le second tous les potentiels nuls, à l'exception de V_q.

Le coefficient C_{pq} représente la charge que prend le corps p

quand les potentiels de tous les corps du système sont nuls, à l'exception de celui du corps q, qui est supposé égal à 1; de même C_{qp} est la charge du corps q quand les potentiels de tous les corps sont nuls, à l'exception de celui du corps p, qui est égal à 1. Rappelons que, pour amener un corps au potentiel zéro, il suffit de le mettre en communication avec le sol.

Les coefficients C s'appellent *coefficients d'induction.* Chacun d'eux joue un rôle analogue à la capacité électrique d'un conducteur unique.

INFLUENCE SUR UN CORPS PRÉSENTANT DES CAVITÉS INTÉRIEURES. — ÉCRANS ÉLECTRIQUES. — 1. Soit un conducteur fermé en relation avec le sol et présentant à son intérieur une ou plusieurs cavités. La surface interne de l'une quelconque d'entre elles est au potentiel zéro comme le conducteur lui-même, et la force électrique qui s'exerce en tout point de la masse conductrice est nulle. Il en résulte que, s'il y a des masses électriques dans l'une des cavités, leur action en un point du conducteur est exactement contre-balancée par la distribution électrique appelée par influence sur la surface de la cavité.

Il est aisé de voir que cette distribution a une quantité M_1 égale et un signe contraire à la somme algébrique M des masses contenues dans la cavité.

Considérons, en effet, une surface fermée enveloppant la cavité et tout entière contenue dans le corps conducteur. En tous les points de cette surface la force électrique $-\frac{dV}{dn}$ est nulle. Or on peut remplacer toutes les masses électriques contenues dans la cavité par une distribution de quantité égale et dont la densité en chaque point est, d'après le théorème de Green, $-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$, c'est-à-dire nulle, puisque $\frac{dV}{dn}$ est nul. Donc la somme $M + M_1$ des masses intérieures à la cavité et de la distribution à la surface de la cavité est nulle,

$$M_1 = -M.$$

2. Passons maintenant au cas d'un conducteur isolé. Un raisonnement analogue au précédent établit que la paroi interne

ment, d'ap

(6)

Formo
nulles d
second
tion (7

ou, en

(7)

C'est l

Th
ducl
fonc

P
par
fon

(8)

T
l'e
l'e

I
qui
pre

charge *libre*. On pourra déterminer la charge que possède un corps P quelconque, conducteur ou non, susceptible d'être introduit dans son intérieur. Nous supposerons A isolé et à l'état neutre. Le corps P appellera par influence sur la cavité intérieure de A une charge égale et de signe contraire à la sienne, tandis qu'une quantité égale et de même signe se distribuera à la surface externe et produira un potentiel qu'on pourra mesurer.

Quand le corps P est conducteur, on peut aussi l'amener en contact avec la surface interne de A; la charge qui s'y trouve appelée par influence neutralise la charge de P, et il ne reste sur A que la charge, égale à celle de P, qui était distribuée librement à la surface extérieure. Dans le langage ordinaire on résume ce phénomène complexe en disant que l'électricité de P s'est portée à la surface extérieure de A.

On peut profiter de la même propriété pour ajouter algébriquement les charges électriques de corps quelconques. On les plonge simultanément dans l'intérieur de A, et alors une quantité d'électricité égale à la somme algébrique de leurs charges apparaît à la surface extérieure de ce corps; en particulier, si cette somme est nulle, la surface de A demeurera à l'état neutre. Ce dernier cas se présentera, par exemple, avec deux corps isolés que l'on a frottés l'un contre l'autre pour les électriser (¹).

On peut donner au corps A la forme d'un cylindre très-allongé, ouvert aux deux bouts. Physiquement, ce cylindre peut être considéré comme un conducteur fermé, dès que sa longueur dépasse quatre à cinq fois son diamètre. Nous utiliserons ultérieurement cette curieuse propriété.

INFLUENCE SUR UN CONDUCTEUR ARMÉ DE POINTES. POUVOIR DES POINTES ET DES FLAMMES. — Nous avons vu que, quand un conducteur électrisé présente une pointe, la densité électrique à l'extrémité de celle-ci est théoriquement infinie, quelle que

---

(¹) C'est même la manière la plus exacte de montrer que les deux électricités contraires se produisent en quantités équivalentes; il n'est pas nécessaire de faire de mesure, il suffit de constater, à l'aide d'un électroscope sensible, que la surface extérieure de A est et demeure à l'état neutre.

soit la charge. Pratiquement, la déperdition à l'extrémité d'une pointe est extrêmement rapide, et, par suite, la totalité de la charge du corps se perd presque subitement dans l'air environnant.

Quand un conducteur B armé d'une pointe est soumis à l'influence d'un corps A électrisé, par exemple positivement, l'électricité négative appelée par influence à la pointe s'écoule sur le conducteur A, et une quantité équivalente d'électricité positive se distribue sur la partie opposée de B. Il n'y a donc pas d'électricité négative libre sur le système des conducteurs, et les charges positives de A et de B ont une somme égale à la charge primitive de A.

Si le conducteur B est en communication avec le sol et la pointe très-rapprochée de la surface de A, la pointe laissera écouler une quantité d'électricité négative équivalente à la charge positive de A, et ce corps se trouvera déchargé comme s'il avait été mis en communication directe avec le sol, ou s'il était lui-même armé d'une pointe.

Toute disposition qui active la déperdition d'une manière suffisamment énergique produit le même effet qu'une pointe. Ainsi, un conducteur isolé, muni d'une mèche que l'on enflamme, se décharge presque subitement : mise en communication métallique avec le sol, cette mèche déchargera, comme le ferait une pointe, tout conducteur électrisé que la flamme viendra lécher.

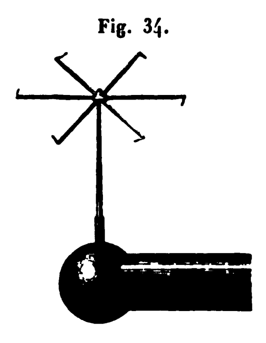
Il est intéressant de connaître le mécanisme de la déperdition dont les pointes sont le siége ; on y parvient par des expériences aussi simples que curieuses. Une pointe étant placée sur le conducteur d'une machine électrique en activité, il suffit d'en approcher la main pour éprouver la sensation d'un souffle partant de la pointe. Une bougie dont on présente la flamme à la pointe est rapidement éteinte, et la fumée qu'elle produit encore pendant quelques instants est vivement repoussée. L'air électrisé au contact de la pointe s'écoule donc rapidement ; il est aussitôt remplacé par d'autre, et il s'établit une circulation rapide qui dure aussi longtemps que l'on fournit de l'électricité au conducteur.

Les flammes sont le siége d'une circulation gazeuse très-

ctive; l'analogie de leur effet avec celui des pointes se trouve insi tout naturellement expliquée. On conçoit encore que l'on uisse remplacer l'écoulement de l'air par celui de l'eau, par xemple. Nous en verrons plus tard des applications.

TOURNIQUET ÉLECTRIQUE. — Puisqu'une pointe électrisée reousse les couches d'air avoisinantes, elle doit subir de leur art une réaction égale. On vérifie ette conséquence à l'aide du tourniquet électrique. Cet appareil (*fig.* 34) e compose d'une chape centrale sur aquelle sont fixés des rayons diverents en fil de laiton; tous sont recourbés dans le même sens à leur exrémité et terminés en pointe aiguë; a chape se place en équilibre sur un ivot communiquant à une machine lectrique, et, quand on charge celle-i, les reculs de toutes les pointes concourent pour faire tourner le moulinet.

Fig. 34.



Cet appareil marche indéfiniment dans l'air libre; mais, s'il st placé sous une cloche, il ne tourne que pendant un certain temps, après lequel il s'arrête, quoique la machine coninue de fonctionner : c'est qu'à ce moment les parois de la loche sont électrisées et que le potentiel de l'électricité réandue sur la cloche, évalué aux pointes du tourniquet, est gal au potentiel du conducteur de la machine. L'équilibre est onc établi dans la cloche; la densité électrique aux pointes u tourniquet est nulle, et celles-ci, n'étant plus le siége d'auune déperdition, ne peuvent plus tourner. Mais, si l'on vient à pprocher la main des parois de la cloche, l'électricité de om contraire appelée sur la main par influence diminue le otentiel à l'intérieur de l'appareil; le potentiel de la machine st de nouveau le plus fort, de nouvelle électricité s'écoule ar les pointes et le tourniquet se remet en mouvement.

Aimé a constaté que l'aiguille recourbée ne tourne ni dans eau, qui n'est pas conductrice, ni dans le vide, qui ne peut vrer passage à l'électricité, comme nous le verrons par la

soit la charge. Pratiquement, la déperdition à l'extrémité d'une pointe est extrêmement rapide, et, par suite, la totalité de la charge du corps se perd presque subitement dans l'air environnant.

Quand un conducteur B armé d'une pointe est soumis à l'influence d'un corps A électrisé, par exemple positivement, l'électricité négative appelée par influence à la pointe s'écoule sur le conducteur A, et une quantité équivalente d'électricité positive se distribue sur la partie opposée de B. Il n'y a donc pas d'électricité négative libre sur le système des conducteurs, et les charges positives de A et de B ont une somme égale à la charge primitive de A.

Si le conducteur B est en communication avec le sol et la pointe très-rapprochée de la surface de A, la pointe laissera écouler une quantité d'électricité négative équivalente à la charge positive de A, et ce corps se trouvera déchargé comme s'il avait été mis en communication directe avec le sol, ou s'il était lui-même armé d'une pointe.

Toute disposition qui active la déperdition d'une manière suffisamment énergique produit le même effet qu'une pointe. Ainsi, un conducteur isolé, muni d'une mèche que l'on enflamme, se décharge presque subitement : mise en communication métallique avec le sol, cette mèche déchargera, comme le ferait une pointe, tout conducteur électrisé que la flamme viendra lécher.

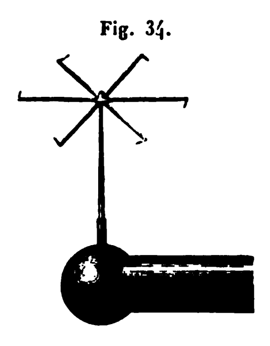
Il est intéressant de connaître le mécanisme de la déperdition dont les pointes sont le siége ; on y parvient par des expériences aussi simples que curieuses. Une pointe étant placée sur le conducteur d'une machine électrique en activité, il suffit d'en approcher la main pour éprouver la sensation d'un souffle partant de la pointe. Une bougie dont on présente la flamme à la pointe est rapidement éteinte, et la fumée qu'elle produit encore pendant quelques instants est vivement repoussée. L'air électrisé au contact de la pointe s'écoule donc rapidement ; il est aussitôt remplacé par d'autre, et il s'établit une circulation rapide qui dure aussi longtemps que l'on fournit de l'électricité au conducteur.

Les flammes sont le siége d'une circulation gazeuse très-

active; l'analogie de leur effet avec celui des pointes se trouve ainsi tout naturellement expliquée. On conçoit encore que l'on puisse remplacer l'écoulement de l'air par celui de l'eau, par exemple. Nous en verrons plus tard des applications.

TOURNIQUET ÉLECTRIQUE. — Puisqu'une pointe électrisée repousse les couches d'air avoisinantes, elle doit subir de leur part une réaction égale. On vérifie cette conséquence à l'aide du tourniquet électrique. Cet appareil (*fig.* 34) se compose d'une chape centrale sur laquelle sont fixés des rayons divergents en fil de laiton; tous sont recourbés dans le même sens à leur extrémité et terminés en pointe aiguë; la chape se place en équilibre sur un pivot communiquant à une machine électrique, et, quand on charge celle-ci, les reculs de toutes les pointes concourent pour faire tourner le moulinet.

Fig. 34.



Cet appareil marche indéfiniment dans l'air libre; mais, s'il est placé sous une cloche, il ne tourne que pendant un certain temps, après lequel il s'arrête, quoique la machine continue de fonctionner : c'est qu'à ce moment les parois de la cloche sont électrisées et que le potentiel de l'électricité répandue sur la cloche, évalué aux pointes du tourniquet, est égal au potentiel du conducteur de la machine. L'équilibre est donc établi dans la cloche; la densité électrique aux pointes du tourniquet est nulle, et celles-ci, n'étant plus le siége d'aucune déperdition, ne peuvent plus tourner. Mais, si l'on vient à approcher la main des parois de la cloche, l'électricité de nom contraire appelée sur la main par influence diminue le potentiel à l'intérieur de l'appareil; le potentiel de la machine est de nouveau le plus fort, de nouvelle électricité s'écoule par les pointes et le tourniquet se remet en mouvement.

Aimé a constaté que l'aiguille recourbée ne tourne ni dans l'eau, qui n'est pas conductrice, ni dans le vide, qui ne peut livrer passage à l'électricité, comme nous le verrons par la

soit la charge. Pratiquement, la déperdition à l'extrémité d'une pointe est extrêmement rapide, et, par suite, la totalité de la charge du corps se perd presque subitement dans l'air environnant.

Quand un conducteur B armé d'une pointe est soumis à l'influence d'un corps A électrisé, par exemple positivement, l'électricité négative appelée par influence à la pointe s'écoule sur le conducteur A, et une quantité équivalente d'électricité positive se distribue sur la partie opposée de B. Il n'y a donc pas d'électricité négative libre sur le système des conducteurs, et les charges positives de A et de B ont une somme égale à la charge primitive de A.

Si le conducteur B est en communication avec le sol et la pointe très-rapprochée de la surface de A, la pointe laissera écouler une quantité d'électricité négative équivalente à la charge positive de A, et ce corps se trouvera déchargé comme s'il avait été mis en communication directe avec le sol, ou s'il était lui-même armé d'une pointe.

Toute disposition qui active la déperdition d'une manière suffisamment énergique produit le même effet qu'une pointe. Ainsi, un conducteur isolé, muni d'une mèche que l'on enflamme, se décharge presque subitement : mise en communication métallique avec le sol, cette mèche déchargera, comme le ferait une pointe, tout conducteur électrisé que la flamme viendra lécher.

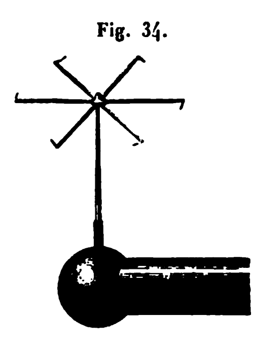
Il est intéressant de connaître le mécanisme de la déperdition dont les pointes sont le siége ; on y parvient par des expériences aussi simples que curieuses. Une pointe étant placée sur le conducteur d'une machine électrique en activité, il suffit d'en approcher la main pour éprouver la sensation d'un souffle partant de la pointe. Une bougie dont on présente la flamme à la pointe est rapidement éteinte, et la fumée qu'elle produit encore pendant quelques instants est vivement repoussée. L'air électrisé au contact de la pointe s'écoule donc rapidement ; il est aussitôt remplacé par d'autre, et il s'établit une circulation rapide qui dure aussi longtemps que l'on fournit de l'électricité au conducteur.

Les flammes sont le siége d'une circulation gazeuse très-

active; l'analogie de leur effet avec celui des pointes se trouve ainsi tout naturellement expliquée. On conçoit encore que l'on puisse remplacer l'écoulement de l'air par celui de l'eau, par exemple. Nous en verrons plus tard des applications.

Tourniquet électrique. — Puisqu'une pointe électrisée repousse les couches d'air avoisinantes, elle doit subir de leur part une réaction égale. On vérifie cette conséquence à l'aide du tourniquet électrique. Cet appareil (*fig.* 34) se compose d'une chape centrale sur laquelle sont fixés des rayons divergents en fil de laiton; tous sont recourbés dans le même sens à leur extrémité et terminés en pointe aiguë; la chape se place en équilibre sur un pivot communiquant à une machine électrique, et, quand on charge celle-ci, les reculs de toutes les pointes concourent pour faire tourner le moulinet.

Fig. 34.



Cet appareil marche indéfiniment dans l'air libre; mais, s'il est placé sous une cloche, il ne tourne que pendant un certain temps, après lequel il s'arrête, quoique la machine continue de fonctionner : c'est qu'à ce moment les parois de la cloche sont électrisées et que le potentiel de l'électricité répandue sur la cloche, évalué aux pointes du tourniquet, est égal au potentiel du conducteur de la machine. L'équilibre est donc établi dans la cloche; la densité électrique aux pointes du tourniquet est nulle, et celles-ci, n'étant plus le siége d'aucune déperdition, ne peuvent plus tourner. Mais, si l'on vient à approcher la main des parois de la cloche, l'électricité de nom contraire appelée sur la main par influence diminue le potentiel à l'intérieur de l'appareil; le potentiel de la machine est de nouveau le plus fort, de nouvelle électricité s'écoule par les pointes et le tourniquet se remet en mouvement.

Aimé a constaté que l'aiguille recourbée ne tourne ni dans l'eau, qui n'est pas conductrice, ni dans le vide, qui ne peut livrer passage à l'électricité, comme nous le verrons par la

soit la charge. Pratiquement, la déperdition à l'extrémité d'une pointe est extrêmement rapide, et, par suite, la totalité de la charge du corps se perd presque subitement dans l'air environnant.

Quand un conducteur B armé d'une pointe est soumis à l'influence d'un corps A électrisé, par exemple positivement, l'électricité négative appelée par influence à la pointe s'écoule sur le conducteur A, et une quantité équivalente d'électricité positive se distribue sur la partie opposée de B. Il n'y a donc pas d'électricité négative libre sur le système des conducteurs, et les charges positives de A et de B ont une somme égale à la charge primitive de A.

Si le conducteur B est en communication avec le sol et la pointe très-rapprochée de la surface de A, la pointe laissera écouler une quantité d'électricité négative équivalente à la charge positive de A, et ce corps se trouvera déchargé comme s'il avait été mis en communication directe avec le sol, ou s'il était lui-même armé d'une pointe.

Toute disposition qui active la déperdition d'une manière suffisamment énergique produit le même effet qu'une pointe. Ainsi, un conducteur isolé, muni d'une mèche que l'on enflamme, se décharge presque subitement : mise en communication métallique avec le sol, cette mèche déchargera, comme le ferait une pointe, tout conducteur électrisé que la flamme viendra lécher.

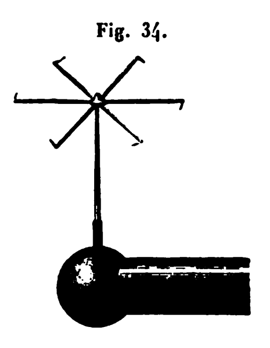
Il est intéressant de connaître le mécanisme de la déperdition dont les pointes sont le siége ; on y parvient par des expériences aussi simples que curieuses. Une pointe étant placée sur le conducteur d'une machine électrique en activité, il suffit d'en approcher la main pour éprouver la sensation d'un souffle partant de la pointe. Une bougie dont on présente la flamme à la pointe est rapidement éteinte, et la fumée qu'elle produit encore pendant quelques instants est vivement repoussée. L'air électrisé au contact de la pointe s'écoule donc rapidement; il est aussitôt remplacé par d'autre, et il s'établit une circulation rapide qui dure aussi longtemps que l'on fournit de l'électricité au conducteur.

Les flammes sont le siége d'une circulation gazeuse très-

active; l'analogie de leur effet avec celui des pointes se trouve ainsi tout naturellement expliquée. On conçoit encore que l'on puisse remplacer l'écoulement de l'air par celui de l'eau, par exemple. Nous en verrons plus tard des applications.

TOURNIQUET ÉLECTRIQUE. — Puisqu'une pointe électrisée repousse les couches d'air avoisinantes, elle doit subir de leur part une réaction égale. On vérifie cette conséquence à l'aide du tourniquet électrique. Cet appareil (*fig*. 34) se compose d'une chape centrale sur laquelle sont fixés des rayons divergents en fil de laiton; tous sont recourbés dans le même sens à leur extrémité et terminés en pointe aiguë; la chape se place en équilibre sur un pivot communiquant à une machine électrique, et, quand on charge celle-ci, les reculs de toutes les pointes concourent pour faire tourner le moulinet.

Fig. 34.



Cet appareil marche indéfiniment dans l'air libre; mais, s'il est placé sous une cloche, il ne tourne que pendant un certain temps, après lequel il s'arrête, quoique la machine continue de fonctionner : c'est qu'à ce moment les parois de la cloche sont électrisées et que le potentiel de l'électricité répandue sur la cloche, évalué aux pointes du tourniquet, est égal au potentiel du conducteur de la machine. L'équilibre est donc établi dans la cloche; la densité électrique aux pointes du tourniquet est nulle, et celles-ci, n'étant plus le siége d'aucune déperdition, ne peuvent plus tourner. Mais, si l'on vient à approcher la main des parois de la cloche, l'électricité de nom contraire appelée sur la main par influence diminue le potentiel à l'intérieur de l'appareil; le potentiel de la machine est de nouveau le plus fort, de nouvelle électricité s'écoule par les pointes et le tourniquet se remet en mouvement.

Aimé a constaté que l'aiguille recourbée ne tourne ni dans l'eau, qui n'est pas conductrice, ni dans le vide, qui ne peut livrer passage à l'électricité, comme nous le verrons par la

soit la charge. Pratiquement, la déperdition à l'extrémité d'une pointe est extrêmement rapide, et, par suite, la totalité de la charge du corps se perd presque subitement dans l'air environnant.

Quand un conducteur B armé d'une pointe est soumis à l'influence d'un corps A électrisé, par exemple positivement, l'électricité négative appelée par influence à la pointe s'écoule sur le conducteur A, et une quantité équivalente d'électricité positive se distribue sur la partie opposée de B. Il n'y a donc pas d'électricité négative libre sur le système des conducteurs, et les charges positives de A et de B ont une somme égale à la charge primitive de A.

Si le conducteur B est en communication avec le sol et la pointe très-rapprochée de la surface de A, la pointe laissera écouler une quantité d'électricité négative équivalente à la charge positive de A, et ce corps se trouvera déchargé comme s'il avait été mis en communication directe avec le sol, ou s'il était lui-même armé d'une pointe.

Toute disposition qui active la déperdition d'une manière suffisamment énergique produit le même effet qu'une pointe. Ainsi, un conducteur isolé, muni d'une mèche que l'on enflamme, se décharge presque subitement : mise en communication métallique avec le sol, cette mèche déchargera, comme le ferait une pointe, tout conducteur électrisé que la flamme viendra lécher.

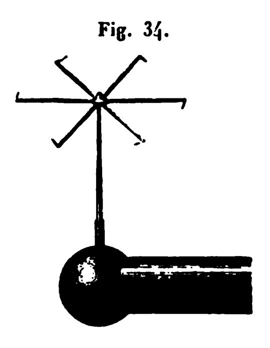
Il est intéressant de connaître le mécanisme de la déperdition dont les pointes sont le siége ; on y parvient par des expériences aussi simples que curieuses. Une pointe étant placée sur le conducteur d'une machine électrique en activité, il suffit d'en approcher la main pour éprouver la sensation d'un souffle partant de la pointe. Une bougie dont on présente la flamme à la pointe est rapidement éteinte, et la fumée qu'elle produit encore pendant quelques instants est vivement repoussée. L'air électrisé au contact de la pointe s'écoule donc rapidement : il est aussitôt remplacé par d'autre, et il s'établit une circulation rapide qui dure aussi longtemps que l'on fournit de l'électricité au conducteur.

Les flammes sont le siége d'une circulation gazeuse très-

active; l'analogie de leur effet avec celui des pointes se trouve ainsi tout naturellement expliquée. On conçoit encore que l'on puisse remplacer l'écoulement de l'air par celui de l'eau, par exemple. Nous en verrons plus tard des applications.

TOURNIQUET ÉLECTRIQUE. — Puisqu'une pointe électrisée repousse les couches d'air avoisinantes, elle doit subir de leur part une réaction égale. On vérifie cette conséquence à l'aide du tourniquet électrique. Cet appareil (*fig.* 34) se compose d'une chape centrale sur laquelle sont fixés des rayons divergents en fil de laiton; tous sont recourbés dans le même sens à leur extrémité et terminés en pointe aiguë; la chape se place en équilibre sur un pivot communiquant à une machine électrique, et, quand on charge celle-ci, les reculs de toutes les pointes concourent pour faire tourner le moulinet.

Fig. 34.



Cet appareil marche indéfiniment dans l'air libre; mais, s'il est placé sous une cloche, il ne tourne que pendant un certain temps, après lequel il s'arrête, quoique la machine continue de fonctionner : c'est qu'à ce moment les parois de la cloche sont électrisées et que le potentiel de l'électricité répandue sur la cloche, évalué aux pointes du tourniquet, est égal au potentiel du conducteur de la machine. L'équilibre est donc établi dans la cloche; la densité électrique aux pointes du tourniquet est nulle, et celles-ci, n'étant plus le siége d'aucune déperdition, ne peuvent plus tourner. Mais, si l'on vient à approcher la main des parois de la cloche, l'électricité de nom contraire appelée sur la main par influence diminue le potentiel à l'intérieur de l'appareil; le potentiel de la machine est de nouveau le plus fort, de nouvelle électricité s'écoule par les pointes et le tourniquet se remet en mouvement.

Aimé a constaté que l'aiguille recourbée ne tourne ni dans l'eau, qui n'est pas conductrice, ni dans le vide, qui ne peut livrer passage à l'électricité, comme nous le verrons par la

suite. Mais l'aiguille tourne dans l'huile ou dans l'essence de térébenthine, pourvu qu'on tienne près de la surface libre une pointe conductrice en communication avec le sol.

Au lieu de poser le tourniquet sur la machine électrique, il revient au même de le mettre en communication avec le sol et de le disposer au voisinage du conducteur de la machine. L'expérience ainsi réalisée est connue sous le nom de *tourniquet par influence*.

MESURE DU POTENTIEL EN UN POINT DE L'AIR. — La propriété des pointes fournit un procédé pour mesurer le potentiel en un point P de l'air. Nous supposons que l'on établit en P une pointe conductrice en relation avec la boule fixe *a* de la balance de Coulomb, supposée à l'état neutre, tandis que la boule mobile *b* a reçu une charge déterminée. L'influence exercée sur la pointe fait écouler de l'électricité qui se dissipe dans l'air jusqu'à ce que la force exercée sur la pointe soit nulle, c'est-à-dire jusqu'à ce que celle-ci soit au potentiel de P (¹). Ce potentiel étant alors celui de la boule *a*, la répulsion mesurée dans la balance permet d'en déterminer la valeur.

Théoriquement, le même procédé peut servir à trouver la forme des surfaces équipotentielles au voisinage d'un corps électrisé. En effet, si l'on déplace la pointe sur une surface équipotentielle, le potentiel de la boule *a* de la balance, et par suite la répulsion qu'elle exerce sur la boule *b* à distance constante de 30°, par exemple, demeure invariable. Cette expérience pourrait même servir à donner une définition expérimentale des surfaces équipotentielles et du potentiel en un point de l'air. *Ce potentiel est la charge que devrait posséder une sphère conductrice de rayon* 1 *placée à une grande distance et communiquant par un fil de masse négligeable à une pointe située en* P, *pour que la pointe ne laissât écouler ni électricité positive, ni électricité négative.*

(¹) Bien entendu, la capacité de la boule de la balance est supposée assez faible pour que la quantité d'électricité versée par la pointe et entraînée au loin par les courants d'air ne puisse modifier d'une manière sensible la valeur du potentiel primitif en P.

ÉLECTRISATION PAR INFLUENCE PRÉCÉDANT LE MOUVEMENT DES CORPS LÉGERS. — Le premier phénomène électrique que nous avons étudié est l'attraction des corps légers; nous l'avons accepté comme un fait et nous n'en avons fourni aucune explication. Nous devons maintenant revenir sur ce sujet pour montrer comment l'influence électrique s'exerce d'abord entre les corps en présence, et comment, une fois accomplie, elle détermine les attractions que nous avons constatées.

Le premier et le plus simple des cas que nous ayons à étudier est celui où le pendule est mauvais conducteur. Quand il est chargé d'une électricité quelconque, elle est adhérente à sa surface et fixée sur ses molécules sans pouvoir les quitter; vient-on à lui présenter un corps électrisé d'une manière semblable ou inverse, l'électricité du pendule sera repoussée ou attirée, et le pendule lui-même s'écartera ou se rapprochera du corps électrisé. Quand ce pendule, toujours mauvais conducteur, est à l'état naturel, il subit, comme nous le verrons, une influence d'espèce particulière, mais dont l'effet extérieur est analogue à celui de l'influence exercée sur un conducteur. Le pendule sera donc attiré pour des motifs analogues à ceux que nous allons développer pour ce dernier cas.

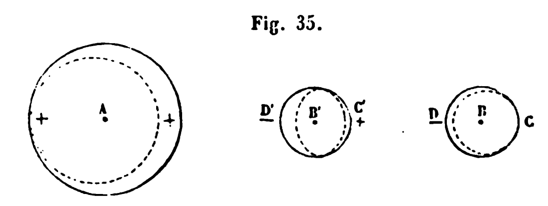
Mais, une fois le contact établi entre le pendule et le corps inducteur, il n'y a pas de répulsion immédiate, car la balle non conductrice possède et conserve pendant quelque temps une électricité contraire à celle de l'inducteur sur les points qui le touchent, et, si l'on fait l'expérience dans la balance de Coulomb, il faut tordre le fil de plusieurs degrés pour vaincre cette adhérence. A la longue, le pendule finit par se charger par communication de la même électricité que l'inducteur, et alors il est repoussé.

Quand le pendule est formé d'une substance conductrice isolée, il convient de distinguer trois cas : le premier, où il est chargé d'électricité contraire à celle de l'inducteur; le second, où il possède la même électricité; le troisième, où il est à l'état naturel.

Le corps fixe étant en A (*fig.* 35) et positif, le pendule étant en B et négatif, les fluides s'attireront et, se distribuant inégalement sur les deux corps, s'accumuleront sur les faces qui se

regardent. Cela se fera instantanément, et alors les couches électriques comprises entre l'air qui les retient et le corps dans lequel elles ne peuvent pénétrer tendront à se rapprocher et ne pourront le faire sans entraîner le pendule. Aussitôt le mouvement commencé, la distribution change; l'influence

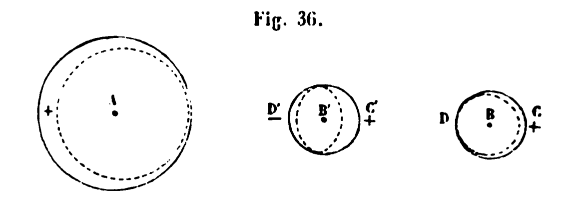
Fig. 35.



augmente, l'accumulation des fluides contraires s'accroît sur les parties les plus voisines, et l'attraction augmente, aussi bien par l'effet du rapprochement des corps que par celui de l'accumulation plus grande des fluides. Aussitôt que le contact a eu lieu, le pendule B a pris du fluide positif et il est repoussé, comme nous allons le voir.

Représentons toujours par A et B (*fig.* 36) le corps inducteur et le pendule, mais supposons-les cette fois chargés de la même

Fig. 36.



électricité : leurs charges se repousseront tout d'abord et s'accumuleront sur les surfaces les plus éloignées des deux conducteurs. Une fois qu'elles seront ainsi disposées et confinées sous les enveloppes d'air qu'elles ne peuvent franchir, leur répulsion entraînera le pendule que sa charge ne peut quitter. Mais là ne se bornent pas les effets que l'on peut avoir à observer. Supposons que l'on force le pendule à se rapprocher jusqu'en B'; on déterminera par une action d'influence plus énergique une décomposition secondaire du fluide neutre, et l'on aura en D' de l'électricité négative qui sera attirée et

en C′ du fluide positif qui sera repoussé. Ce dernier est à la vérité plus abondant que le premier; mais, d'un autre côté, sa distance au corps inducteur est plus grande, et il y aura une position pour laquelle, attraction et répulsion devenant égales, le pendule sera en équilibre. A partir de là, si le rapprochement continue fort peu, la répulsion se change en attraction.

L'expérience confirme entièrement cette conséquence importante, car, si nous touchons un pendule conducteur isolé avec un bâton de verre électrisé, il est d'abord repoussé : en approchant lentement le bâton, nous voyons d'abord le pendule se relever de plus en plus, mais sa distance au bâton diminue et bientôt il se précipite sur le verre, après quoi la répulsion recommence plus vive qu'auparavant. On conçoit que, si cette inversion dans l'effet observé avait été décrite au commencement, elle aurait pu nous laisser des doutes sur les lois de répulsion que nous avons admises, tandis que maintenant elle les confirme.

Il nous reste à examiner le cas où le pendule serait à l'état naturel, mais il n'est pas plus obscur que les autres, car l'influence du corps inducteur, décomposant le fluide neutre, transporte aux deux faces du pendule les électricités séparées ; toutes deux sont en égale quantité, mais la plus rapprochée, étant plus attirée que l'autre, entraînera le pendule vers le corps inducteur.

d'où

(16) $$\alpha = \frac{K_{12}}{K_{22}},$$

$$K_{11} - \frac{(K_{12})^2}{K_{22}} > 0,$$

(17) $$\frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}} < 1.$$

La détermination des charges résiduelles $M_1, M_2, \ldots, M'_1, M'_2, \ldots$ dépend de la solution des équations

(18) $$\left\{\begin{array}{ll} K_{11}M_1 + K_{12}M' = 0, & K_{12}M_1 + K_{22}M'_1 = 0, \\ K_{11}M_2 + K_{12}M'_1 = 0, & K_{12}M_2 + K_{22}M'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

on en tire

(19) $$\left\{\begin{array}{l} M_2 = -\dfrac{K_{12}}{K_{11}}M'_1 = \dfrac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M_1, \\ M_3 = -\dfrac{K_{12}}{K_{11}}M''_1 = \dfrac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M_2 = \left[\dfrac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}\right]^2 M_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et de même

(19 *bis*) $$\left\{\begin{array}{l} M'_2 = -\dfrac{K_{12}}{K_{22}}M_2 = \dfrac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M'_1, \\ M'_3 = \left[\dfrac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}\right]^2 M'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les charges conservées à partir de M_1 *et de* M'_1 *forment encore deux progressions géométriques dont la raison* $\frac{K_{12}}{K_{11}K_{22}}$ [*qui, d'après l'équation* (17), *est* <1] *est la même;* mais les charges des deux armatures, après un nombre quelconque de contacts, ne peuvent être égales que si l'armature extérieure est fermée autour de l'armature intérieure.

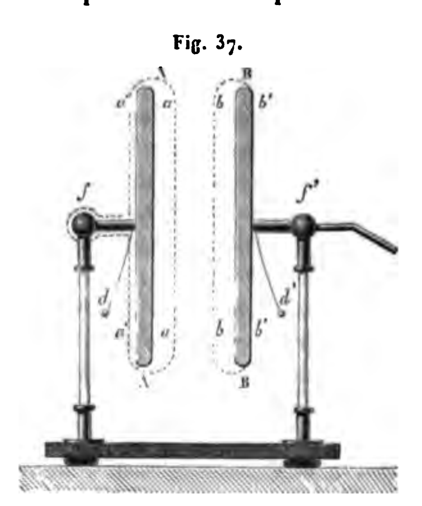
L'équation (15) subsiste toujours et s'interprète comme dans le cas précédent.

sins, les deux *armatures*, que l'on sépare par une lame isolante. Pour charger la bouteille de Leyde, on met d'ordinaire l'une des armatures en communication avec la machine électrique, l'autre avec le sol; il suffit pour la décharger de réunir les deux armatures avec la main ou à l'aide d'un conducteur métallique.

Franklin fit d'importantes expériences pour établir le rôle du verre dans la bouteille de Leyde; OEpinus et Wilke ([1]) essayèrent de le supprimer et réalisèrent ainsi le plus simple des condensateurs, le condensateur à lame d'air; toutefois ils ne purent en donner la théorie exacte, qui paraît avoir été trouvée par Volta en 1782.

CONDENSATEUR D'ŒPINUS. — THÉORIE ÉLÉMENTAIRE. — FORCE CONDENSANTE. — Considérons deux plateaux métalliques A et B (*fig.* 37), circulaires, de même diamètre, prolongés par deux conducteurs partant de leur centre et pouvant se mettre en communication, l'un avec le sol, l'autre avec la machine électrique. Supposons en outre que ces plateaux soient soutenus par des isoloirs, qu'on puisse les éloigner ou les rapprocher l'un de l'autre autant qu'on le voudra, et qu'enfin tous deux soient munis de pendules *d* et *d'*, qui nous permettront d'étudier l'état électrique de leurs faces postérieures.

Fig. 37.



L'expérimentateur éloigne d'abord le conducteur B, et met A en communication directe avec la machine jusqu'à ce que ce conducteur soit chargé à refus; la quantité d'électricité M qu'il reçoit est égale au produit du potentiel V de la machine par la capacité C du plateau; elle se distribuera sur sa surface et l'on peut admettre, sans erreur sensible, qu'il y en aura autant sur

Soient

C_1 la capacité du plateau collecteur seul;

K_{11} et K_{12} les coefficients d'induction de l'un des plateaux sur lui-même et sur l'autre;

m la charge du plateau collecteur;

m' la charge appelée par influence sur le plateau condensateur.

On a, pour évaluer V et V_1, les relations

$$(20)\qquad \begin{cases} V = C_1 m, \\ V_1 = K_{11} m + K_{12} m', \\ K_{12} m + K_{11} m' = 0. \end{cases}$$

Éliminons m et m' entre ces trois relations; il vient

$$(21)\qquad \frac{V}{V_1} = \frac{C_1}{K_{11}} \frac{1}{1-\left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2}.$$

Soient maintenant M et M' les charges que prendraient les plateaux A et B si le premier était au potentiel V, le second au potentiel zéro; on a, pour déterminer ces charges,

$$(22)\qquad \begin{cases} V = K_{11} M + K_{12} M', \\ K_{12} M + K_{11} M' = 0. \end{cases}$$

Quant à la force condensante $F = \frac{M}{m}$, on l'obtient en tirant M de ces deux dernières équations et m de la première équation (20). On trouve

$$(23)\qquad F = \frac{M}{m} = \frac{C_1}{K_{11}} \frac{1}{1-\left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2} = \frac{V}{V_1}.$$

Mais, dans les conditions où a opéré M. Riess, la boule était trop rapprochée du plateau pour que l'influence de ce dernier fût négligeable. La torsion, mesurée dans la seconde expérience, était trop grande; par suite, la valeur de la force condensante se trouvait évaluée trop bas.

des conducteurs, si leur forme était géométriquement définie et si leur situation réciproque était connue.

Mais s'il n'y a là rien qui diffère du cas général de l'influence, il y a une conséquence importante que nous n'avons point encore développée et qui se présente ici d'elle-même. Le conducteur A avait primitivement été chargé jusqu'à refus par la machine électrique; mais après que l'on a approché et mis en rapport avec le sol le plateau B, la plus grande partie de la charge positive de A s'est transportée sur la face *aa* et a abandonné la face *a'a'*; le bouton *f* est donc presque complétement revenu à l'état naturel, et, si on le met de nouveau en communication avec la machine, il en pourra recevoir une nouvelle quantité d'électricité. La capacité du plateau A a donc augmenté par suite de l'approche du plateau B. Supposons qu'on donne à A une seconde charge, elle éprouvera le même sort que la première, elle déterminera une nouvelle décomposition sur B, elle amènera en *bb* une nouvelle quantité d'électricité négative et, par la réaction de celle-ci, elle viendra s'accumuler en partie sur la face *aa*. On pourra donc recommencer la même opération un nombre indéfini de fois; chaque charge successive se partagera en deux parties distinctes : l'une qui se portera en *aa*, l'autre qui restera sur le bouton *f* et sur la face *a'a'*, et, cette dernière partie s'ajoutant à chaque opération, le pendule *d* s'élèvera progressivement jusqu'à la hauteur où il arrive quand le plateau A est directement chargé par la machine sans subir l'action de B; à ce moment la limite est atteinte et le plateau A est revenu à son potentiel primitif qui est celui de la machine. Sa charge demeure proportionnelle à ce potentiel, mais elle a augmenté dans le rapport F de sa nouvelle capacité à sa capacité primitive. Le rapport F est désigné sous le nom impropre de *force condensante*.

Si, au lieu de charger l'appareil par des opérations successives, on maintient le bouton *f* en communication constante avec la source et *f'* en relation avec le sol, les charges électriques augmenteront continûment sur chaque point des deux appareils, et l'équilibre final sera le même que dans le cas précédent. La force condensante F aura conservé sa valeur.

culées sont trop faibles, car le facteur $\frac{C_1}{K_{11}}$, par lequel elles doivent être multipliées d'après l'équation (23), est plus petit que l'unité : ce facteur est le rapport des potentiels qu'une même charge donne au plateau collecteur suivant qu'il est seul ou en présence du plateau condensateur isolé.

On doit à M. Gaugain [1] de bonnes expériences sur des condensateurs cylindriques ou sphériques. Les premiers étaient formés d'un tuyau de fer-blanc, dans lequel se trouvait placé concentriquement un autre tuyau de fer-blanc ou une tige de fer; les derniers étaient formés d'une sphère soutenue par des pieds en gomme laque dans l'intérieur de deux calottes hémisphériques; la calotte supérieure, percée d'un orifice de $0^m,030$ de diamètre, servait à faire passer le fil de communication se rendant à la sphère intérieure. Pratiquement, ces condensateurs équivalent à des condensateurs fermés : M. Gaugain les portait à de très-faibles potentiels et évaluait leurs charges à l'aide d'un appareil ingénieux que nous décrirons ultérieurement sous le nom d'*électroscope à décharges*. Il a obtenu des résultats irréprochables au point de vue expérimental et qui plus tard se sont trouvés en parfait accord avec la théorie. Ainsi, M. Gaugain a montré que les charges de condensateurs cylindriques, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2, varient en raison inverse de $\log \frac{R_2}{R_1}$ [2], celles de condensateurs sphériques proportionnellement à $\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$, quand l'armature intérieure est collectrice [3]. Il a même étudié le cas de condensateurs cylindriques excentriques, et les résultats de ses expériences ont été en parfait accord avec celui des calculs de M. Blavier [4].

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIV, p. 174.

(2) Blavier, *Journal de Physique*, t. III, p. 151; 1874.

(3) $V = M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, $M = V\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$.

(4) Blavier, *Journal de Physique*, t. III, p. 115 et 151; 1874.

armatures sphériques A et B, très-minces, concentriques, de rayons R et R + e. Nous mettons l'armature interne A en communication lointaine avec une source au potentiel V, l'armature B avec une source au potentiel V'. D'après les principes généraux démontrés p. 141, on a, en désignant par M et M' les charges des deux armatures,

$$(1) \qquad \begin{cases} V = K_{11}M + K_{12}M', \\ V' = K_{21}M + K_{22}M'; \end{cases}$$

K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21} sont les coefficients d'induction dont il est facile, dans le cas actuel, de calculer la valeur.

Remarquons d'abord que, par raison de symétrie, les charges M et M' sont distribuées uniformément sur les armatures. Par suite, le potentiel de chacune de ces couches a dans l'intérieur de la sphère correspondante une valeur constante égale à celle qu'il possède au centre commun des sphères; à l'extérieur cette couche a un potentiel égal à celui que fournirait une charge égale placée au centre (*voir* p. 84). Il en résulte que le potentiel total V de l'armature interne, somme des potentiels partiels produits au centre de la sphère par les charges M et M' des deux armatures, a pour expression

$$(2) \qquad V = \frac{M}{R} + \frac{M'}{R+e};$$

tandis que le potentiel V' de l'armature externe, somme des potentiels des charges M et M' en un point situé à une distance R + e du centre, est

$$(2\ bis) \qquad V' = \frac{M}{R+e} + \frac{M'}{R+e}.$$

La comparaison des équations (1), (2) et (2 *bis*) donne

$$(3) \qquad \begin{cases} K_{11} = \dfrac{1}{R}, \\ K_{22} = \dfrac{1}{R+e}, \\ K_{12} = K_{21} \dfrac{1}{R+e}. \end{cases}$$

Résolues par rapport aux charges M et M', les équations (2) et (2 *bis*) donnent

$$(4)\quad \begin{cases} M = \dfrac{R+e}{e} R(V - V'), \\ M' = \dfrac{R+e}{e}[(R+e)V' - RV]. \end{cases}$$

Nous ferons, relativement à ces équations, les remarques suivantes :

1° La charge M de l'armature interne ne dépend que de la différence V — V' des potentiels communiqués aux deux armatures, et non de la valeur absolue de ces potentiels. Ainsi, quand on chargera un condensateur sphérique à l'aide d'une machine de Holtz ou de Nairne, il sera indifférent de mettre en communication chacun des pôles de la machine avec l'une des armatures du condensateur ou d'attacher seulement l'un des pôles à l'armature interne, en faisant communiquer au sol à la fois l'autre pôle et l'armature externe.

2° La charge M' de l'armature externe diffère de — M d'une quantité $m' = (R + e)V'$, précisément égale à celle que cette armature recevrait de la source au potentiel V' si l'armature interne n'existait pas. La charge totale M' de l'armature peut donc être considérée comme formée : 1° d'une couche — M répartie uniformément sur la surface interne de l'armature extérieure, où elle est maintenue par l'influence de M, d'après les principes de la page 145; 2° de la couche $m' = (R + e)V'$, répartie uniformément sur la surface extérieure de l'armature.

3° Quand les deux armatures sont au même potentiel ($V = V'$), l'armature interne ne reçoit aucune charge. Nous savons, en effet, qu'il ne peut y avoir d'électricité libre à l'intérieur d'une masse conductrice.

4° Le rapport de la charge de l'armature interne à la charge R(V — V') qu'elle recevrait, d'après sa capacité, d'une source au potentiel V — V' si l'armature externe n'existait pas, a pour valeur

$$(5)\quad F = \frac{R+e}{e}.$$

C'est l'expression de ce que nous avons appelé la *force condensante*. Quand on fait décroître e sans modifier R, la force condensante croît indéfiniment.

5° Lorsque e est suffisamment petit, pour qu'on puisse le négliger par rapport à R, les équations (4) deviennent

$$(6) \qquad M = -M' = (V - V')\frac{R^2}{e} = \frac{(V - V')S}{4\pi e}.$$

S est la surface $4\pi R^2$ de l'une des armatures. Nous verrons que la formule (6) s'applique, avec le même degré d'approximation, à un condensateur fermé quelconque dont les deux armatures sont partout très-rapprochées et équidistantes.

2° *Condensateurs fermés quelconques*. — Considérons un condensateur fermé dont les deux armatures A et B, de forme quelconque, sont séparées par une lame d'air d'épaisseur e invariable et très-faible et portées aux potentiels V et V'. Les deux armatures constituent deux surfaces équipotentielles infiniment voisines, et, puisque leur distance normale est fixe et égale à e, la force électrique en tout point P compris entre les deux armatures et très-voisin de l'armature interne A a pour valeur $-\frac{dV}{dn}$, ou approximativement $\frac{V' - V}{e}$; d'autre part, en désignant par ρ la densité électrique aux points de l'armature interne infiniment voisins du point P, la même force a pour expression (p. 97) $-4\pi\rho$: on a donc, avec un degré suffisant d'approximation,

$$(7) \qquad \frac{V' - V}{e} = -4\pi\rho.$$

Soient S la surface de l'armature interne, M sa charge; puisque $V' - V$ et e sont deux constantes, ρ est également constant en tous les points de l'armature, et l'on a

$$(8) \qquad M = \rho S = \frac{(V - V')S}{4\pi e}.$$

Cette formule est identique à la formule (6) démontrée pour le condensateur sphérique.

La charge M' de l'armature externe se compose : 1° d'une

charge $-$ M appelée par influence sur sa surface intérieure; 2° de la charge m', en général négligeable par rapport à M, que communiquerait à l'armature externe la source au potentiel V' si l'armature interne n'existait pas. Cette charge est en équilibre sur la surface extérieure de l'armature et sans action à l'intérieur. De même, l'ensemble des charges $+$ M de A et $-$ M de la surface interne de B est sans action en tout point de la masse de B ou extérieur à B (*voir* p. 145).

Remarquons que la capacité $\frac{S}{4\pi e}$ d'un condensateur, proportionnelle à sa surface et en raison inverse de l'épaisseur de la couche isolante, ne dépend pas de la forme de l'armature; au contraire, la capacité C de l'armature interne supposée seule dépend essentiellement de sa forme. La force condensante $F = \frac{S}{4\pi e C}$ est donc le rapport de deux quantités qui ne sont guère comparables : sa détermination n'offre qu'un intérêt purement pratique.

Bien qu'un condensateur rigoureusement fermé soit irréalisable, on peut admettre que la théorie qui précède se rapproche beaucoup de celle des condensateurs réels, et qu'elle est applicable même à un condensateur à plateaux, pourvu que ceux-ci soient très-larges par rapport à la distance qui les sépare. Les irrégularités produites soit par l'ouverture pratiquée dans l'armature externe d'un condensateur fermé pour laisser passer le conducteur aboutissant à l'armature interne, soit par les bords du condensateur à plateau, etc., sont de nulle importance eu égard aux perturbations bien plus graves résultant, dans les bouteilles de Leyde ordinaires, de l'emploi des milieux isolants ou *diélectriques*, dont le rôle, très-complexe et imparfaitement connu, sera étudié avec tous les détails nécessaires dans le Chapitre suivant.

DÉCHARGE DES CONDENSATEURS. — LOI DES CHARGES RÉSIDUELLES. — Quand on réunit les deux armatures d'un condensateur fermé, la charge M de l'armature interne A se réunit à la charge $-$ M maintenue par influence sur la face interne de B, et il ne reste d'électricité libre que la charge m' répandue à la

surface externe de B. Si B communiquait primitivement au sol, cette charge m' est nulle.

Au lieu de décharger brusquement un condensateur par la réunion de ses armatures, on peut mettre celles-ci alternativement en communication avec le sol. A chaque nouveau contact on obtient une faible étincelle, et l'opération peut être répétée indéfiniment. Nous examinerons successivement le cas d'un condensateur sphérique, d'un condensateur fermé de forme arbitraire et d'un condensateur quelconque.

1° *Condensateur sphérique fermé.* — Supposons qu'on mette d'abord l'armature intérieure A au sol et soient $M_1, M_2, \ldots$ les charges qu'elle possède après avoir été touchée 1, 2, ... fois. Soient de même $M'_1, M'_2, \ldots$ les charges de l'armature B quand elle a été touchée 1, 2, ... fois. Nous déterminerons $M_1, M_2, \ldots, M'_1, M'_2, \ldots$ par autant d'équations qu'il y a de contacts, en écrivant que le potentiel de l'armature touchée en dernier lieu est nul.

Nous aurons ainsi successivement :

Armature touchée.	
A...	$\dfrac{M_1}{R} + \dfrac{M'}{R+e} = 0,$
B...	$\dfrac{M_1 + M'_1}{R+e} = 0,$
A...	$\dfrac{M_2}{R} + \dfrac{M'_1}{R+e} = 0,$
B...	$\dfrac{M_2 + M'_2}{R+e} = 0,$
....	....
....	....

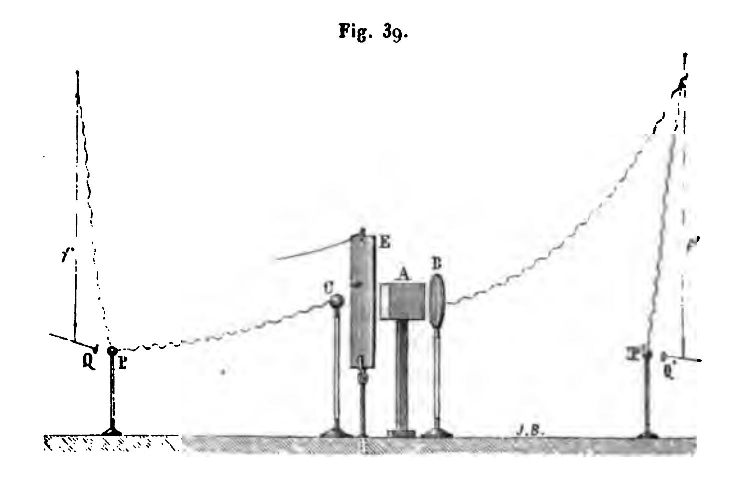
Il en résulte

$$(9)\quad \begin{cases} M'_1 = -M_1, \quad M_2 = -\dfrac{R}{R+e}M'_1 = \dfrac{R}{R+e}M_1, \\ M'_2 = -M_2, \quad M_3 = -\dfrac{R}{R+e}M'_2 = \dfrac{R}{R+e}M_2 = \left(\dfrac{R}{R+e}\right)^2 M_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(*fig.* 39), dont on mesure la charge à l'aide d'une balance de torsion représentée schématiquement en PQ, et un disque B, isolé et primitivement à l'état neutre, qui communique à la balance de torsion P′Q′.

La boule et le disque sont séparés par un écran métallique E en communication avec le sol, et la balance P′Q′ est au zéro (¹). On abaisse l'écran, l'influence se produit, et l'on observe l'impulsion de l'aiguille de la balance P′Q′, proportionnelle à la

Fig. 39.



charge induite sur le disque B. On rétablit l'écran, puis entre l'écran et le disque on dispose un cube A parfaitement neutre d'une substance isolante, ce qui ne produit aucun déplacement de l'aiguille de la balance P′Q′; enfin on abaisse brusquement l'écran E, et l'on mesure le nouvel arc d'impulsion. On trouve qu'il est toujours plus considérable que le premier: or cela doit être si le cube se polarise et joue ainsi le rôle d'un conducteur interposé entre C et B.

Dès qu'on rétablit une seconde fois l'écran, l'aiguille de la balance P′Q′ revient au zéro. La polarisation se détruit donc aussitôt que cesse l'influence, et l'effet observé appartient en-

(¹) *Voir* p. 145.

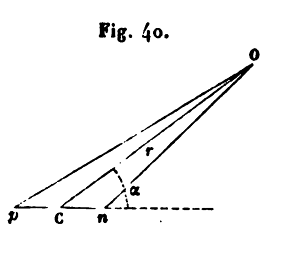
tièrement à cette polarisation. Grâce à l'adaptation d'un mécanisme spécial destiné à mouvoir l'écran, M. Felici a pu démontrer que le temps nécessaire pour annuler complétement l'effet de la polarisation doit être inférieur à $\frac{1}{1000}$ de seconde.

M. Felici a aussi remplacé le cube solide E par un cube creux de même substance : il a reconnu que l'effet produit par l'interposition du cube décroît avec sa masse quand la surface extérieure demeure la même; un cube creux à parois très-minces produit un effet sensiblement nul. La polarisation n'est donc pas purement superficielle; c'est un phénomène profond, auquel prend part la masse entière de la substance isolante.

Théorie de M. Clausius (¹). — Ainsi envisagée, l'influence électrique sur un corps isolant présente la plus grande analogie avec l'influence d'un aimant sur un morceau de fer doux; on peut donc en faire la théorie par l'application des mêmes principes qui ont guidé Poisson dans la théorie mathématique du magnétisme, dont nous indiquerons ultérieurement les bases : c'est justement ce qu'a fait M. Clausius.

Imaginons qu'un corps mauvais conducteur est constitué par un milieu non susceptible de s'électriser, dans lequel se trouvent disséminés des corpuscules conducteurs qui s'électrisent par influence, mais sans qu'il y ait jamais passage d'électricité de l'un des corpuscules à un autre. Si les petits conducteurs que nous considérons sont assez écartés les uns des autres, la force électrique F qui agit en chacun des points P de l'un d'eux pn s'écarte très-peu d'une valeur moyenne correspondant, par exemple, au centre de gravité C du corpuscule (*fig.* 40). Des électricités de noms contraires apparaîtront à sa surface pn, et leur action sur tout point O dont la distance au corpuscule

Fig. 40.



(¹) Clausius, *Die mecanische Behandlung der Electricität;* Abschnit III. *Behandlung dielectrischer Medien.* Braunschweig; 1879.

sera grande par rapport aux dimensions de celui-ci se réduira sensiblement à celle de deux quantités équivalentes $+m$ et $-m$ d'électricités contraires concentrées en deux points p et n dont la distance d sera inférieure au plus grand diamètre de pn. Cette action est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au produit md que nous appellerons le *moment électrique* du corpuscule [1].

Nous admettrons que la direction pn du moment électrique coïncide avec celle de la force F qui le produit et que la grandeur md de ce moment est proportionnelle à F. Si les corpuscules conducteurs possèdent des formes et des orientations variables, le moment md variera d'un corpuscule à un autre; mais, dans le plus petit volume accessible à l'expérience, la somme de tous les moments ne s'écartera pas sensiblement d'une certaine valeur moyenne, la même que si tous les corpuscules étaient des sphères d'un diamètre convenable et également espacées.

Pour déterminer le moment électrique moyen d'un élément de volume du corps isolant, il faut d'abord fixer la valeur de la force moyenne F qui règne à l'intérieur de l'un des corpuscules. Elle provient : 1° des masses électriques extérieures à l'isolant; 2° des masses électriques libres à la surface de tous les corpuscules, à l'exception de celui que l'on considère.

Pour évaluer cette force, on peut substituer au corps isolant discontinu C, que nous considérons, un isolant fictif C′, dont les moments électriques seraient distribués d'une manière continue dans toute la masse, mais à la condition essentielle de

(1) Désignons par r la longueur OC, par α l'angle OCn : la force exercée par le corpuscule considéré sur l'unité d'électricité placée en O est, en grandeur (*fig.* 40),

$$\frac{m}{r^2+\frac{d^2}{4}-rd\cos\alpha}-\frac{m}{r^2+\frac{d^2}{4}+rd\cos\alpha}=\frac{2mrd\cos\alpha}{\left(r^2+\frac{d^2}{4}\right)^2-r^2d^2\cos^2\alpha};$$

d étant supposé très-petit par rapport à r, cette expression se réduit sensiblement à

$$\frac{2md\cos\alpha}{r^3}.$$

pratiquer autour du point P, où l'on veut évaluer la force F, une cavité équivalente au volume du corpuscule. Nous assignerons arbitrairement à cette cavité la forme d'une sphère, comme étant la forme moyenne que doivent posséder ces cavités dans une substance isotrope; l'analyse conduit alors à ce théorème curieux que l'action de l'isolant au point considéré est indépendante du rayon attribué à la sphère, c'est-à-dire à la dimension absolue des corpuscules. On démontre que, g désignant la fraction du volume de l'isolant rempli par ceux-ci, les moments *md* sont proportionnels au facteur $E = \frac{3g}{4\pi(1-g)}$, et que l'on a entre le potentiel U, dont les dérivées donnent les composantes de la force F, et le potentiel V des masses électriques *extérieures* la relation

$$\Delta U = -\frac{4\pi E}{1+4\pi E}\Delta V.$$

Il résulte de là que, si les masses électriques d'où provient le potentiel V sont toutes extérieures à l'isolant, c'est-à-dire si en tout point intérieur $\rho = 0$, d'où $\Delta V = 0$, on a également $\Delta U = 0$. Par suite, la distribution continue des moments électriques que nous avons imaginée est telle, qu'il n'y a d'électricité libre qu'à la surface de l'isolant.

D'après cette théorie, l'effet extérieur d'un isolant soumis à l'influence sera de tous points analogue à celui d'un conducteur convenablement choisi. En particulier, considérons l'influence exercée sur un isolant creux très-mince, qui, suivant M. Felici, ne modifie pas sensiblement l'état du champ électrique où on le place. Les faces opposées de cet isolant portent des distributions égales d'électricités inverses, dont l'effet extérieur doit en effet tendre vers zéro avec la distance qui les sépare.

APPLICATION AUX CONDENSATEURS. — POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE. — Soit un condensateur fermé dont les deux armatures sont séparées par une lame isolante autre que l'air. Cette lame joue un rôle analogue à celui d'un conducteur interposé entre les armatures, mais sans les toucher; il en résulte que la diffé-

Les charges conservées par chacune des armatures à partir de M_1 *et* M'_1 (*c'est-à-dire après que toutes deux ont été une fois en communication avec le sol*) *décroissent suivant une progression géométrique dont la raison est* $\frac{R}{R+e}$.

Quand on commence par toucher l'armature interne A, *les charges des deux armatures sont égales entre elles après un nombre égal de contacts effectués sur chaque armature, inégales après un nombre inégal de contacts.*

Le premier contact de l'armature A lui enlève une quantité d'électricité

$$(10) \qquad \alpha_1 = M - M_1 = RV.$$

C'est la quantité d'électricité que la source au potentiel V *communiquerait à l'armature interne si l'armature externe ou bien n'existait pas, ou bien était isolée* ($M' = 0$).

2° *Condensateur fermé quelconque.* — Les équations générales

$$(1) \qquad \begin{cases} V = K_{11}M + K_{12}M', \\ V' = K_{12}M + K_{22}M' \end{cases}$$

se simplifient un peu dans l'hypothèse d'un condensateur fermé. Imaginons, en effet, qu'on communique à l'armature interne A une charge égale à $+1$, et qu'on mette B en communication avec le sol. Le potentiel V' de B est nul et sa charge $M' = -1$. La dernière équation (1) donne donc

$$(11) \qquad K_{12} - K_{22} = 0.$$

D'autre part, le potentiel V est nécessairement positif et la première équation (1) donne

$$(12) \qquad K_{11} - K_{12} > 0.$$

Supposons qu'on mette les deux armatures successivement en communication avec le sol en commençant par l'armature interne. On aura, en tenant compte de l'équation (11),

$$(13) \qquad \begin{cases} K_{11}M_1 + K_{12}M' = 0, & K_{12}(M_1 + M'_1) = 0, \\ K_{11}M_2 + K_{12}M'_1 = 0, & K_{12}(M_2 + M'_2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(14)\quad \begin{cases} M'_1 = -M_1, & M_2 = -\frac{K_{12}}{K_{11}} M'_1 = \frac{K_{12}}{K_{11}} M_1, \\ M'_2 = -M_2, & M_3 = \left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2 M_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui ne diffèrent des équations (9) que par la substitution de K_{11} à $\frac{1}{R}$ et de K_{12} à $\frac{1}{R+e}$.

Les charges conservées par les armatures forment deux progressions géométriques ayant la même raison $\frac{K_{12}}{K_{11}}$ plus petite que l'unité, d'après l'équation (12). Les conclusions auxquelles nous sommes arrivés dans le paragraphe qui précède subsistent donc entièrement. On démontrera aisément que l'équation (10) devient

$$(15)\qquad \alpha_1 = M - M_1 = \frac{V}{K_{11}}.$$

La quantité d'électricité enlevée à l'armature interne par le premier contact est celle que la source au potentiel V *communiquerait à l'armature interne en présence de l'armature externe isolée* ($M' = 0$); elle est différente de celle que la même source communiquerait à l'armature interne supposée seule; il n'y a, en effet, aucune relation nécessaire entre la capacité C_1 de cette armature et le coefficient d'induction K_{11}.

3° *Condensateur quelconque.* — Les équations (1) ne comportent aucune simplification. Nous remarquerons seulement que, si l'on donne à l'armature A une charge égale à $+1$ et que l'on mette B en communication avec le sol, le potentiel V sera positif. Soit α la valeur absolue de la charge négative de B, on aura

$$V = K_{11} - \alpha K_{12} > 0,$$
$$K_{12} - \alpha K_{22} = 0,$$

d'où

$$(16)\qquad \alpha = \frac{K_{12}}{K_{22}},$$

$$K_{11} - \frac{(K_{12})^2}{K_{22}} > 0,$$

$$(17)\qquad \frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}} < 1.$$

La détermination des charges résiduelles $M_1, M_2, \ldots, M'_1, M'_2, \ldots$ dépend de la solution des équations

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{ll} K_{11}M_1 + K_{12}M' = 0, & K_{12}M_1 + K_{22}M'_1 = 0, \\ K_{11}M_2 + K_{12}M'_1 = 0, & K_{12}M_2 + K_{22}M'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

on en tire

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} M_2 = -\frac{K_{12}}{K_{11}}M'_1 = \frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M_1, \\ M_3 = -\frac{K_{12}}{K_{11}}M''_1 = \frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M_2 = \left[\frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}\right]^2 M_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et de même

$$(19\,bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} M'_2 = -\frac{K_{12}}{K_{22}}M_2 = \frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}M'_1, \\ M'_3 = \left[\frac{(K_{12})^2}{K_{11}K_{22}}\right]^2 M'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les charges conservées à partir de M_1 *et de* M'_1 ***forment encore deux progressions géométriques dont la raison*** $\frac{K_{12}}{K_{11}K_{22}}$ [*qui, d'après l'équation* (17), ***est*** <1] ***est la même;*** mais les charges des deux armatures, après un nombre quelconque de contacts, ne peuvent être égales que si l'armature extérieure est fermée autour de l'armature intérieure.

L'équation (15) subsiste toujours et s'interprète comme dans le cas précédent.

Le cas particulier où les deux armatures du condensateur sont parfaitement égales et placées symétriquement par rapport à un plan (c'est le cas du condensateur à plateaux) n'offre d'autre particularité que l'égalité des coefficients K_{11}, K_{22}. La raison de la progression suivant laquelle décroissent les charges résiduelles d'un même plateau devient $\left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2$; les charges successives des deux plateaux appartiennent alors à une progression géométrique unique dont la raison est $\frac{K_{12}}{K_{11}}$. Elles ne peuvent jamais être égales.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES CONDENSATEURS A LAME D'AIR. — MM. RIESS ET GAUGAIN. — M. Riess (¹) étudia expérimentalement un condensateur à lame d'air dont les plateaux étaient disposés à peu près comme ceux que nous avons décrits. Mais il s'est laissé guider dans ses expériences par des principes peu exacts; ainsi, pour mesurer la force condensante, il a opéré de deux manières, qui ni l'une ni l'autre ne sont rigoureuses.

Dans la première, il chargeait le plateau collecteur A (*fig.* 37) avec une source électrique donnée, touchait la boule f avec un plan d'épreuve et mesurait, dans la balance de torsion, la force répulsive pour un écart constant. Après cela, il approchait leplateau condensateur B en communication avec le sol, touchait encore f et déterminait la nouvelle force répulsive correspondant au même écart. Il obtenait ainsi le rapport des densités électriques en f, avant et après l'approche du plateau B, et admettait, sans preuve suffisante, l'identité de ce rapport et de la force condensante. Nous allons démontrer que cette identité subsiste dans le seul cas où la boule f est infiniment éloignée du plateau. Dans ce cas, le rapport des deux densités que l'on mesure est celui du potentiel V de la source au potentiel V_1 produit sur le plateau A dans la seconde partie de l'expérience.

(¹) *Reibungselektricität*, t. I, p. 307, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XLII, p. 376.

Soient

C_1 la capacité du plateau collecteur seul;
K_{11} et K_{12} les coefficients d'induction de l'un des plateaux sur lui-même et sur l'autre;
m la charge du plateau collecteur;
m' la charge appelée par influence sur le plateau condensateur.

On a, pour évaluer V et V_1, les relations

$$(20) \qquad \begin{cases} V = C_1 m, \\ V_1 = K_{11} m + K_{12} m', \\ K_{12} m + K_{11} m' = 0. \end{cases}$$

Éliminons m et m' entre ces trois relations; il vient

$$(21) \qquad \frac{V}{V_1} = \frac{C_1}{K_{11}} \frac{1}{1 - \left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2}.$$

Soient maintenant M et M' les charges que prendraient les plateaux A et B si le premier était au potentiel V, le second au potentiel zéro; on a, pour déterminer ces charges,

$$(22) \qquad \begin{cases} V = K_{11} M + K_{12} M', \\ K_{12} M + K_{11} M' = 0. \end{cases}$$

Quant à la force condensante $F = \frac{M}{m}$, on l'obtient en tirant M de ces deux dernières équations et m de la première équation (20). On trouve

$$(23) \qquad F = \frac{M}{m} = \frac{C_1}{K_{11}} \frac{1}{1 - \left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2} = \frac{V}{V_1}.$$

Mais, dans les conditions où a opéré M. Riess, la boule était trop rapprochée du plateau pour que l'influence de ce dernier fût négligeable. La torsion, mesurée dans la seconde expérience, était trop grande; par suite, la valeur de la force condensante se trouvait évaluée trop bas.

La seconde méthode de M. Riess revient à déterminer la raison $r^2 = \left(\frac{K_{12}}{K_{21}}\right)^2$ de la progression suivant laquelle décroissent les charges résiduelles du plateau A quand on décharge le condensateur par la méthode des contacts alternatifs. Le Tableau suivant renferme les résultats de deux séries d'expériences; les plateaux A et B avaient $0^m,184$ de diamètre et $1^{mm},6$ d'épaisseur; mais, dans la première série, la tige mince qui faisait communiquer le plateau collecteur A à la boule f était plus longue, et la boule elle-même plus grosse que dans la seconde :

Distance des plateaux.	Valeur de $\frac{K_{12}}{K_{11}}$. Première série.	Seconde série.
mm		
112,8	0,251	0,263
45,1	0,454	0,500
33,9	0,534	0,612
22,6	0,638	0,689
11,3	0,765	0,823
9,0	»	0,854
6,8	0,840	0,887
4,5	»	0,911

Ce Tableau établit que la valeur du rapport $\frac{K_{12}}{K_{11}}$ augmente rapidement quand la distance des plateaux diminue, mais ne permet de formuler à cet égard aucune loi précise; on voit, d'ailleurs, que des circonstances secondaires, comme la longueur du fil de communication et le diamètre de la boule f, exercent une influence qui n'est pas négligeable.

M. Riess a voulu déduire de ces dernières expériences la valeur de la force condensante en employant la formule inexacte

$$F = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{K_{12}}{K_{11}}\right)^2}, \tag{24}$$

qui se déduit de la théorie de Biot. Les valeurs de F ainsi cal-

culées sont trop faibles, car le facteur $\frac{C_1}{K_{11}}$, par lequel elles doivent être multipliées d'après l'équation (23), est plus petit que l'unité : ce facteur est le rapport des potentiels qu'une même charge donne au plateau collecteur suivant qu'il est seul ou en présence du plateau condensateur isolé.

On doit à M. Gaugain [1] de bonnes expériences sur des condensateurs cylindriques ou sphériques. Les premiers étaient formés d'un tuyau de fer-blanc, dans lequel se trouvait placé concentriquement un autre tuyau de fer-blanc ou une tige de fer; les derniers étaient formés d'une sphère soutenue par des pieds en gomme laque dans l'intérieur de deux calottes hémisphériques; la calotte supérieure, percée d'un orifice de 0m,030 de diamètre, servait à faire passer le fil de communication se rendant à la sphère intérieure. Pratiquement, ces condensateurs équivalent à des condensateurs fermés : M. Gaugain les portait à de très-faibles potentiels et évaluait leurs charges à l'aide d'un appareil ingénieux que nous décrirons ultérieurement sous le nom d'*électroscope à décharges*. Il a obtenu des résultats irréprochables au point de vue expérimental et qui plus tard se sont trouvés en parfait accord avec la théorie. Ainsi, M. Gaugain a montré que les charges de condensateurs cylindriques, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2, varient en raison inverse de $\log\frac{R_2}{R_1}$ [2], celles de condensateurs sphériques proportionnellement à $\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$, quand l'armature intérieure est collectrice [3]. Il a même étudié le cas de condensateurs cylindriques excentriques, et les résultats de ses expériences ont été en parfait accord avec celui des calculs de M. Blavier [4].

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIV, p. 174.

(2) Blavier, *Journal de Physique*, t. III, p. 151; 1874.

(3) $V = M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, $M = V\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$.

(4) Blavier, *Journal de Physique*, t. III, p. 115 et 151; 1874.

CHAPITRE IX.

CORPS ISOLANTS. — POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE.

Charge d'un corps isolant. — Pénétration des charges. — Influence sur les corps isolants. — Polarisation. — Théorie de M. Clausius. — Application au cas du condensateur. — Pouvoir inducteur spécifique. — Rôle de la lame isolante dans les condensateurs : pénétration, polarisation, décharge résiduelle.
Mesure des pouvoirs inducteurs spécifiques. — Expériences de Cavendish. — Expériences de Faraday. — Mesures récentes des pouvoirs inducteurs spécifiques. — Pouvoir inducteur spécifique des liquides et des gaz.
Changement de volume accompagnant l'électrisation des isolants.

CHARGE D'UN CORPS ISOLANT. — Jusqu'ici nous n'avons étudié à peu près exclusivement que les actions électriques s'exerçant entre corps conducteurs, et le développement analytique de la loi de Coulomb nous a suffi pour trouver les lois quantitatives des phénomènes; l'expérimentation n'a joué qu'un rôle secondaire et en quelque sorte effacé : nous ne l'avons invoquée que pour lui demander des vérifications de résultats prévus. Il n'en sera pas de même dans ce Chapitre : les corps isolants offrent au point de vue électrique une constitution spéciale qu'il faut découvrir par la voie de l'expérience, et cette recherche est hérissée de tant de difficultés, que les fondements même de la théorie des isolants ne sont pas encore bien assurés.

Nous savons que les corps isolants s'électrisent par le frottement, mais seulement aux points frottés ou dans leur voisinage immédiat, de telle sorte que, tenus à la main ou mis en contact avec des conducteurs, ils conservent longtemps une électrisation plus ou moins marquée. Aucune loi connue ne

charge A par la machine, et l'on met B et C en communication avec le sol. Ensuite on isole ces derniers plateaux et on les réunit à un électromètre formé de deux lames d'or ou de deux petites balles de sureau doré *b* et *c* voisines et isolées l'une de l'autre; à ce moment elles sont à l'état neutre, puisque les électricités négatives sont condensées aux faces antérieures de B et de C, et que les positives ont été chassées dans le sol. Mais si l'on vient à approcher B de A, l'influence augmente, une nouvelle masse de fluide — s'accumule en B; mais aussi une partie équivalente d'électricité + se transmet à la lame *b* de l'électromètre. En même temps que cette nouvelle charge se condense sur B, elle réagit plus énergiquement sur A et décharge d'autant la face opposée au plateau C. Alors l'induction diminue sur C, qui abandonne et laisse écouler du fluide négatif jusqu'à la lame *c*. Il suit de là que les deux lames *b* et *c* vont s'approcher, et en général on pourra reconnaître par leur mouvement et par la nature de l'électricité que prend chacune d'elles les variations d'intensité du pouvoir inducteur de A sur les plateaux B et C. Cela posé, l'appareil étant ramené à sa situation première et l'électromètre étant à l'état neutre, introduisons une lame de verre entre A et B : nous verrons se produire le phénomène que nous venons de décrire et dans le même sens, absolument comme si la lame B avait été approchée de A. Le même effet a lieu quand on remplace le verre par d'autres lames isolantes, et il n'est pas le même pour chaque substance; le verre agit moins que la gomme laque et celle-ci moins que le soufre. Nous reconnaissons là, de la manière la plus nette, l'existence du pouvoir inducteur spécifique, tel qu'il a été défini ci-dessus.

Pour mesurer le pouvoir inducteur spécifique, Faraday [1] et plus tard Harris ont employé la méthode suivante.

On dispose deux condensateurs à lame d'air *c*, *c'* égaux entre eux, c'est-à-dire ayant même forme, même étendue et même distance des armatures. Pour s'assurer de leur identité, on charge l'un d'eux et on mesure avec un plan d'épreuve dans la balance de Coulomb l'épaisseur électrique en un point de

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 360.

surface qui ont été en contact avec la laine sont eux-mêmes électrisés négativement.

Mettons ensuite, pendant un temps très-court, le bâton en contact avec le conducteur d'une machine électrique en activité : il présentera aux points touchés ou même sur toute sa surface les signes d'une électrisation positive, et cependant sa charge résultante, mesurée à l'aide d'un conducteur creux, pourra demeurer négative. Il y a donc de l'électricité positive à la surface et de l'électricité négative à une plus grande profondeur. Si l'on abandonne alors le bâton de résine dans l'air, l'électrisation superficielle disparaît peu à peu par l'effet de la déperdition et l'électrisation profonde prédomine de nouveau; le bâton redevient négatif à l'électroscope. Les charges électriques développées à la surface d'un isolant peuvent donc pénétrer à une certaine profondeur et reparaître à la surface au bout d'un temps plus ou moins long. Cette pénétration lente, résultat d'une conductibilité très faible, est une cause perpétuelle d'erreurs dans les expériences : c'est ainsi que, depuis Coulomb, la loi fondamentale de l'électricité a été mise en doute par des expérimentateurs qui n'avaient pas pris de précautions suffisantes pour décharger les supports isolants qu'ils employaient de toute trace d'électrisation antérieure (p. 53).

INFLUENCE SUR LES CORPS ISOLANTS. — Considérons maintenant un corps isolant parfaitement neutre dans toutes ses parties. Il est fort difficile de constater que cette condition est absolument remplie, mais on approche autant que possible de sa réalisation en chauffant tous les points de la surface du corps isolant dans une flamme, ce qui rend la déperdition extrêmement active, et en répétant au besoin plusieurs fois cette opération à des intervalles assez éloignés pour permettre aux charges intérieures, s'il y en a, de se porter à la surface et de s'y dissiper. Quand un corps ainsi préparé est soumis à distance à l'action d'un corps électrisé, on observe qu'il se produit un phénomène d'influence.

Par exemple, Matteucci (1) suspendit par un fil de cocon, au

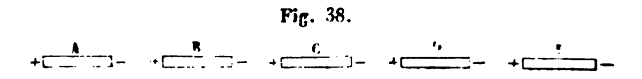
(1) MATTEUCCI, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXVII, p. 140.

centre d'une cloche de verre pleine d'air desséché, de petites aiguilles de soufre, de résine ou de gomme laque bien neutres, puis il approcha d'elles un corps électrisé A : à l'instant elles se dirigèrent vers lui, comme une aiguille aimantée vers un barreau de fer, en exécutant des oscillations autour de leur position d'équilibre. Tant que dura l'influence, elles donnèrent des signes électriques, contraires à ceux du corps inducteur à leur bout le plus rapproché de lui, et de même sens à leur extrémité la plus éloignée. Aussitôt que l'on éloigna le corps électrisé A, les aiguilles revinrent instantanément à l'état naturel. A l'intensité près, qui est très-faible, ces effets sont identiques à ceux que montrent les corps conducteurs.

Cependant, si l'on réfléchit à la difficulté et à la lenteur avec lesquelles l'électricité se déplace à travers les corps isolants, on sera convaincu que, malgré l'identité apparente des effets, la distribution électrique réelle ne peut être la même dans les deux cas, c'est-à-dire que les deux électricités contraires ne peuvent instantanément se transporter aux deux bouts des aiguilles isolantes, s'y maintenir séparées par une ligne moyenne tant que dure l'influence, et se réunir aussitôt qu'elle cesse. Il faut donc chercher une autre explication.

POLARISATION. — Pour la trouver, considérons le cas hypothétique où l'on aurait une suite de conducteurs très-petits et très-voisins A, B, C, D (*fig.* 38). A l'instant où nous placerons

Fig. 38.



en avant de A un corps électrisé, par exemple négativement, les fluides neutres se décomposeront tout le long de la file, chaque extrémité antérieure se chargera positivement et chaque bout postérieur négativement; et comme les fluides de noms contraires qui sont opposés entre eux dans les intervalles de deux conducteurs voisins exercent des actions inverses, l'effet total de la série de corps sera sensiblement réduit à celui des électricités positives et négatives qui se trouvent aux bouts A et C. On conçoit maintenant que, si chaque molécule d'un

corps isolant se conduit comme chacun des conducteurs A, B, C, ..., l'effet observé par Matteucci s'explique naturellement, sans qu'il soit nécessaire de recourir à une transmission instantanée des fluides dans les aiguilles. On admet qu'il en est ainsi, et, les molécules des corps prenant deux pôles électriques, on dit qu'elles sont *polarisées*.

L'hypothèse de la polarisation des molécules des isolants paraît avoir été émise pour la première fois par Avogadro (¹); elle a été reprise plus tard par Belli (²) et par Faraday (³), qui en ont développé d'importantes conséquences. Nous signalerons en particulier l'expérience suivante de Faraday, qui met bien en évidence la nature de cette polarisation. Il plaça dans l'essence de térébenthine de petits filaments de soie, et, faisant ensuite plonger dans le liquide deux conducteurs opposés, il chargea l'un d'eux et mit l'autre en rapport avec le sol. A l'instant même il vit les parcelles de soie se dresser contre les conducteurs et former des chaînes continues en s'attirant vivement par leurs extrémités opposées; on pouvait essayer de rompre ces chaînes à l'aide d'un bâton de verre que l'on plongeait dans le liquide; elles se déformaient d'une manière continue comme des fils élastiques et revenaient, aussitôt qu'on retirait la baguette, à leur disposition primitive. Chacun de ces fils de soie était évidemment dans des conditions analogues aux aiguilles de gomme laque de Matteucci : polarisé sous l'influence des conducteurs, il attirait par son pôle positif le pôle négatif d'un autre brin et inversement, et les chaînes formées entre les deux conducteurs indiquaient par leur direction en chaque point celle de la force électrique résultante.

Il convient d'insister, en particulier, sur des expériences récentes de M. Felici (⁴), qui, réalisées sur des isolants quelconques, ont été faites dans des conditions où l'on est complétement à l'abri de l'effet perturbateur de la pénétration des charges.

M. Felici emploie une boule conductrice électrisée C

(¹) Avogadro, *Journal de Physique* de de la Métherie, t. LXIII et LXV.

(²) Belli, *Cours de Physique*, t. III, 1838.

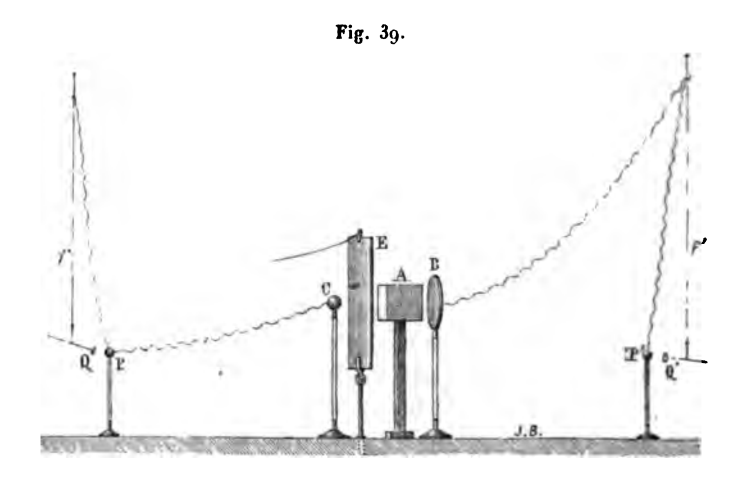
(³) Faraday, *Physical researches*.

(⁴) Felici, *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. III, p. 329; 1874.

(*fig.* 39), dont on mesure la charge à l'aide d'une balance de torsion représentée schématiquement en PQ, et un disque B, isolé et primitivement à l'état neutre, qui communique à la balance de torsion P'Q'.

La boule et le disque sont séparés par un écran métallique E en communication avec le sol, et la balance P'Q' est au zéro [1]. On abaisse l'écran, l'influence se produit, et l'on observe l'impulsion de l'aiguille de la balance P'Q', proportionnelle à la

Fig. 39.



charge induite sur le disque B. On rétablit l'écran, puis entre l'écran et le disque on dispose un cube A parfaitement neutre d'une substance isolante, ce qui ne produit aucun déplacement de l'aiguille de la balance P'Q'; enfin on abaisse brusquement l'écran E, et l'on mesure le nouvel arc d'impulsion. On trouve qu'il est toujours plus considérable que le premier : or cela doit être si le cube se polarise et joue ainsi le rôle d'un conducteur interposé entre C et B.

Dès qu'on rétablit une seconde fois l'écran, l'aiguille de la balance P'Q' revient au zéro. La polarisation se détruit donc aussitôt que cesse l'influence, et l'effet observé appartient en-

(1) *Voir* p. 145.

si l'on vient à rapprocher le plateau A du plateau B à l'aide de la vis micrométrique V, ou, ce qui revient au même, si l'on interpose entre A et B une lame isolante K, l'équilibre est rompu et l'électromètre dévie.

Pour déterminer le pouvoir inducteur spécifique d'une lame d'épaisseur connue e, il suffit de déterminer de quelle quantité l il faut faire reculer la vis V pour ramener au zéro l'électromètre, quand il a été dévié par l'introduction de la lame isolante. En désignant par K le pouvoir inducteur spécifique, on a $\frac{e}{K} = l$, d'où l'on tire K.

Pour réduire au minimum la durée de la charge, M. Gordon a eu l'idée de prendre comme sources i et i' les deux pôles d'une bobine d'induction dont les tensions changent de signe un très grand nombre de fois par seconde ([1]). Le sens de la déviation de l'aiguille de l'électromètre ne dépend pas du sens de la charge du système ACF; par suite, on observera toujours une déviation tant que la compensation ne sera pas rigoureuse, et la pénétration des charges à travers l'isolant sera absolument évitée, puisqu'on peut réduire la durée qui sépare deux inversions à $\frac{1}{20000}$ de seconde.

Le Tableau suivant résume les résultats des principales expériences à courte durée :

([1]) Dans la *fig.* 48, M représente un commutateur qui permet de renverser toutes les communications pour vérifier les mesures. Les signes marqués sur la figure supposant le commutateur tourné de telle sorte que A et F communiquent avec i' et C avec i.

sera grande par rapport aux dimensions de celui-ci se réduira sensiblement à celle de deux quantités équivalentes $+m$ et $-m$ d'électricités contraires concentrées en deux points p et n dont la distance d sera inférieure au plus grand diamètre de pn. Cette action est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au produit md que nous appellerons le *moment électrique* du corpuscule ([1]).

Nous admettrons que la direction pn du moment électrique coïncide avec celle de la force F qui le produit et que la grandeur md de ce moment est proportionnelle à F. Si les corpuscules conducteurs possèdent des formes et des orientations variables, le moment md variera d'un corpuscule à un autre; mais, dans le plus petit volume accessible à l'expérience, la somme de tous les moments ne s'écartera pas sensiblement d'une certaine valeur moyenne, la même que si tous les corpuscules étaient des sphères d'un diamètre convenable et également espacées.

Pour déterminer le moment électrique moyen d'un élément de volume du corps isolant, il faut d'abord fixer la valeur de la force moyenne F qui règne à l'intérieur de l'un des corpuscules. Elle provient : 1° des masses électriques extérieures à l'isolant; 2° des masses électriques libres à la surface de tous les corpuscules, à l'exception de celui que l'on considère.

Pour évaluer cette force, on peut substituer au corps isolant discontinu C, que nous considérons, un isolant fictif C', dont les moments électriques seraient distribués d'une manière continue dans toute la masse, mais à la condition essentielle de

---

([1]) Désignons par r la longueur OC, par α l'angle OCn : la force exercée par le corpuscule considéré sur l'unité d'électricité placée en O est, en grandeur (*fig.* 40),

$$\frac{m}{r^2+\frac{d^2}{4}-rd\cos\alpha}-\frac{m}{r^2+\frac{d^2}{4}+rd\cos\alpha}=\frac{2mrd\cos\alpha}{\left(r^2+\frac{d^2}{4}\right)^2-r^2d^2\cos^2\alpha};$$

d étant supposé très-petit par rapport à r, cette expression se réduit sensiblement à

$$\frac{2md\cos\alpha}{r^3}.$$

pratiquer autour du point P, où l'on veut évaluer la force F, une cavité équivalente au volume du corpuscule. Nous assignerons arbitrairement à cette cavité la forme d'une sphère, comme étant la forme moyenne que doivent posséder ces cavités dans une substance isotrope; l'analyse conduit alors à ce théorème curieux que l'action de l'isolant au point considéré est indépendante du rayon attribué à la sphère, c'est-à-dire à la dimension absolue des corpuscules. On démontre que, g désignant la fraction du volume de l'isolant rempli par ceux-ci, les moments *md* sont proportionnels au facteur $E = \frac{3g}{4\pi(1-g)}$, et que l'on a entre le potentiel U, dont les dérivées donnent les composantes de la force F, et le potentiel V des masses électriques *extérieures* la relation

$$\Delta U = -\frac{4\pi E}{1+4\pi E}\Delta V.$$

Il résulte de là que, si les masses électriques d'où provient le potentiel V sont toutes extérieures à l'isolant, c'est-à-dire si en tout point intérieur $\rho = 0$, d'où $\Delta V = 0$, on a également $\Delta U = 0$. Par suite, la distribution continue des moments électriques que nous avons imaginée est telle, qu'il n'y a d'électricité libre qu'à la surface de l'isolant.

D'après cette théorie, l'effet extérieur d'un isolant soumis à l'influence sera de tous points analogue à celui d'un conducteur convenablement choisi. En particulier, considérons l'influence exercée sur un isolant creux très-mince, qui, suivant M. Felici, ne modifie pas sensiblement l'état du champ électrique où on le place. Les faces opposées de cet isolant portent des distributions égales d'électricités inverses, dont l'effet extérieur doit en effet tendre vers zéro avec la distance qui les sépare.

APPLICATION AUX CONDENSATEURS. — POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE. — Soit un condensateur fermé dont les deux armatures sont séparées par une lame isolante autre que l'air. Cette lame joue un rôle analogue à celui d'un conducteur interposé entre les armatures, mais sans les toucher; il en résulte que la diffé-

rence de potentiel correspondant à une charge donnée de l'armature interne du condensateur sera plus faible, la charge correspondant à une différence de potentiel donnée des deux armatures, plus forte que dans un condensateur à lame d'air de même épaisseur.

M. Clausius (¹) a soumis au calcul : 1° le cas d'un condensateur à plateau circulaire; 2° le cas plus général d'un condensateur dont les armatures parallèles sont partout à une distance très-petite par rapport à leurs dimensions. Il démontre que la charge M de l'une des armatures du condensateur a pour expression

$$M = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{e}(1 + 4\pi E)(V - V'),$$

dans laquelle S représente la surface de l'armature, e l'épaisseur de la lame isolante, V et V′ les potentiels des sources électriques avec lesquelles les armatures du condensateur sont en relation. Cette expression ne diffère de celle qui a été établie (p. 161) pour la charge des armatures du condensateur à lame d'air que par l'introduction du facteur $1 + 4\pi E$. Nous poserons

$$1 + 4\pi E = K,$$

et nous désignerons le coefficient K sous le nom de *pouvoir inducteur spécifique*. C'est le rapport de la charge de l'une des armatures du condensateur à celle d'un condensateur à lame d'air de même épaisseur. Le pouvoir inducteur spécifique de l'air est, par définition, égal à 1.

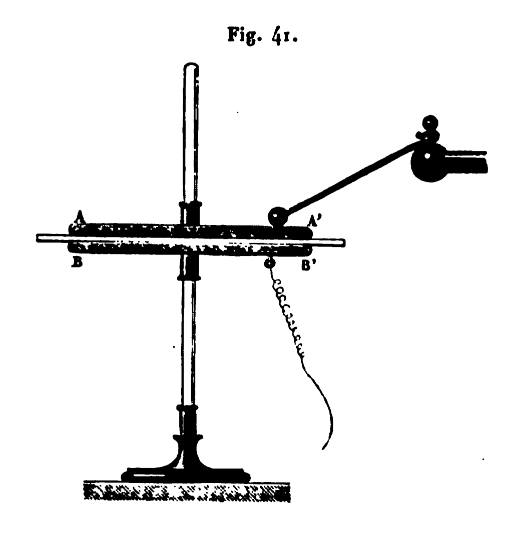
Nous voilà donc en possession d'une théorie mathématique qui non seulement fournit une interprétation satisfaisante des phénomènes précédemment décrits, mais qui nous en fait encore prévoir de nouveaux, dont elle nous indique d'avance les lois. Il faut la soumettre au contrôle de l'expérience, et pour cela nous devons comparer la charge que prend un même condensateur quand on y remplace la lame d'air séparant les armatures par une autre lame isolante de même épaisseur. Avant de procéder à cette mesure, nous ne pouvons nous dis-

(¹) Clausius, *Die mecanische Behandlung der Electricität.*

penser d'étudier expérimentalement les diverses particularités qui caractérisent les condensateurs à lame de verre. Ce n'est que par une analyse attentive de ces phénomènes que nous parviendrons à éliminer les principales causes d'erreur dont pourraient être affectées les mesures difficiles qu'il s'agit d'entreprendre.

RÔLE DE LA LAME ISOLANTE DANS LES CONDENSATEURS. — EFFET DE LA POLARISATION ET DE LA PÉNÉTRATION. — L'importance du rôle de la lame isolante du condensateur n'avait pas échappé aux anciens expérimentateurs. Elle se manifeste, en particulier, quand on opère de la manière suivante.

Fig. 41.



Plaçons un plateau métallique BB' horizontalement et en communication avec le sol (*fig.* 41); déposons sur lui une lame de verre bien sèche, et superposons à ces deux objets un deuxième plateau conducteur AA' muni d'un manche isolant et que nous réunirons avec la machine électrique : nous aurons ainsi disposé un condensateur à lame de verre, et, si l'on vient à réunir B' avec A' par un arc conducteur, il se produira une étincelle très-bruyante avec des effets de décharge énergiques. Mais, au lieu de décharger le condensateur, éloignons

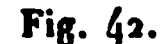
d'abord la source électrique et séparons le plateau B' d'avec le sol; ensuite nous enlèverons le plateau A' par son manche isolant, et enfin le verre en le tenant par ses bords. Si nous ne tenions pas compte de l'influence exercée sur la lame isolante, il semblerait que les deux plateaux doivent retenir tous deux les électricités dont ils sont pourvus et qu'elles doivent seulement se distribuer librement sur leurs surfaces quand on les éloigne; cependant l'expérience prouve que les plateaux ne conservent que des quantités d'électricité à peine appréciables. Mais si l'on remet, après avoir déchargé ces conducteurs, le verre sur BB', et AA' sur le verre, et qu'on réunisse ensuite BB' et AA' par un arc métallique, on obtiendra une décharge presque aussi vive que si l'on n'avait pas d'abord séparé les appareils. Il faut donc admettre que les charges des armatures avaient quitté les plateaux pour se disposer sur le verre.

Une contre-épreuve de cette expérience est facile à faire : on n'a qu'à enlever le verre, à placer les deux mains sur ses deux surfaces, et les deux électricités réunies par l'intermédiaire des bras font éprouver une forte commotion. Si au contraire l'expérimentateur ne touche les deux surfaces de ce verre que par les extrémités des doigts, il n'éprouve qu'un effet très-léger; mais, en promenant les doigts sur les deux surfaces, il sent de petites étincelles successives et décharge successivement chacune des parties qu'il touche l'une après l'autre. Le rôle des conducteurs AA' et BB' devient dès lors évident : ils amènent les électricités opposées sur les deux surfaces du verre et les y laissent, puis ils les ramènent quand on décharge l'appareil.

Au lieu de prendre, comme dans l'épreuve précédente, un carreau de verre plan, on se sert parfois d'un bocal M (*fig.* 42) qui n'est autre qu'un grand verre à bière. On plonge dans l'intérieur un cylindre de fer-blanc A qui remplit le verre, et l'on fait entrer celui-ci dans un bocal B également en fer-blanc. A et B sont donc les deux armatures du condensateur. Quand l'appareil est chargé, on le dépose sur une surface isolante; puis, enlevant d'abord A avec un crochet de verre, ensuite le bocal M, on ne trouve que très-peu d'électricité sur les armatures métalliques,

tandis qu'en saisissant l'extérieur du verre avec une main et plongeant l'autre dans son intérieur, on entend une série d'étincelles et on reçoit une série de commotions.

Franklin, à qui l'on doit cette disposition, faisait l'expérience d'une manière encore plus frappante : il versait dans le vase M ou dans un flacon qui le remplaçait une certaine quantité d'eau; cette eau formait l'armure intérieure A, et il plongeait le tout dans un baquet contenant encore de l'eau qui constituait


Fig. 42.



le conducteur extérieur B. Quand l'appareil avait été chargé à la manière ordinaire, il l'enlevait, vidait le liquide intérieur et replaçait le flacon dans les mêmes conditions en remettant à l'intérieur et à l'extérieur de l'eau nouvelle qui n'avait point été électrisée; la charge de l'appareil n'avait pas sensiblement diminué.

La polarisation de l'isolant suffit à rendre compte de ce qui précède. Les électricités amenées par les armatures sont maintenues à la surface de la lame isolante par l'effet de la polarisation de celle-ci et la maintiennent à leur tour; mais, si cette polarisation est seule en jeu, elle disparaîtra dès qu'on aura replacé les armatures et qu'on les réunira l'une à l'autre de manière à annuler les charges extérieures à l'isolant.

Toutefois, dans la réalité, l'expérience est plus complexe que nous ne l'avons indiqué jusqu'ici. Les isolants n'opposent pas un obstacle absolu au mouvement de l'électricité, et les charges en regard sur les deux armatures cheminent lentement à travers la lame de verre du condensateur. Cela résulte des ex-

périences que nous avons déjà citées et de la suivante, due à Faraday [1]. On forme un condensateur avec une plaque de gomme laque comprise entre deux armatures métalliques mobiles; on le charge et on le maintient chargé pendant longtemps. Ensuite on réunit les armatures par un arc métallique qui les ramène à l'état naturel; on les enlève rapidement et on examine le plateau de gomme laque. On trouve d'abord, par un pendule qu'on approche du plateau, qu'il ne manifeste pas de signes électriques sensibles; mais peu à peu ses deux faces accusent chacune l'électricité du plateau qui les touchait pendant que l'appareil était chargé. Cela ne peut s'expliquer qu'en admettant une pénétration lente de l'électricité de l'extérieur à l'intérieur de la gomme laque pendant la première phase de l'expérience et un retour de cette même électricité vers la surface pendant la seconde : c'est ce que de précédentes expériences de Matteucci avaient déjà démontré.

C'est en admettant cette conductibilité lente des corps isolants que l'on peut rendre raison d'un phénomène connu depuis bien longtemps. On a remarqué que, si l'on décharge un condensateur de grande dimension en touchant ses armatures avec un arc métallique, il conserve un résidu électrique qui devient sensible quelque temps après et que l'on peut enlever par un deuxième contact. Après cela, on retrouve un deuxième résidu et il y en a d'autres encore, mais qui cessent bientôt d'être appréciables, parce qu'ils décroissent rapidement.

Ces phénomènes n'ont rien qui doive nous surprendre; mais dans toutes les mesures qui vont suivre nous devons nous tenir en garde contre l'effet de la pénétration. Il convient pour cela de diminuer autant que possible la grandeur des différences de potentiel employées et surtout la durée des expériences.

---

(1) FARADAY, *Experimental researches*, t. I, p. 390.

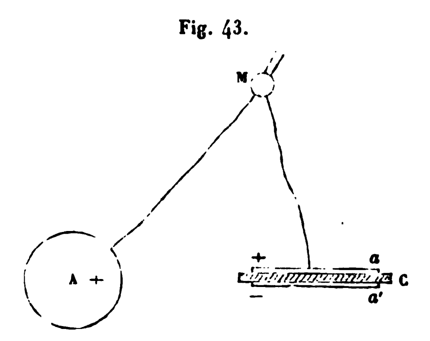
MESURE DES POUVOIRS INDUCTEURS SPÉCIFIQUES.

Expériences de Cavendish [1]. — Il reste à constater expérimentalement l'accroissement de capacité d'un condensateur quand on y remplace la lame d'air par une autre substance isolante. Cette constatation est déjà très-ancienne; elle a même précédé toutes les autres expériences sur les propriétés des isolants, puisqu'elle remonte à Cavendish. Cet illustre physicien compara les charges que prenaient à une même source des condensateurs de même dimension, munis de lames isolantes de diverses natures. Mais ses expériences, réalisées de 1771 à 1781, n'avaient pas été publiées, et plus tard Belli et Faraday découvraient de nouveau et indépendamment l'un de l'autre l'existence du *pouvoir inducteur spécifique*. Ce nom lui-même est dû à Faraday.

Bien que les expériences de Cavendish ne paraissent pas avoir donné des résultats extrêmement précis, nous rapporterons la méthode qu'il employait, car elle est théoriquement irréprochable.

Cavendish se procura d'abord un condensateur de capacité égale à celle d'une sphère isolée, de 12 $\frac{1}{2}$ pouces de diamètre,

Fig. 43.

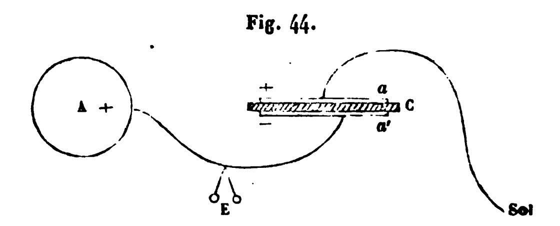


suspendue au milieu de son laboratoire. A cet effet, la sphère A et un condensateur à plateaux C, très éloigné de la sphère,

[1] *The electrical researches of the hon. Henry Cavendish, F. R. S.*, écrites entre 1771 et 1781, et publiées par Clerk Maxwell, en 1879, à Cambridge.

étaient chargés simultanément par une machine électrique M (*fig.* 43). La communication était ensuite interrompue (*fig.* 44); l'armature *a* du condensateur était mise au sol, et son armature *a'* réunie à la sphère par un fil métallique communiquant à un électromètre E. Si le condensateur et la sphère ont des capacités égales, l'appareil se trouvera complétement déchargé; si ces capacités sont inégales, le signe de l'électrisation de l'électromètre indiquera quelle est la capacité la plus grande, et, en modifiant rationnellement la surface du condensateur jusqu'à ce que l'électromètre reste au zéro, on arrivera à réaliser une égalité parfaite entre les deux capacités.

Fig. 44.

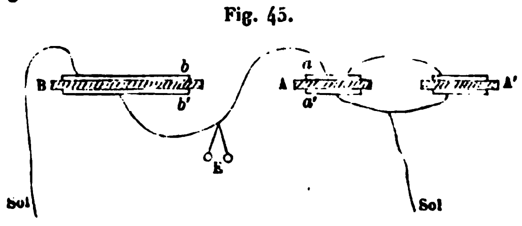


Par l'application répétée de cette méthode, on pourra se procurer deux condensateurs A, A' possédant chacun une capacité égale à celle de la sphère, puis, à l'aide de A et de A', un troisième condensateur B de capacité double. A cet effet, on réunira A et A' par leurs armatures de même nom; on chargera en même temps que B, et à la même machine, le condensateur A + A' ainsi formé; puis on mettra au sol les armatures de noms contraires *b* et *a'* des deux condensateurs, et l'on réunira *b'* et *a* à l'électromètre E par un long fil conducteur. Quand l'électromètre restera au zéro, la capacité de B sera égale à celle du condensateur A + A'.

Par une suite d'opérations analogues, Cavendish s'était procuré une série de condensateurs avec lesquels il pouvait réaliser une capacité quelconque comprise entre une et soixante-six fois la capacité de la sphère A. Il pouvait ensuite, grâce à une disposition analogue à celle de la *fig.* 45, évaluer la capacité d'un condensateur inconnu, à l'aide de l'unité de capacité qu'il avait choisie. Les appareils de Cavendish étaient impar-

faits, mais sa méthode est identique à celle que l'on emploie aujourd'hui pour la mesure des capacités à l'aide d'étalons de capacité réunis dans des boîtes dont nous indiquerons plus tard l'usage.

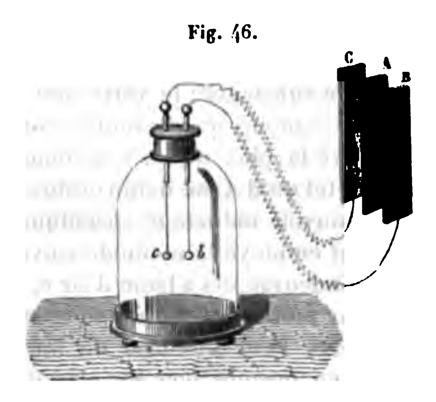
Fig. 45.



En comparant deux condensateurs égaux, l'un à lame d'air, l'autre dont la lame isolante était d'espèce quelconque, Cavendish mesura ce qu'il appelait la *capacité des isolants* et ce que nous appelons aujourd'hui leur *pouvoir inducteur spécifique*. Les nombres qu'il indique sont en général trop grands, parce que la durée des expériences n'était pas assez courte et permettait aux charges de pénétrer plus ou moins profondément à l'intérieur des lames isolantes.

EXPÉRIENCES DE FARADAY. — Avant de mesurer le pouvoir inducteur spécifique, Faraday mit son existence hors de doute

Fig. 46.



par une expérience qui est susceptible de se transformer en un procédé de mesure. On forme un condensateur double avec trois plateaux A, B, C isolés et séparés par de l'air (*fig.* 46); on

charge A par la machine, et l'on met B et C en communication avec le sol. Ensuite on isole ces derniers plateaux et on les réunit à un électromètre formé de deux lames d'or ou de deux petites balles de sureau doré *b* et *c* voisines et isolées l'une de l'autre; à ce moment elles sont à l'état neutre, puisque les électricités négatives sont condensées aux faces antérieures de B et de C, et que les positives ont été chassées dans le sol. Mais si l'on vient à approcher B de A, l'influence augmente, une nouvelle masse de fluide — s'accumule en B; mais aussi une partie équivalente d'électricité + se transmet à la lame *b* de l'électromètre. En même temps que cette nouvelle charge se condense sur B, elle réagit plus énergiquement sur A et décharge d'autant la face opposée au plateau C. Alors l'induction diminue sur C, qui abandonne et laisse écouler du fluide négatif jusqu'à la lame *c*. Il suit de là que les deux lames *b* et *c* vont s'approcher, et en général on pourra reconnaître par leur mouvement et par la nature de l'électricité que prend chacune d'elles les variations d'intensité du pouvoir inducteur de A sur les plateaux B et C. Cela posé, l'appareil étant ramené à sa situation première et l'électromètre étant à l'état neutre, introduisons une lame de verre entre A et B : nous verrons se produire le phénomène que nous venons de décrire et dans le même sens, absolument comme si la lame B avait été approchée de A. Le même effet a lieu quand on remplace le verre par d'autres lames isolantes, et il n'est pas le même pour chaque substance; le verre agit moins que la gomme laque et celle-ci moins que le soufre. Nous reconnaissons là, de la manière la plus nette, l'existence du pouvoir inducteur spécifique, tel qu'il a été défini ci-dessus.

Pour mesurer le pouvoir inducteur spécifique, Faraday [1] et plus tard Harris ont employé la méthode suivante.

On dispose deux condensateurs à lame d'air *c*, *c'* égaux entre eux, c'est-à-dire ayant même forme, même étendue et même distance des armatures. Pour s'assurer de leur identité, on charge l'un d'eux et on mesure avec un plan d'épreuve dans la balance de Coulomb l'épaisseur électrique en un point de

[1] *Experimental Researches*, t. I, p. 360.

l'armature qui a touché la machine; supposons qu'elle soit a. Ensuite on fait toucher le condensateur chargé par celui qui ne l'est pas, et chacun doit avoir une charge commune et égale à $\frac{a}{2}$. Quand on a réussi à réalisèr cette condition, on coule entre les lames de l'un des condensateurs, c par exemple, la substance que l'on veut essayer (soit de la gomme laque), et on maintient l'air pour former la lame isolante de c'. On charge ce dernier, on le fait toucher par c, et l'épaisseur électrique se réduit de a à une valeur a', en général plus petite que $\frac{a}{2}$; le rapport des capacités des deux condensateurs est $\frac{a-a'}{a'}$. C'est la valeur du pouvoir inducteur spécifique.

Faraday employait un condensateur sphérique (*fig.* 47) dont l'armature extérieure A était formée de deux calottes; l'une d'elles, munie d'un robinet R, permettait de faire le vide dans l'appareil, tandis que l'autre portait une tubulure par laquelle on introduisait une tige conductrice isolée terminée à son extrémité par le bouton b et soutenant l'armature intérieure B. Faraday coulait entre les deux armatures de l'un de ses condensateurs une couche de matière isolante occupant seulement l'hémisphère inférieur; cette disposition n'introduit pas de difficulté particulière; l'effet de l'isolant se trouve réduit dans un rapport constant, approximativement égal à $\frac{1}{2}$.

Fig. 47.



Faraday trouva pour tous les gaz un même pouvoir spécifique égal à 1; quant aux solides, ils lui donnèrent des nombres plus grands que l'unité. Des expériences analogues furent réalisées par Harris avec des condensateurs à plateaux. Voici les résultats obtenus par ces deux physiciens :

Faraday.		Harris.	
Air	1,00	Air	1,00
Spermaceti	1,45	Résine	1,77
Verre	1,76	Poix	1,80
Gomme laque	2,00	Cire	1,86
Soufre	2,24	Verre	1,90
		Gomme laque	1,95

Il faut se garder d'attribuer à ces nombres une valeur absolue, car ils se modifient avec la durée des expériences, par suite de la pénétration plus ou moins profonde des charges. M. Gaugain (1), qui a fait à cet égard de très nombreuses expériences, a montré, comme on devait s'y attendre, que la capacité apparente du plateau collecteur augmente beaucoup quand on fait croître la durée de charge, et toutes les expériences ultérieures ont conduit aux mêmes conclusions.

Mesures récentes des pouvoirs inducteurs spécifiques. — La seule quantité à laquelle on puisse attribuer un sens précis, le pouvoir inducteur spécifique proprement dit, résultant de la seule polarisation de l'isolant, est la limite vers laquelle tend le pouvoir inducteur spécifique apparent quand on fait tendre vers zéro la durée de la charge. Ne pouvant entrer ici dans le détail de toutes les méthodes qui ont été employées, nous nous bornerons à indiquer celles qui ne donnent prise à aucune objection grave.

M. Boltzmann (2) compare la capacité du condensateur qu'il étudie à celle d'un électromètre très précis. Il charge d'abord l'électromètre à l'aide de 18 éléments Daniell et note son indication a; il charge ensuite le condensateur, le sépare de la source et le met en communication avec l'électromètre préalablement déchargé. Soient a' la nouvelle indication, E et C les

(1) Gaugain, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIV, p. 174, et 4e série, t. II, p. 264.

(2) Boltzmann, *Carl's Repertorium*, t. X, p. 109; *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LVII.

capacités de l'électromètre et du condensateur; on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{E + C}{C},$$

$$\frac{E}{C} = \frac{a - a'}{a'}.$$

Chacune des opérations n'exige qu'un temps extrêmement court.

M. Boltzmann employait des condensateurs à plateaux et à lame d'air. Une lame de matière isolante d'épaisseur e, inférieure à la distance d des plateaux, pouvait être interposée pendant la charge. Soit K le pouvoir inducteur spécifique de la lame; elle équivaut à une lame d'air d'épaisseur $\frac{e}{K}$, et par suite la distance réduite des deux plateaux est $d - e + \frac{e}{K}$. Or la capacité d'un condensateur à lame d'air dont les plateaux sont très larges est en raison inverse de leur distance. Le rapport $\frac{C'}{C}$ de la capacité C′ du condensateur avec la lame à la capacité C sans la lame a donc pour valeur

$$\frac{C'}{C} = \frac{d}{d - e + \frac{e}{K}},$$

d'où l'on déduit K quand on connaît d et e.

Dans ces expériences la durée de la charge pouvait être réduite à $\frac{1}{120}$ de seconde. On a trouvé que le pouvoir inducteur spécifique apparent est indépendant de la durée de la charge (toujours supposée très-faible) pour les substances parfaitement isolantes, comme la paraffine, le soufre, la résine et l'ébonite; mais il n'en est pas de même pour le verre, la gutta-percha, la stéarine, etc.

M. Boltzmann [1] a contrôlé le résultat de ces premières recherches par une seconde méthode, fondée sur le calcul de l'attraction de deux petites sphères, l'une conductrice, l'autre

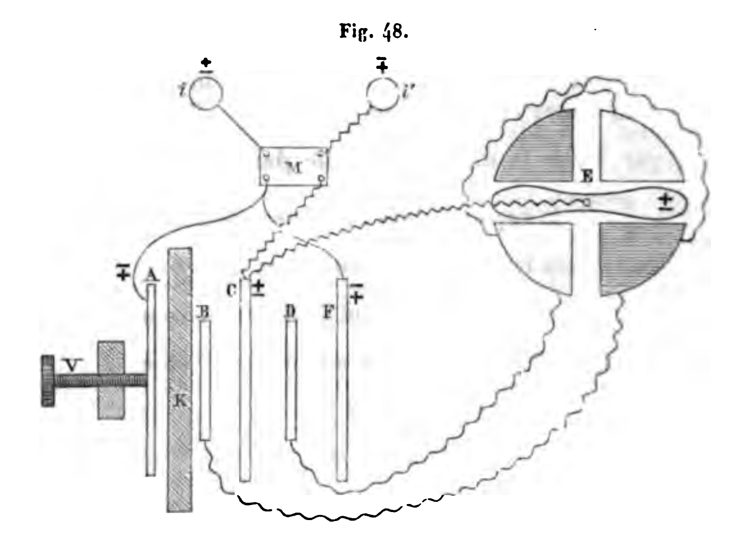
---

[1] BOLTZMANN, *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXVIII, 2ᵉ Partie, p. 81.

isolante : cette attraction dépend évidemment du pouvoir inducteur spécifique; elle est d'ailleurs susceptible de mesure rapide et peut, par conséquent, fournir de bonnes valeurs de la quantité qu'il s'agit de déterminer. Les résultats de cette seconde méthode sont très sensiblement d'accord avec ceux que M. Boltzmann a obtenus à l'aide de la première.

M. Gordon [1] a mis en œuvre un procédé imaginé par Sir W. Thomson et qui rappelle l'expérience de Faraday signalée ci-dessus (p. 187). Un condensateur ABCDF (*fig.* 48)

Fig. 48.



est formé de cinq plaques équidistantes, dont trois grandes et deux plus petites. Imaginons que la plaque moyenne C soit mise en relation avec une source d'électricité positive *i*, les plaques A et F avec une source d'électricité négative *i'*, enfin B et D avec les deux paires de secteurs d'un électromètre de Thomson E dont l'aiguille communique avec C. Par raison de symétrie, l'électromètre ne doit donner aucune déviation; mais

(1) *Philosophical transactions*, 1879, p. 417. On consultera avec profit, au sujet de ces expériences et en général au sujet de la mesure du pouvoir inducteur spécifique, le *Traité expérimental d'Électricité et de Magnétisme* de M. Gordon, traduit par M. Raynaud. 2 vol. in-8; Paris, 1881.

si l'on vient à rapprocher le plateau A du plateau B à l'aide de la vis micrométrique V, ou, ce qui revient au même, si l'on interpose entre A et B une lame isolante K, l'équilibre est rompu et l'électromètre dévie.

Pour déterminer le pouvoir inducteur spécifique d'une lame d'épaisseur connue e, il suffit de déterminer de quelle quantité l il faut faire reculer la vis V pour ramener au zéro l'électromètre, quand il a été dévié par l'introduction de la lame isolante. En désignant par K le pouvoir inducteur spécifique, on a $\frac{e}{K} = l$, d'où l'on tire K.

Pour réduire au minimum la durée de la charge, M. Gordon a eu l'idée de prendre comme sources i et i' les deux pôles d'une bobine d'induction dont les tensions changent de signe un très grand nombre de fois par seconde (¹). Le sens de la déviation de l'aiguille de l'électromètre ne dépend pas du sens de la charge du système ACF; par suite, on observera toujours une déviation tant que la compensation ne sera pas rigoureuse, et la pénétration des charges à travers l'isolant sera absolument évitée, puisqu'on peut réduire la durée qui sépare deux inversions à $\frac{1}{20000}$ de seconde.

Le Tableau suivant résume les résultats des principales expériences à courte durée :

(¹) Dans la *fig.* 48, M représente un commutateur qui permet de renverser toutes les communications pour vérifier les mesures. Les signes marqués sur la figure supposant le commutateur tourné de telle sorte que A et F communiquent avec i' et C avec i.

SUBSTANCE.	POUVOIR spécifique.	NOMS de l'expérimentateur.	MOYENNES.
Verre	3,343	Gordon.	3,343
Paraffine	1,977	Gibson et Barclay (¹).	2,062
	2,32	Boltzmann.	
	1,96	Wüllner (²).	
	1,9936	Gordon.	
Soufre	2,24	Faraday.	2,927
	3,87	Boltzmann.	
	2,83 à 3,21	Wüllner.	
	2,58	Gordon.	
Gomme laque	2,00	Faraday.	2,693
	2,95 à 3,73	Wüllner.	
	2,74	Gordon.	
Résine	2,515	Boltzmann.	2,515
Ébonite	3,315	Boltzmann.	2,703
	2,51	Wüllner.	
	2,284	Gordon.	
Gomme élastique noire	2,22	Gordon.	2,22
Gomme élastique vulcanisée	2,497	Gordon.	2,497
Gutta-percha	2,462	Gordon.	2,462
Composé de Chatterton	2,547	Gordon.	2,547

On remarquera que les nombres fournis par divers expérimentateurs diffèrent en général beaucoup, ce qu'il faut certainement attribuer moins à l'imperfection des méthodes qu'à la variabilité du pouvoir inducteur spécifique. Les corps qui isolent le mieux sont souvent très-mal définis au point de vue chimique, soit que, comme le soufre, ils se présentent sous un grand nombre d'états allotropiques toujours plus ou moins mêlés dans les échantillons que l'on étudie, soit que, comme la gutta-percha ou l'ébonite, ils aient été soumis à une préparation chimique et mécanique variable d'un échantillon à un autre.

On possède peu de mesures du pouvoir inducteur spéci-

(¹) *Philosophical transactions*, 1871, p. 573.

(²) *Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Ak.*, 1877, p. 1.

procher à volonté, de manière à modifier la sensibilité de l'instrument. Un microscope L à échelle divisée permet de reconnaître et de comparer entre elles les plus petites déviations de la feuille; un commutateur sert à intervertir à volonté les communications de la pile et par suite le sens de la déviation : on obtient ainsi une très-bonne mesure par un couple d'observations.

Pour graduer l'électromètre de Hankel, on charge la feuille d'or par le pôle positif d'une pile constante dont on fait varier le nombre d'éléments (1) et dont le pôle négatif est au sol. On constate que, dans des limites assez étendues, la déviation de la feuille d'or est proportionnelle à son potentiel; au delà, les déviations croissent plus rapidement. Un potentiel égal à la millième partie de celui du pôle positif d'un élément Daniell dont le pôle négatif est au sol suffit à produire une déviation appréciable de la feuille.

M. Righi (2) a adapté à l'électroscope à piles sèches une disposition analogue à celle de l'électromètre de Hankel.

Méthodes électrométriques de Coulomb. — Coulomb a employé deux méthodes de mesures électrométriques que nous avons décrites précédemment, la méthode de la balance et celle des oscillations. L'une et l'autre pourraient être employées à la mesure absolue des potentiels.

1° *Balance de Coulomb*. — Pour mesurer au moyen de la balance le potentiel V d'une source constante d'électricité, on commencera par déterminer en milligrammes la force qu'il faut appliquer à l'extrémité du levier mobile de la balance pour tordre le fil d'un certain angle. On remplacera le disque de clinquant par une boule égale à la boule fixe, puis on chargera séparément les deux boules en les mettant en relation avec la source : elles prendront des charges m égales. Il faut que leur distance d soit assez grande, par rapport à leur rayon r, pour

(1) Nous verrons plus tard (t. IV) comment on peut disposer l'appareil pour produire, à l'aide d'un élément Daniell par exemple, des potentiels de la feuille d'or aussi faibles que l'on voudra.

(2) Righi, *Journal de Physique*, t. IV, p. 275; 1875.

ou sensiblement

$$\frac{D}{D_1} = 1 + \frac{\alpha}{300\beta}.$$

On vérifie par des expériences de ce genre que l'excès du pouvoir inducteur spécifique d'un même gaz sur l'unité est proportionnel à la pression, c'est-à-dire à la densité du gaz, et l'on calcule ensuite sans peine la valeur du pouvoir inducteur spécifique rapporté à la pression normale. M. Boltzmann a trouvé ainsi les valeurs consignées dans le Tableau suivant; nous y joignons celles que MM. Ayrton et Perry (¹) ont obtenues par une méthode différente, pour laquelle nous renverrons le lecteur aux sources originales :

NATURE DU GAZ.	POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE (le pouvoir inducteur spécifique de l'air est pris pour unité)	
	d'après M. Boltzmann	d'après MM. Ayrton et Perry.
Acide carbonique	1,000356	1,0008
Hydrogène	0,999674	0,9998
Oxyde de carbone	1,000100	»
Protoxyde d'azote	1,000394	»
Bicarbure d'hydrogène	1,000722	»
Protocarbure d'hydrogène	1,000354	»
Gaz d'éclairage	»	1,0004
Acide sulfureux	»	1,0037
Vide	0,999410	0,9985

Ces nombres sont très peu différents de l'unité; mais on remarquera que la densité normale de l'air est 773 fois plus faible que celle de l'eau. Imaginons que la proportionnalité de l'excès du pouvoir inducteur spécifique à la densité se maintienne jusqu'à une pression telle que l'air ait la densité de l'eau : son pouvoir inducteur serait alors 1,456, c'est-à-dire

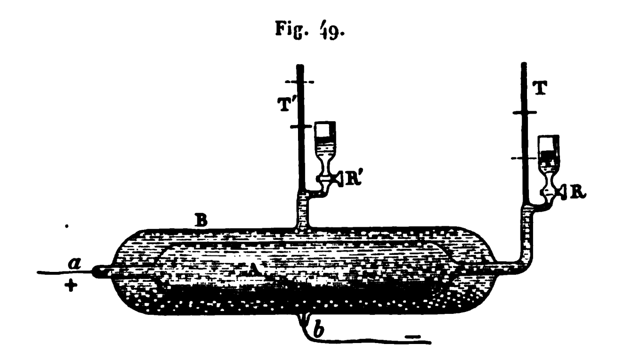
(¹) AYRTON et PERRY, Mémoire lu devant la Société asiatique du Japon, le 18 avril 1877.

de même ordre de grandeur que ceux des solides et des liquides.

CHANGEMENT DE VOLUME ACCOMPAGNANT L'ÉLECTRISATION DES ISOLANTS. — Volta (¹) avait, paraît-il, observé que le volume intérieur d'une bouteille de Leyde augmente quand on la charge. Le même phénomène a été signalé par M. Govi (²) pour une bouteille de Leyde remplie de divers liquides, mais il ne put l'observer quand le liquide est du mercure. Enfin, M. Duter (³) a montré que l'augmentation de capacité est indépendante de la nature du liquide et que la pression des électricités inverses répandues sur les deux armatures de la bouteille ne suffit pas à expliquer la variation de volume observée. Il faut donc chercher la principale cause du phénomène dans une variation de volume de l'isolant par l'électrisation.

L'appareil imaginé par M. Duter (*fig.* 49) est une bouteille de Leyde cylindrique A, enfermée dans un cylindre B de

Fig. 49.



capacité plus grande. A et B communiquent à l'extérieur par des tubes T, T' terminés par des tiges capillaires et munis chacun d'un tube latéral à entonnoir et à robinet, servant au remplissage. Des fils de platine *a* et *b* plongent dans le

(¹) VOLTA, *Lettere inedite*, p. 15. Pesaro; 1834.

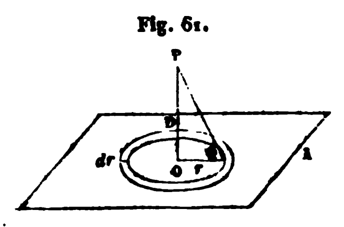
(²) GOVI, *Nuovo cimento*, XXI et XXII; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 857; 1878.

(³) DUTER, *Journal de Physique*, t. VIII, p. 82.

cette quantité, mais seulement à la limite, quand les deux plateaux peuvent être considérés comme des surfaces de niveau infiniment voisines.

Nous nous proposons de calculer l'attraction F exercée par le plateau A, supposé indéfini, sur une portion de surface de B égale à S. Pour cela nous chercherons d'abord l'action exercée par le plateau A sur l'unité d'électricité de nom contraire placée en un point P du second plateau (*fig.* 61).

Fig. 61.



Abaissons du point P la perpendiculaire PO sur le plateau A et décomposons la surface de celui-ci en zones annulaires ayant pour centre le point O. La zone comprise entre les circonférences de rayons r et $r + dr$ a pour surface $2\pi r\,dr$, contient une quantité d'électricité $2\pi r\,dr.\rho$, agissant à une distance $PQ = \sqrt{D^2 + r^2}$, et exerce une action $d\varphi$ qui est dirigée suivant PO, par raison de symétrie :

$$d\varphi = 2\pi r\,dr.\rho \frac{1}{D^2 + r^2} \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} = 2\pi\rho D \frac{r\,dr}{(D^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour obtenir l'action totale φ, il faut ajouter l'action de toutes les zones, c'est-à-dire intégrer l'expression précédente entre les limites $r = 0$ et $r = \infty$:

$$\varphi = 2\pi\rho D \int_0^\infty (D^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} r\,dr.$$

La valeur de l'intégrale est $\frac{1}{D}$, et par suite

$$\varphi = 2\pi\rho.$$

Il suffit actuellement de remarquer que la charge portée par la surface S, appartenant au plateau supérieur, est égale, en valeur absolue, à ρS. La force attractive F à laquelle cette surface est soumise est donc, en tenant compte de la valeur de ρ

mentation proportionnelle de volume

$$\Omega = 3\alpha \frac{[PR^3 - P')(R+e)^3](1-2\mu) - \frac{3}{2}(P-P')(R+e)^3(1+\mu)}{(R+e)^3 - R^3}.$$

Faisons dans cette formule $\mu = \frac{1}{2}$, et remplaçons P et P′ par leurs valeurs, il vient

$$\Omega = \frac{\alpha K^2 V^2 (R+e)}{8\pi R^2 e^2} \frac{9eR^3 + 12e^2R^2 + 8e^3R + e^4}{3eR^2 + 3e^2R + e^3},$$

ou approximativement

$$\Omega = \frac{3\alpha K^2 V^2}{8\pi e^2}$$

aux quantités près d'un ordre de grandeur négligeable.

Or M. Duter a réalisé des mesures sur des bouteilles de Leyde sphériques, d'épaisseur connue; il a déterminé, à l'aide d'un micromètre à étincelles, la différence de potentiel V des armatures, et constaté que la variation de volume Ω est proportionnelle au carré de V, mais en raison inverse de la simple épaisseur de la lame isolante, et non du carré de cette épaisseur, comme l'indiquait le calcul des pressions. Au reste, en substituant à α, K, V, e leurs valeurs absolues dans l'expression de Ω, il a trouvé, pour les bouteilles qu'il employait, des variations de volume au plus égales à la sixième partie de la variation observée. Nous ajoutons que la loi de la raison inverse de l'épaisseur a été retrouvée expérimentalement par M. Righi (¹) à l'aide d'une méthode très différente de celle de M. Duter. L'explication du phénomène par la pression électrique est donc au moins insuffisante.

Nous verrons par la suite que la polarisation des isolants entraîne des variations de leurs propriétés optiques. Par exemple, M. Kerr (²) a découvert qu'un liquide placé entre

---

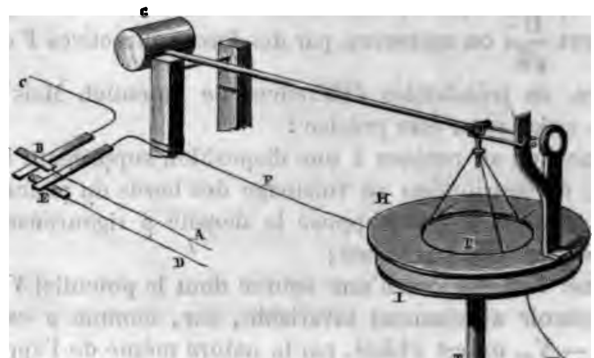
(¹) Righi, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1262, et *Journal de Physique*, t. IX.

(²) Kerr, *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. IX, p. 337 et 446; 5ᵉ série, t. VIII, p. 85, et t. IX, p. 157; ou *Journal de Physique*, t. IV, p. 376; t. V, p. 98; t. VIII, p. 414, et t. IX, p. 255.

continue, pourvu qu'ils soient rigoureusement dans le même plan.

La *fig*. 62 représente l'une des dispositions que l'on peut donner à un anneau de garde. Le plateau P est suspendu à un levier G par des fils isolants et équilibré par un contre-poids. Le levier se termine par une fourchette horizontale dans laquelle est tendu un cheveu très-fin *o*. On s'assure, au moyen d'une loupe, que ce cheveu se projette dans l'intervalle de deux points

Fig. 62.



noirs très-rapprochés, portés par une tige verticale. Quand cette condition est réalisée, le disque est dans le plan de l'anneau de garde.

Dans l'électromètre absolu que nous avons à décrire, la disposition est un peu plus compliquée : le plateau central D (*fig*. 63) est attaché à trois petits ressorts d'acier en forme de fléau de balance, réunis à la tige verticale *o* par l'intermédiaire d'une matière isolante. On relève cette tige à volonté au moyen de la vis micrométrique *b* dont on compte les tours à l'aide d'une petite règle, et les fractions de tour par un tambour de tête. Des loupes permettent de viser entre deux pointes *p* : quand le plateau D est dans le plan de l'anneau de garde P, on doit voir entre les pointes l'image d'un fil tendu horizontal, porté par le plateau D, et mobile entre deux points noirs. La force à laquelle le plateau se trouve soumis par suite de la déformation des

CHAPITRE X.

ÉLECTROMÉTRIE.

Pendules électriques. — Électroscopes à balles et à feuilles d'or. — Électroscopes condensateurs. — Électroscopes à piles sèches. — Électromètre de Hankel.
Méthodes électrométriques de Coulomb. — Électromètre absolu de sir W. Thomson. — Électromètre portatif et électromètre à longue échelle de sir W. Thomson. — Électromètre à quadrants.

Dans ce qui precède nous avons fait un fréquent usage d'appareils de mesure que nous avons supposés connus, au moins d'une manière générale, mais dont il nous reste à faire la description exacte et la théorie.

Pour constater l'existence de forces électriques et en mesurer la grandeur, on les oppose à des forces d'une autre espèce, comme la pesanteur ou la torsion de fils métalliques; les dispositions employées pour cela sont susceptibles de variations infinies; nous ne nous proposons de faire connaître ici que les électroscopes les plus répandus et les plus commodes, renvoyant aux Traités spéciaux pour les appareils d'un usage plus limité ou d'un intérêt purement historique.

Pendules électriques. — Le pendule électrique est le plus simple des électromètres, mais il est aussi le moins sensible de tous. Pour relever la boule du pendule de A en B (*fig.* 50), la force électrique, supposée horizontale, doit vaincre la composante $p \sin \alpha$ du poids de la boule.

Le pendule n'est guère employé que pour mesurer des forces électriques considérables; c'est ainsi que le pendule de Henley (*fig.* 51) accompagne toutes les machines électriques. La ré-

pulsion qui s'exerce entre la tige conductrice et la boule de ce dernier instrument augmente avec la densité électrique, et par conséquent avec le potentiel du conducteur de la machine,

Fig. 50.

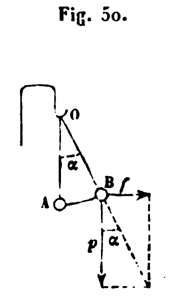
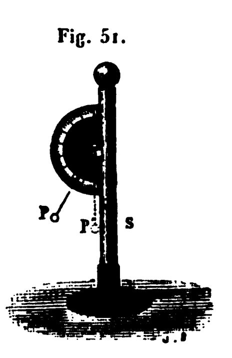


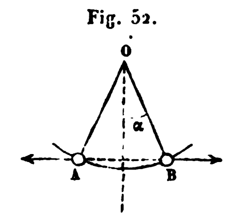
Fig. 51.



d'après une loi compliquée qu'il est inutile de connaître. L'électromètre de Henley ne sert qu'à vérifier si, dans deux expériences successives, on a porté la machine à des potentiels égaux.

ÉLECTROSCOPES A BALLES ET A FEUILLES D'OR. — Au lieu d'un pendule unique, on peut employer un double pendule à cadran, formé de deux sphères égales et isolées (*fig.* 52). Quand on le charge à l'aide d'un conducteur électrisé, les deux boules se repoussent et s'écartent d'un angle 2α. Soient m la charge de chacune des boules, l la longueur du fil; la force répulsive F est

Fig. 52.



$$F = p \sin\alpha = \frac{m^2}{4l^2 \sin^2\alpha},$$

d'où

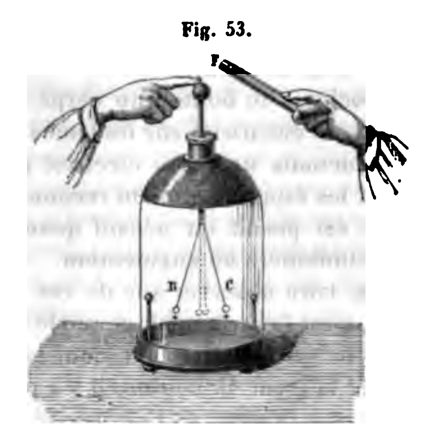
$$m = 2l\sqrt{p \sin^3\alpha};$$

la charge électrique des boules est proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ du sinus de l'angle d'écart.

Le double pendule est l'organe essentiel des électroscopes ordinaires. Que l'on conçoive une cloche de verre portée sur

un plateau métallique communiquant avec le sol (*fig.* 53) et, dans la tubulure de cette cloche, une tige terminée extérieurement par un bouton et qui soutient à l'intérieur ou deux fils de lin, comme dans l'électroscope de l'abbé Nollet, ou deux boules mobiles de sureau qu'employait Cavallo, ou deux petits brins de paille très-minces dont se servit Volta, ou enfin deux petites bandes d'or B, C, découpées dans une feuille à dorure, par lesquelles Bonnet remplaça ces divers systèmes, et l'on aura la description complète des électromètres à fils, à boules,

Fig. 53.



à pailles et à lames d'or que les électriciens ont tour à tour construits. On n'emploie plus aujourd'hui que le dernier, et, pour lui donner le degré d'exactitude dont il est susceptible, il ne reste plus qu'à vernir à la gomme laque le haut de la cloche, à sécher l'intérieur avec de la chaux vive qu'on y laisse en permanence, et enfin à fixer sur la base, vis-à-vis des lames d'or, deux petites colonnes métalliques qui sont reliées au sol et dont l'usage va être expliqué.

On voit tout de suite que la cloche est un support isolant, que de plus elle maintient l'air intérieur dans un état permanent de siccité, et qu'enfin elle prévient toutes les agitations anormales de l'appareil. Toutes les fois qu'on électrisera le bouton extérieur, les lames divergeront, et les deux colonnes métalliques augmenteront la divergence en déterminant par

influence une accumulation électrique sur elles-mêmes et sur les lames.

Ce n'est pas par contact que l'on charge cet appareil, c'est par influence. On approche un bâton de verre électrisé F; il attire le fluide négatif et repousse le positif dans les lames qui s'écartent. Si à ce moment on touche le bouton avec le doigt, on fait écouler l'électricité positive, les lames se rapprochent et il ne reste que l'électricité négative sur le bouton. Après cela, on enlève d'abord le doigt, ce qui rétablit l'isolement, ensuite le bâton, ce qui rend libre l'électricité accumulée sur le bouton, et l'on voit les lames redevenir et demeurer divergentes : elles sont chargées négativement.

Maintenant approchons du bouton un corps chargé négativement, il repoussera l'électricité sur les lames et augmentera leur divergence; amenons un corps électrisé positivement, il fera le contraire et les rapprochera. On reconnaîtra donc que le corps approché est positif ou négatif quand l'écartement primitif des lames diminuera ou augmentera.

Il faut, toutefois, faire observer que de ces deux effets un seul est concluant, c'est l'écartement, et que le rapprochement des lames a lieu sans que le corps extérieur soit chargé, car, si nous approchons la main du bouton, il y a une action d'influence qui amène sur la main de l'électricité positive et une réaction de celle-ci qui attire une partie de l'électricité des lames sur le bouton de l'électroscope. Par conséquent, un corps à l'état naturel diminue l'écart des lames, et, quand on observe cet effet, on ne peut conclure l'existence d'électricité libre dans le corps approché.

Quand le rapprochement des lames est produit par un corps électrisé positivement, il peut le plus souvent se transformer en une divergence. Présentons, en effet, à l'appareil un bâton de verre frotté, il fera converger les lames d'abord; en l'approchant davantage, il les amènera au contact, et en continuant encore, l'influence augmentant toujours, les lames se chargeront positivement et s'écarteront de nouveau. Les mêmes phénomènes se verront en sens inverse, si ensuite on retire lentement le bâton, c'est-à-dire que les pailles se rapprocheront jusqu'à se toucher et se relèveront ensuite. Or, quand

on examine un corps chargé positivement, il n'est pas toujours facile de saisir le premier effet, le rapprochement, qui seul permet de reconnaître si l'électricité de ce corps est positive, et souvent on n'aperçoit que le second, l'écartement, ce qui induit en erreur. Pour détruire toute incertitude, il faudra toujours faire deux épreuves après avoir chargé l'électroscope d'abord positivement, ensuite négativement.

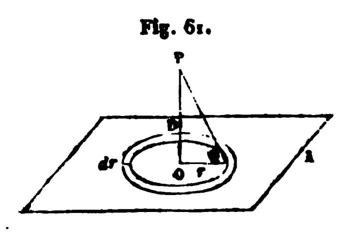
Divers expérimentateurs ont cherché à transformer l'électroscope à feuilles d'or en électromètre, c'est-à-dire qu'ils ont voulu l'employer, non plus seulement à constater le signe de l'électrisation d'un corps, mais encore à réaliser à ce sujet des mesures précises. Si l'on veut étendre jusque-là l'usage de l'électroscope, il est indispensable de remplacer la cloche qui l'enferme par une cage de glaces, afin d'annuler les erreurs de réfraction, d'appliquer derrière les pailles un cadran divisé et de les observer par un trou fixe ou avec une lunette placée en avant. Quant à la graduation, voici comment de Saussure la faisait : il chargeait l'appareil .et mesurait l'écart des feuilles, ensuite il touchait le bouton avec un instrument tout semblable qui enlevait au premier la moitié de son électricité, et le nouvel écartement correspondait à une charge de l'électroscope moitié de la première. Après avoir répété plusieurs fois de suite les mêmes contacts et les mêmes mesures, on construisait une courbe dont les abscisses représentaient les déviations et les ordonnées les charges. On trouve ainsi que, tant que l'écart ne dépasse pas 30°, cet écart est proportionnel à la charge. Même après cette graduation, il est évident que l'électromètre ne mesurera que sa propre charge, et que, pour pouvoir tirer une conclusion certaine relativement à l'état du corps électrisé, on devra mettre ce dernier en communication lointaine avec l'électroscope, de façon à annuler l'influence de l'un sur l'autre; les charges de l'électroscope seront alors proportionnelles au potentiel commun aux deux corps et pourront servir à le mesurer.

Ce potentiel final ne pourra, d'ailleurs, être pris pour le potentiel primitif du corps étudié que si celui-ci fonctionne comme une source constante ou si la capacité de l'électroscope est négligeable par rapport à la sienne.

cette quantité, mais seulement à la limite, quand les deux plateaux peuvent être considérés comme des surfaces de niveau infiniment voisines.

Nous nous proposons de calculer l'attraction F exercée par le plateau A, supposé indéfini, sur une portion de surface de B égale à S. Pour cela nous chercherons d'abord l'action exercée par le plateau A sur l'unité d'électricité de nom contraire placée en un point P du second plateau (*fig.* 61).

Fig. 61.



Abaissons du point P la perpendiculaire PO sur le plateau A et décomposons la surface de celui-ci en zones annulaires ayant pour centre le point O. La zone comprise entre les circonférences de rayons r et $r + dr$ a pour surface $2\pi r\,dr$, contient une quantité d'électricité $2\pi r\,dr.\rho$, agissant à une distance $PQ = \sqrt{D^2 + r^2}$, et exerce une action $d\varphi$ qui est dirigée suivant PO, par raison de symétrie :

$$d\varphi = 2\pi r\,dr.\rho\,\frac{1}{D^2 + r^2}\,\frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} = 2\pi\rho D\,\frac{r\,dr}{(D^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour obtenir l'action totale φ, il faut ajouter l'action de toutes les zones, c'est-à-dire intégrer l'expression précédente entre les limites $r = 0$ et $r = \infty$:

$$\varphi = 2\pi\rho D \int_0^\infty (D^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} r\,dr.$$

La valeur de l'intégrale est $\frac{1}{D}$, et par suite

$$\varphi = 2\pi\rho.$$

Il suffit actuellement de remarquer que la charge portée par la surface S, appartenant au plateau supérieur, est égale, en valeur absolue, à ρS. La force attractive F à laquelle cette surface est soumise est donc, en tenant compte de la valeur de ρ

donnée par l'équation (1),

$$F = 2\pi\rho.\rho S = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V - V_0}{D}\right)^2. \tag{2}$$

Si l'on parvient à mesurer F, on aura la différence des potentiels $V - V_0$:

$$V - V_0 = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}. \tag{3}$$

Comme on peut rendre très-petite la distance D, et par suite le rapport $\frac{D}{\sqrt{S}}$, on mesurera, par des forces attractives F considérables, de très-faibles différences de potentiel. Mais cette mesure exige pour être précise :

1° Que l'on ait recours à une disposition supprimant l'irrégularité de distribution au voisinage des bords du plateau attiré, car nous avons supposé la densité ρ rigoureusement constante en tous ses points;

2° Que l'on dispose d'une source dont le potentiel V_0 doit se maintenir absolument invariable, car, comme ρ est nul avec $V - V_0$, on est obligé, par la nature même de l'appareil, d'avoir recours à une source autre que celle dont on veut mesurer le potentiel V;

3° Enfin que l'on mesure D avec une entière précision, puisque la moindre erreur sur la valeur de cet élément entraîne une erreur considérable sur celle de $V - V_0$.

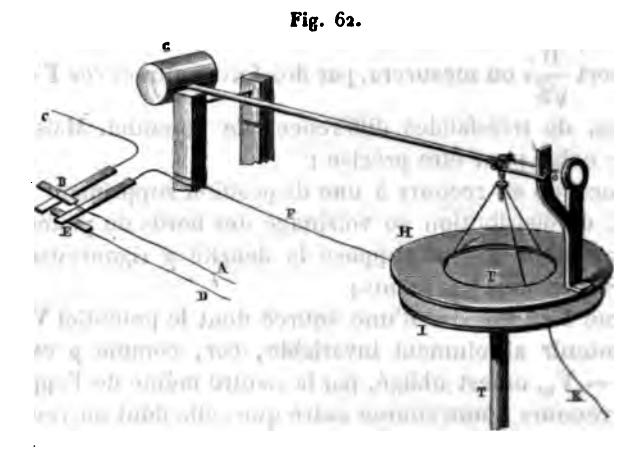
De la nécessité de remplir rigoureusement ces trois conditions résulte une assez grande complication de l'électromètre absolu, amplement rachetée, il est vrai, par son excessive exactitude.

1° *Anneau de garde.* — Pour supprimer l'effet des bords du plateau suspendu, M. Thomson a eu l'ingénieuse idée de découper dans le plateau supérieur un disque central P (*fig.* 62) qui est seul suspendu et se trouve entouré d'une portion annulaire fixe H, à laquelle M. Thomson donne le nom d'*anneau de garde* (*guard-ring*). Le jeu entre le disque et son anneau est très-faible; et quand tous deux sont portés au même potentiel, la distribution électrique qu'ils possèdent est en quelque sorte

continue, pourvu qu'ils soient rigoureusement dans le même plan.

La *fig*. 62 représente l'une des dispositions que l'on peut donner à un anneau de garde. Le plateau P est suspendu à un levier G par des fils isolants et équilibré par un contre-poids. Le levier se termine par une fourchette horizontale dans laquelle est tendu un cheveu très-fin *o*. On s'assure, au moyen d'une loupe, que ce cheveu se projette dans l'intervalle de deux points

Fig. 62.



noirs très-rapprochés, portés par une tige verticale. Quand cette condition est réalisée, le disque est dans le plan de l'anneau de garde.

Dans l'électromètre absolu que nous avons à décrire, la disposition est un peu plus compliquée : le plateau central D (*fig*. 63) est attaché à trois petits ressorts d'acier en forme de fléau de balance, réunis à la tige verticale *o* par l'intermédiaire d'une matière isolante. On relève cette tige à volonté au moyen de la vis micrométrique *b* dont on compte les tours à l'aide d'une petite règle, et les fractions de tour par un tambour de tête. Des loupes permettent de viser entre deux pointes *p* : quand le plateau D est dans le plan de l'anneau de garde P, on doit voir entre les pointes l'image d'un fil tendu horizontal, porté par le plateau D, et mobile entre deux points noirs. La force à laquelle le plateau se trouve soumis par suite de la déformation des

sur une règle divisée horizontale, placée immédiatement au-dessus de la fente. La déviation se trouve ainsi amplifiée dans un rapport considérable ([1]).

L'aimant M que l'on voit dans la figure, autour de la cage de verre de l'instrument, agit sur une petite aiguille aimantée suspendue au-dessous de l'aiguille de l'électromètre et a pour effet de lui donner une position d'équilibre fixe que l'on fait coïncider avec le plan de symétrie de l'instrument, en donnant à l'aimant une position convenable. Le fil de platine qui porte le miroir et l'aiguille est lui-même suspendu par un fil de cocon. Dans d'autres appareils ce mode de suspension est remplacé par une suspension bifilaire, et alors l'aimant peut être supprimé ([2]).

Disposition de M. Mascart. — L'électromètre de Sir W. Thomson est un appareil compliqué et coûteux. Pour la plupart des recherches on peut employer une disposition plus simple indiquée par M. Mascart. Les quadrants de l'électromètre sont chargés à des potentiels égaux et contraires V, —V par les deux pôles d'une pile constante, d'un assez grand nombre d'éléments, parfaitement isolée et dont le milieu est en communication avec le sol. L'aiguille de l'électromètre est chargée au potentiel V_0 que l'on veut mesurer, et la déviation de l'électromètre est rigoureusement proportionnelle à ce potentiel. Cette disposition dispense de l'emploi de la jauge et du reproducteur de charge, et simplifie beaucoup l'instrument sans nuire à son exactitude.

M. Mascart soutient l'aiguille par une suspension bifilaire au centre d'un vase métallique percé de fenêtres convenables et en communication avec le sol : l'aiguille et les cadrans sont ainsi à l'abri de toute influence électrique extérieure. L'aiguille supporte un fil de platine plongeant dans une cuvette remplie d'acide sulfurique, et la source dont on veut mesurer le potentiel V_0 est mise en communication avec le liquide de la cuvette par un second fil de platine attaché à une borne extérieure.

([1]) *Voir*, pour plus de détails sur cette méthode de mesures par les déviations, le 2e fascicule du t. III, p. 31.

([2]) Pour plus de détails, *voir* le Mémoire de sir W. Thomson, *Reprint of papers*, p. 262 à 281, ou le *Traité d'électricité* de M. Mascart, t. I, p. 398.

sort f avec une tige K conductrice qui est fixée par un support isolant sur la base de la bouteille, et que l'on met en communication avec la source dont on veut mesurer le potentiel V'.

2° *Reproducteur et jauge.* — Si la jarre qui renferme les plateaux est d'un verre peu hygrométrique, elle peut conserver très-longtemps sa charge; mais il faut avoir le moyen de porter, à un instant quelconque, son armature interne à un potentiel fixe V_0, et de s'assurer que cette condition est exactement remplie.

On charge la jarre à l'aide d'une petite machine électrique portée par l'appareil en *l, m, n* (*fig.* 63) et qu'on appelle le *reproducteur de charge* (*replenisher.*) Cette petite machine fonctionne par influence, et, suivant qu'on tourne le bouton l dans un sens ou dans l'autre, on élève ou l'on abaisse à volonté le potentiel produit (¹).

La jauge J, représentée à part (*fig.* 64), est une petite plaque d'aluminium très-légère A, suspendue par le fil BC dans une ouverture de même forme pratiquée dans un plateau fixe. Cette plaque est munie d'un levier portant une fourchette avec fil tendu dont on observe la position avec la loupe o.

(¹) Le reproducteur se compose essentiellement de deux morceaux de métal réunis à l'axe l de rotation par une tige isolante. Ces morceaux de métal tournent entre deux plaques métalliques m et n, munies chacune d'un ressort, isolées l'une de l'autre, et communiquant chacune avec une des armatures de la jarre. Dans l'intervalle des plaques sont deux autres ressorts isolés et reliés entre eux par un fil de métal. Quand on fait tourner l'axe l, les morceaux de métal frottent à chaque révolution contre les quatre ressorts.

Considérons, par exemple, le morceau de métal a en contact avec le ressort de la plaque n : il est à l'état neutre, puisqu'il est à l'intérieur d'un corps électrisé; quand il touche ensuite le premier ressort isolé c, il est sous l'influence de l'armature qu'il quitte et dont il est encore en partie enveloppé, chargé par conséquent d'électricité contraire (soit positive), tandis que de l'électricité de même nom se trouve repoussée sur le deuxième ressort isolé d: le corps a va porter cette électricité positive à la plaque m, c'est-à-dire à l'armature de la bouteille qui est positive déjà; la charge de celle-ci augmente donc à chaque révolution.

Si la révolution avait lieu en sens inverse, le signe de l'électricité emportée par le morceau de métal a se trouverait changé, puisqu'il arriverait à la plaque n en venant du deuxième ressort d, où il prend une charge négative; par suite, la charge de la bouteille diminuerait à chaque révolution.

CHAPITRE XI.

MACHINES ÉLECTRIQUES.

Machines à frottement. — Machines de Ramsden, de Van Marum et de Nairne. — Machine d'Armstrong.
Machines fondées sur l'influence. — Électrophore. — Machines de Bertsch et de M. Carré. — Machines de Holtz, de première espèce.— Influence du conducteur diamétral. — Machines de Holtz, de seconde espèce.— Machines à écoulement de Sir W. Thomson.

MACHINES A FROTTEMENT.

Les plus anciennes machines électriques, celle d'Otto de Guericke ([1]) par exemple, se réduisaient à un corps mauvais conducteur, sphérique ou cylindrique, que l'on animait d'un mouvement de rotation rapide et qui s'électrisait en frottant contre la main de l'expérimentateur. On tirait directement les étincelles de la surface du corps isolant.

Bose ([2]) eut l'idée de suspendre au voisinage de l'isolant frotté un cylindre de fer-blanc terminé du côté de l'isolant par un paquet de fils métalliques et suspendu à des cordons de soie. La machine électrique ainsi constituée a servi de type à la plupart des machines à frottement : on y retrouve toujours un isolant qui s'électrise par le frottement, et un conducteur terminé par des pointes qui se charge par influence d'électricité de même nom que celle du corps frotté : c'est du conduc teur que l'on tire les étincelles.

([1]) Otto von Guericke, *Experimenta nova* (ut vocantur) *Magdeburgica*, Caput XV.

([2]) *Die Electricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang*, etc. (Wittenberg, 1744).

quantité d que l'on connaît exactement, la distance des deux plateaux est $D + d$, et la force répulsive F, équilibrée par la tension du ressort, n'a pas varié ; on a donc

$$V' - V_0 = (D + d)\sqrt{\frac{8\varpi F}{S}}.$$

Retranchant membre à membre ces deux équations, on a

$$(4) \qquad V' - V = d\sqrt{\frac{8\varpi F}{S}};$$

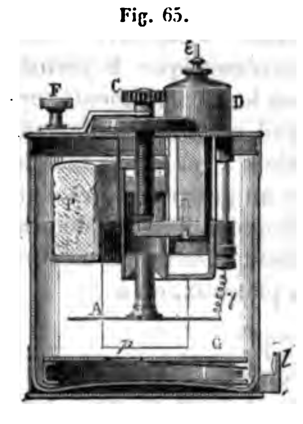
cette dernière équation ne renferme que des quantités très-exactement connues.

Pour déterminer V' en valeur absolue, il suffit de faire $V = 0$, c'est-à-dire de mettre, dans la première expérience, le plateau P' en communication avec le sol.

D'après la disposition de l'appareil, il est évident qu'il est surtout destiné à la mesure de potentiels faibles.

ÉLECTROMÈTRE PORTATIF ET ÉLECTROMÈTRE A LONGUE ÉCHELLE DE SIR W. THOMSON. — L'électromètre absolu est un appareil trop parfait pour pouvoir être employé aux mesures courantes. Sir W. Thomson l'a simplifié en remplaçant le plateau D et son anneau de garde par une simple jauge G ; le plateau mobile A est alors à la partie supérieure ; le reproducteur et sa jauge disparaissent (*fig.* 65). L'appareil ainsi modifié s'appelle *électromètre portatif* (¹).

Fig. 65.



Les mesures sont faites en mettant le plateau mobile A en communication, par la tige ε et le fil γ, d'abord avec le sol, puis avec le corps dont on veut mesurer le potentiel. L'emploi de la formule (4) n'est plus très-rigoureux dans ces conditions, mais on gradue l'appareil par comparaison avec un élec-

(¹) *Reprint of papers*, p. 292.

On trouve qu'il est avantageux de maintenir les coussins en relation avec le sol. Pour réaliser cette condition, on dispose le long des supports et à leur partie interne une règle de cuivre qui règne sur toute leur longueur et qui se relie au sol par une chaîne qu'on laisse toujours pendre. Chaque coussin est en communication avec cette règle. Il est formé d'une plaque en bois bien plane, recouverte de cuir, bourrée de crin et soigneusement garnie de feuilles d'étain laminé qui la rendent conductrice. Des ressorts métalliques, qui prennent leurs points d'appui contre le support d'une part et contre les coussins de l'autre, exercent sur le verre une pression constante et partout égale.

De pareils coussins développeraient très-peu d'électricité, car il ne suffit point de frotter le verre, il faut encore le frotter avec les substances qui l'électrisent le plus; or, l'expérience a montré depuis longtemps que l'or mussif (bisulfure d'étain) réalise cette condition. On réduit ce corps en poudre très-fine; on le lave, et, après l'avoir séché, on enduit les coussins de cette poudre que l'on fait adhérer avec un peu de suif. D'autres expérimentateurs préfèrent un amalgame d'étain que l'on emploie de la même façon et qui réussit aussi bien ([1]).

Il faut maintenant recueillir l'électricité développée sur le verre et l'accumuler sur les *conducteurs* de la machine. Ce sont deux cylindres de laiton HK, H'K' réunis entre eux, soutenus sur des pieds de verre et dirigés perpendiculairement au plateau vers les deux extrémités de son diamètre horizontal; ils sont terminés par deux pièces P, P' contournées en forme d'U, que l'on nomme les *mâchoires* et qui embrassent le verre entre leurs branches. Ces conducteurs se chargent par l'influence du plateau; ils prennent l'électricité négative sur les mâchoires; la positive est reléguée aux parties les plus éloignées, et il y a une ligne neutre sur chacun d'eux.

Pour compléter la machine, on utilise le pouvoir des pointes;

([1]) L'amalgame de Kienmayer est formé de 2 parties de mercure pour 1 partie de zinc et 1 partie d'étain; celui de Böttger, de 2 parties de zinc et 1 partie de mercure.

Supposons qu'on mette *a* et *c* en communication entre eux et avec une source au potentiel V; et de même *b* et *d* avec une source au potentiel —V. L'aiguille est alors mobile dans un champ électrique que son axe, supposé dans la position initiale, divise en deux moitiés parfaitement symétriques. L'aiguille ne doit se déplacer que très-peu, et sa forme a été choisie de façon que, malgré le déplacement de son axe, la symétrie ne soit pas notablement altérée.

Grâce à cette symétrie, la résultante des forces auxquelles l'aiguille se trouve soumise est perpendiculaire à son axe; elle est dirigée dans le sens des potentiels le plus rapidement décroissants, c'est-à-dire que, si le potentiel V_0 de l'aiguille est positif, elle tournera vers les quadrants dont le potentiel —V est négatif. Enfin, entre des limites à déterminer par l'expérience, la force à laquelle l'aiguille se trouvera soumise, mesurée par l'angle dont elle se déplace, sera proportionnelle à son potentiel V_0 et au potentiel V. On a donc intérêt à prendre V_0 aussi grand que possible. La forme des quadrants adoptée par sir W. Thomson permet de porter l'aiguille à un potentiel élevé, sans avoir à craindre de décharges entre l'aiguille et les quadrants.

On voit que cet appareil est éminemment propre à mesurer les forces électromotrices des piles, lesquelles se traduisent, quand la pile est isolée, par des potentiels égaux et de signes contraires des deux pôles; mais on peut aussi employer l'électromètre à quadrants à mesurer des différences de potentiel quelconques. Le moment H par rapport à l'axe de rotation des forces auxquelles l'aiguille est soumise est donné en fonction des potentiels V_0 de l'aiguille, V et V′ des secteurs, par la formule

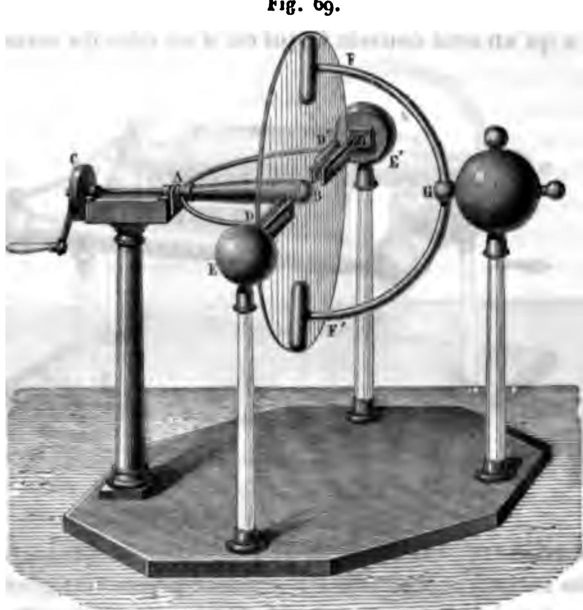
$$H = p\left(V_0 - \frac{V + V'}{2}\right)(V - V'),$$

dans laquelle p représente une constante instrumentale [1].

[1] Cette formule exprime que H et par suite la déviation sont proportionnelles au produit de la charge M_0 de l'aiguille par la différence $M - M'$ des charges des deux secteurs. Soient, en effet, C_{11}, C_{12} les coefficients d'induction de l'aiguille sur elle-même et sur une paire de secteurs, quand l'aiguille est dans la position symétrique; C_{22}, C_{23} les coefficients d'induction d'une paire

qui est due à Van Marum ([1]) (*fig.* 69). L'axe de rotation CAB est très-allongé, il supporte le plateau à l'une de ses extrémités B où il est garni de gomme laque, et on l'équilibre à l'autre bout par un contre-poids C. Les coussins E et E' sont isolés sur des pieds de verre; mais on peut, ou maintenir cet isolement, ou le supprimer au moyen d'un arc métallique DD', qui est relié

Fig. 69.

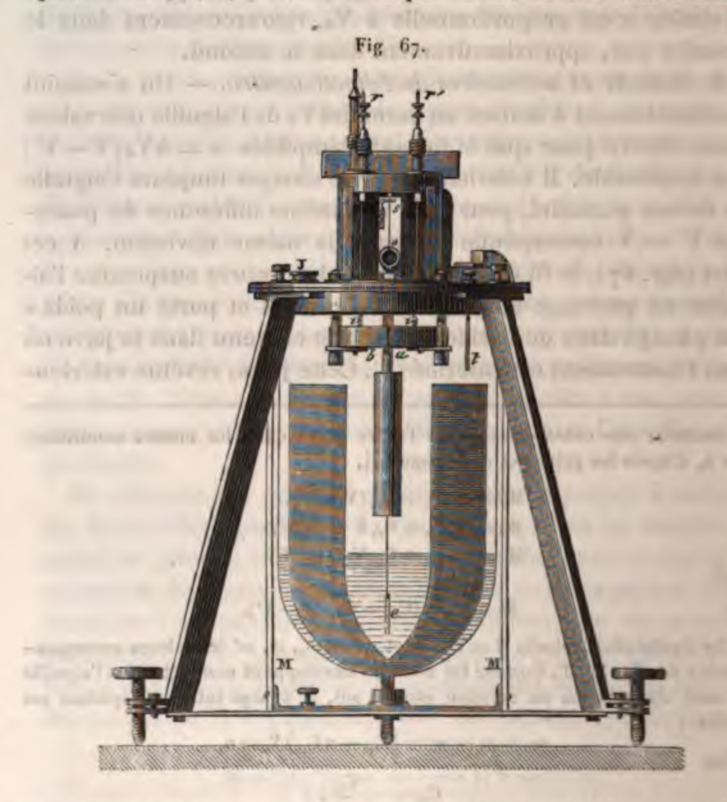


au sol par son support, et qui, pouvant tourner en A, se place, ou dans un plan vertical, ou horizontalement jusqu'à toucher les coussins. Le conducteur FGF', qui est toujours isolé, peut lui-même être placé dans une position verticale en face du verre, ou horizontale en contact avec les coussins. Cette machine fonctionne de deux manières : 1° on fait communiquer les coussins au sol par l'arc DD' et l'on met verticalement le conducteur FF'; alors celui-ci se charge positivement, comme

([1]) VAN MARUM, *Deuxième continuation des expériences*, etc. Harlem, 1797.

rement d'une feuille d'étain, est en communication avec le sol par son armature extérieure, tandis que son armature intérieure est reliée avec un reproducteur (on en voit la tige en t), qui permet d'y établir un potentiel V_0 constant et assez élevé. Une jauge J sert à reconnaître que cette condition est réalisée. Les quadrants a, b, c, d sont reliés par les ressorts i aux bornes

Fig. 67.



extérieures r et r', que l'on met en communication avec les corps dont on veut mesurer la différence de potentiel.

La déviation de l'aiguille étant très-faible doit être mesurée avec beaucoup de précision. A cet effet, le fil métallique rigide qui soutient l'aiguille supporte un miroir concave très-léger o; au centre de courbure de ce miroir on place une fente lumineuse dont l'image réelle, formée par le miroir, vient se peindre

rons une seule : la suppression des pointes. On peut, en effet, ramener le plateau d'une machine électrique à l'état neutre en le faisant frotter contre un corps conducteur, à la surface duquel l'électricité du plateau s'écoule d'elle-même. Le Roy avait déjà disposé, d'après cette observation, une machine très-analogue à celle que M. Winter construit aujourd'hui et qui est représentée par la *fig*. 72. Un double anneau de bois embrasse

Fig. 72.



le plateau et communique avec un anneau creux beaucoup plus grand rempli de fils de fer et sur lequel se répand l'électricité positive. Les coussins C de cette machine sont en relation avec un conducteur isolé, comme dans la machine de Nairne.

THÉORIE DES MACHINES A FROTTEMENT. — En indiquant le jeu de la machine de Ramsden, nous nous sommes bornés à quelques considérations générales qui ne suffisent à déterminer ni le potentiel maximum que peut atteindre le conducteur, ni le

L'instrument est complété par quelques dispositions accessoires qui en simplifient le réglage et la mise en expérience.

Nous renverrons au Tome IV la description de l'électromètre capillaire de M. Lippmann ([1]), appareil d'une sensibilité extrême et d'un emploi particulièrement commode pour la mesure des forces électromotrices, mais dont l'étude serait ici prématurée.

([1]) LIPPMANN, *Thèse de doctorat*, Paris, 1875; *voir* aussi *Ann. de Chimie et de Physique*, 5e série, t. V, p. 494.

CHAPITRE XI.

MACHINES ÉLECTRIQUES.

Machines à frottement. — Machines de Ramsden, de Van Marum et de Nairne. — Machine d'Armstrong.
Machines fondées sur l'influence. — Électrophore. — Machines de Bertsch et de M. Carré. — Machines de Holtz, de première espèce. — Influence du conducteur diamétral. — Machines de Holtz, de seconde espèce. — Machines à écoulement de Sir W. Thomson.

MACHINES A FROTTEMENT.

Les plus anciennes machines électriques, celle d'Otto de Guericke (1) par exemple, se réduisaient à un corps mauvais conducteur, sphérique ou cylindrique, que l'on animait d'un mouvement de rotation rapide et qui s'électrisait en frottant contre la main de l'expérimentateur. On tirait directement les étincelles de la surface du corps isolant.

Bose (2) eut l'idée de suspendre au voisinage de l'isolant frotté un cylindre de fer-blanc terminé du côté de l'isolant par un paquet de fils métalliques et suspendu à des cordons de soie. La machine électrique ainsi constituée a servi de type à la plupart des machines à frottement : on y retrouve toujours un isolant qui s'électrise par le frottement, et un conducteur terminé par des pointes qui se charge par influence d'électricité de même nom que celle du corps frotté : c'est du conducteur que l'on tire les étincelles.

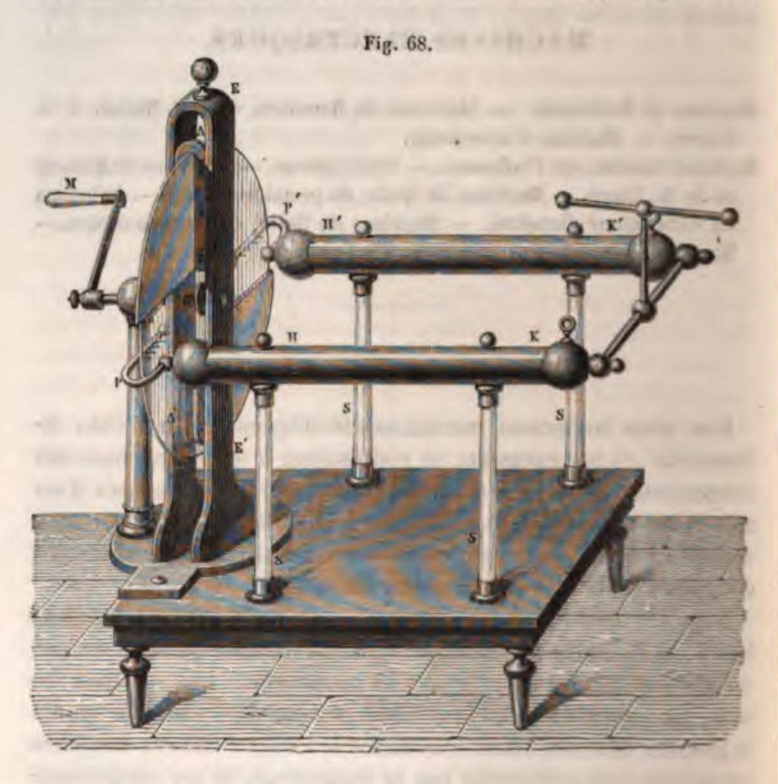
---

(1) Otto von Guericke, *Experimenta nova* (ut vocantur) *Magdeburgica*, Caput XV.

(2) *Die Electricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang*, etc. (Wittenberg, 1744).

MACHINES DE RAMSDEN, DE VAN MARUM ET DE NAIRNE. — La machine électrique la plus répandue en France se rapproche beaucoup de celle qu'avait imaginée Ramsden. Elle a pour organe principal un plateau de verre choisi parmi les moins hygrométriques que l'on puisse rencontrer (*fig.* 68); il est

Fig. 68.



traversé par un axe métallique tournant dans des collets et soutenu par des montants de bois E, E'; il peut être mis en mouvement de rotation par une manivelle M. Pour frotter ce verre, il y a deux systèmes de coussins : le premier A en haut des supports, le second tout à fait semblable fixé en A' à la base. Il est évident qu'en tournant la manivelle on fait successivement passer tous les points des deux faces du verre contre les coussins; ils y prennent de l'électricité positive.

On trouve qu'il est avantageux de maintenir les coussins en relation avec le sol. Pour réaliser cette condition, on dispose le long des supports et à leur partie interne une règle de cuivre qui règne sur toute leur longueur et qui se relie au sol par une chaîne qu'on laisse toujours pendre. Chaque coussin est en communication avec cette règle. Il est formé d'une plaque en bois bien plane, recouverte de cuir, bourrée de crin et soigneusement garnie de feuilles d'étain laminé qui la rendent conductrice. Des ressorts métalliques, qui prennent leurs points d'appui contre le support d'une part et contre les coussins de l'autre, exercent sur le verre une pression constante et partout égale.

De pareils coussins développeraient très-peu d'électricité, car il ne suffit point de frotter le verre, il faut encore le frotter avec les substances qui l'électrisent le plus; or, l'expérience a montré depuis longtemps que l'or mussif (bisulfure d'étain) réalise cette condition. On réduit ce corps en poudre très-fine; on le lave, et, après l'avoir séché, on enduit les coussins de cette poudre que l'on fait adhérer avec un peu de suif. D'autres expérimentateurs préfèrent un amalgame d'étain que l'on emploie de la même façon et qui réussit aussi bien [1].

Il faut maintenant recueillir l'électricité développée sur le verre et l'accumuler sur les *conducteurs* de la machine. Ce sont deux cylindres de laiton HK, H'K' réunis entre eux, soutenus sur des pieds de verre et dirigés perpendiculairement au plateau vers les deux extrémités de son diamètre horizontal; ils sont terminés par deux pièces P, P' contournées en forme d'U, que l'on nomme les *mâchoires* et qui embrassent le verre entre leurs branches. Ces conducteurs se chargent par l'influence du plateau; ils prennent l'électricité négative sur les mâchoires; la positive est reléguée aux parties les plus éloignées, et il y a une ligne neutre sur chacun d'eux.

Pour compléter la machine, on utilise le pouvoir des pointes;

---

[1] L'amalgame de Kienmayer est formé de 2 parties de mercure pour 1 partie de zinc et 1 partie d'étain; celui de Böttger, de 2 parties de zinc et 1 partie de mercure.

on implante dans les deux branches des mâchoires deux séries d'aiguilles de cuivre dirigées vers les deux faces du verre. C'est sur ces pointes que l'électricité négative s'accumule; elle s'en échappe en auréoles brillantes, franchit la couche d'air et arrive sur le plateau où elle s'unit à l'électricité positive que le frottement y avait développée. Cela produit deux résultats également importants : d'abord le verre revient à l'état naturel, et un nouveau frottement y pourra ramener une nouvelle charge; ensuite le conducteur perd son électricité négative et il se trouve chargé positivement dans toute son étendue, mais surtout à ses extrémités K, K'.

Si nous suivons maintenant le plateau dans son mouvement, nous nous rendrons exactement compte du jeu complet de l'appareil. Prenons, par exemple, un point du verre placé d'abord à la base contre les coussins A'; en frottant, il se charge, puis il monte peu à peu pendant que la manivelle tourne, et il vient passer dans la mâchoire P; là il se décharge. Continuant son mouvement, il prend une nouvelle quantité d'électricité en A; il la perd de même dans la seconde mâchoire P' et revient enfin à la partie inférieure pour recommencer la même série de phénomènes pendant toute l'opération.

Il faudra autant que possible empêcher toute déperdition par l'air dans le trajet que fait le verre depuis les coussins où il se charge jusqu'à la mâchoire où il se décharge, et c'est pour cela qu'on enveloppe le plateau d'un écran double de taffetas ciré, qui l'isole de l'air humide. A cette précaution on en ajoute d'autres toutes les fois que l'on veut opérer : c'est de chauffer toutes les parties de la machine, de frotter à l'avance tous les supports des conducteurs avec des linges séchés au feu, sans quoi l'électricité disparaîtrait à mesure qu'elle se produit. Quoi qu'on fasse, ces instruments ne marchent qu'avec la plus grande peine pendant les temps humides. D'un autre côté, toutes ces précautions deviennent inutiles quand l'air est bien sec.

La machine précédente ne permet de recueillir que l'électricité positive; si l'on veut obtenir la négative, il faut modifier sa construction, isoler les coussins et recueillir leur électricité que nous laissons perdre. On y parvient par la disposition suivante,

qui est due à Van Marum [1] (*fig.* 69). L'axe de rotation CAB est très-allongé, il supporte le plateau à l'une de ses extrémités B où il est garni de gomme laque, et on l'équilibre à l'autre bout par un contre-poids C. Les coussins E et E′ sont isolés sur des pieds de verre; mais on peut, ou maintenir cet isolement, ou le supprimer au moyen d'un arc métallique DD′, qui est relié

Fig. 69.



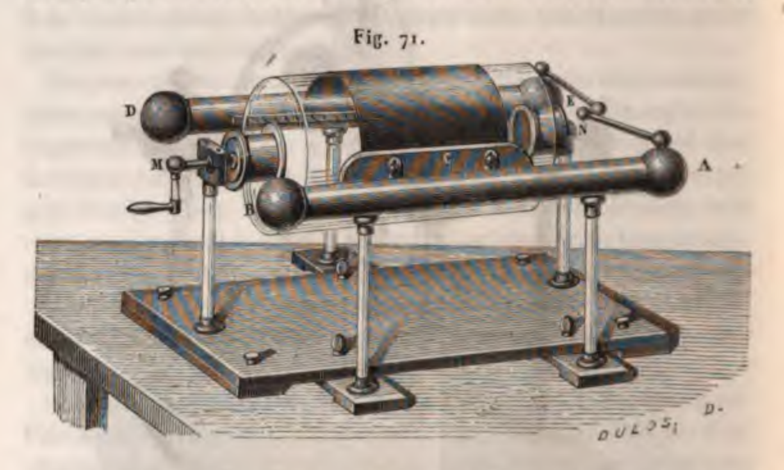
au sol par son support, et qui, pouvant tourner en A, se place, ou dans un plan vertical, ou horizontalement jusqu'à toucher les coussins. Le conducteur FGF′, qui est toujours isolé, peut lui-même être placé dans une position verticale en face du verre, ou horizontale en contact avec les coussins. Cette machine fonctionne de deux manières : 1° on fait communiquer les coussins au sol par l'arc DD′ et l'on met verticalement le conducteur FF′; alors celui-ci se charge positivement, comme

(1) Van Marum, *Deuxième continuation des expériences*, etc. Harlem, 1797.

dans la machine ordinaire, et l'électricité négative se perd; 2° on réunit les coussins avec le conducteur FF' et l'on dirige verticalement l'arc DD'; à ce moment, c'est l'électricité du verre qui rentre dans le sol, et c'est celle des coussins, la négative, qui est accumulée sur le conducteur.

Enfin la machine de Nairne [1] (*fig.* 70) fournit à la fois les deux électricités. Le plateau y est remplacé par un manchon de verre qu'on fait tourner sur son axe MN par une manivelle. Il n'y a qu'un seul coussin C qui est d'un côté du manchon et

Fig. 71.



qui se relie avec un conducteur isolé AB. Sur l'autre face, on voit un second conducteur DE armé de pointes dirigées vers le verre, et qui lui-même est isolé. Si l'on veut recueillir seulement l'une des deux électricités, la positive ou la négative, on fait communiquer au sol ou le coussin C ou le conducteur ED, afin de perdre l'électricité dont on n'a pas besoin et d'atteindre la limite de charge pour celle que l'on garde. Si on les veut toutes les deux à la fois, on maintient l'isolement du coussin et du conducteur.

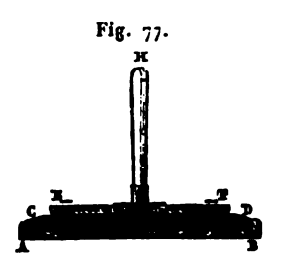
Les machines de Ramsden, de Van Marum et de Nairne appartiennent à une famille unique; elles sont susceptibles de nombreuses modifications, parmi lesquelles nous en signale-

---

(1) *Philosophical Transactions*; 1774.

e fabrique en coulant dans un moule métallique AB un gâteau de résine mêlée de poix dont la surface extérieure doit être lisse. Pour s'en servir, on le frotte avec une peau de chat : il s'électrise négativement et, quand cela est fait, on place sur lui un plateau de bois EF couvert d'étain en lames et surmonté d'un manche isolant H. Ce plateau subit l'influence électrique de la résine, prend de l'électricité positive à sa face inférieure et de la négative sur sa surface externe; on le touche avec le doigt, ce qui donne une faible étincelle et enlève le fluide repoussé; puis on le soulève, ce qui détruit l'influence et permet à l'électricité positive de se répandre sur toute la surface, et en approchant le doigt on reçoit une seconde étincelle plus forte que la précédente. Comme la résine n'a rien gagné ni perdu dans cette manifestation et qu'elle demeure électrisée négativement, on pourra placer de nouveau le plateau EF sur le moule, le toucher, le soulever pour en tirer une étincelle et répéter autant de fois qu'on le voudra le même cycle d'opérations. Une quantité limitée d'électricité développée sur la résine par le frottement de la peau de chat permet ainsi de charger un nombre de fois indéfini le plateau EF et d'obtenir une quantité illimitée d'électricité positive par une série de phénomènes d'influence.

Fig. 77.

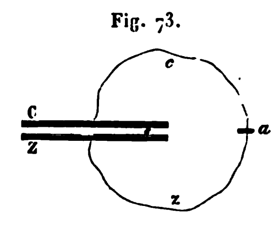


Ainsi présentée, la théorie de l'électrophore est encore incomplète : le moule qui contient la résine et que nous n'avons pas fait intervenir dans notre explication a aussi son rôle, et on le découvre de la manière suivante. Posons l'électrophore sur un support isolant. Si la face supérieure du gâteau de résine est chargée négativement, la base doit être positive et doit condenser du fluide négatif sur la partie du moule qui la touche. En posant le plateau EF, on change cette distribution; on développe une nouvelle décomposition par réaction dans la résine, par suite dans le moule, et l'on trouve de l'électricité positive à sa base : c'est, en effet, ce qui a lieu. Je suppose que l'on enlève cette électricité; l'effet doit être d'augmenter la dé-

débit de la machine : on entend par cette dernière expression la quantité d'électricité qui traverse dans l'unité de temps le conducteur de la machine supposé en communication avec le sol. Le potentiel maximum est très-considérable et le débit extrêmement faible : il en résulte que ces deux quantités sont difficiles à mesurer avec précision, qu'elles ont été rarement étudiées, et que la théorie actuelle des machines électriques reposant sur un nombre très-restreint de déterminations numériques doit être considérée comme incomplète et provisoire, ou tout au moins n'être acceptée que sous certaines réserves.

1° Les physiciens admettent, et nous démontrerons plus tard par l'expérience (¹), qu'il y a une différence de potentiel δV, constante et caractéristique, entre deux métaux donnés, le cuivre et le zinc par exemple, qui sont en contact par une portion de leur surface. Il en résulte qu'un disque de cuivre C et un disque de zinc Z (*fig.* 73) situés à une petite distance l'un de l'autre et en communication par un fil de cuivre *c* et un fil de zinc *z* soudés en *a*, constituent un condensateur à lame d'air chargé par une différence de potentiel δV.

Fig. 73.



Ces disques portent donc sur leurs faces en regard des quantités égales d'électricités de nom contraire dont la densité est (p. 98)

$$\rho = \mp \frac{\delta V}{4\pi e}.$$

Cette densité croîtrait indéfiniment quand on fait tendre e vers zéro (c'est-à-dire quand on amène les deux disques au contact), si la charge des plateaux était rigoureusement située sur une surface géométrique. En réalité, on doit admettre que la différence de potentiel entre les deux métaux ne s'établit pas d'une manière brusque, mais d'une manière progressive, dans une région limitée à une épaisseur très faible ε de part et

(¹) *Voir* T. IV.

nes isolés P et P'. Un inducteur I, également en caout-
c durci, est électrisé négativement : on peut négliger son
ence sur le disque tournant E, mais non celle qu'il exerce
vers le plateau (qui n'étant pas conducteur constitue un
n électrique très imparfait), sur le peigne P placé de l'autre
. Ce peigne laisse écouler de l'électricité positive emportée

Fig. 79.



le mouvement de rotation du plateau, tandis qu'une quan-
égale d'électricité négative est repoussée en A sur le con-
eur du peigne P. L'électricité positive du plateau agit à
tour par influence sur le peigne P'; celui-ci laisse écouler
'électricité négative et ramène le plateau à l'état neutre;
électricité positive est repoussée en A' sur le conducteur
eigne P'. Des étincelles jaillissent entre A et A' d'une ma-
s continue, comme entre les deux conducteurs d'une
hine de Nairne ou d'Armstrong.

4° Voyons maintenant ce qui se produit pendant le jeu d'une machine électrique dont nous supposerons d'abord les coussins isolés. A mesure que le verre est entraîné par le mouvement de rotation, il emporte à sa surface une partie de l'électricité positive de la couche double et une quantité équivalente d'électricité négative devient libre sur les coussins. Le potentiel négatif de ceux-ci, dont nous désignerons par V la valeur absolue, augmente donc sans cesse à mesure que le disque tourne, pourvu que le verre arrive aux coussins à l'état neutre. Or, c'est précisément ce qui a lieu, grâce au conducteur armé de pointes : l'électricité positive du verre est neutralisée par de l'électricité négative fournie par les pointes et une quantité égale d'électricité positive apparaît sur le conducteur. Le potentiel positif $+ V'$ de celui-ci augmente donc en même temps que le potentiel négatif des coussins, et il n'y a d'autre terme à cette double augmentation que la production d'une décharge entre le conducteur et les coussins. La limite correspondante de la différence $V' + V$ des deux potentiels dépend essentiellement de la forme et des dimensions de la machine.

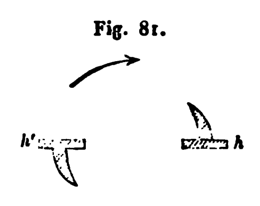
5° Si les coussins de la machine communiquent avec le sol, la limite U du potentiel du conducteur, correspondant à la production d'une décharge entre le conducteur et les coussins, sera sensiblement égale à la différence de potentiel limite $V + V'$ de l'expérience précédente. Le potentiel limite U est donc plus grand que V : en particulier, si la capacité du conducteur est égale à celle des coussins, on a $V = -V'$, et par suite $U = 2V$. On voit donc pourquoi l'on met les coussins en communication avec le sol dans les machines, comme celle de Ramsden, où l'on veut obtenir de l'électricité positive au plus haut potentiel possible.

6° En ce qui concerne le débit d'une machine électrique, il est, d'après ce qui précède, proportionnel à la surface frottée. Pour une même machine il sera donc, dans des limites assez larges, indépendant de la pression exercée entre le verre et les coussins, et proportionnel à la vitesse de rotation. Pour des machines d'espèce différente, à surface et à vitesse égale, il variera avec la nature des corps frottés, mais non propor-

Elle comprend :

1° Un plateau fixe de grand diamètre supporté par quatre tiges isolantes horizontales, reliées elles-mêmes au bâti de la machine. Ce plateau est évidé suivant deux secteurs F et F′ et porte en *h*, *h′* deux armatures en papier fort, représentées séparément (*fig.* 81) : elles sont disposées symétriquement par rapport au centre du plateau, de telle sorte qu'un observateur se déplaçant sur le plateau dans le sens de la flèche rencontrerait la pointe de chaque armature avant d'en rencontrer la base;

Fig. 81.



2° Un plateau mobile de diamètre plus faible porté par un axe qui traverse le plateau fixe et auquel on communique un mouvement de rotation rapide, dans le sens de la flèche, par un ou plusieurs cordons sans fin et un système de poulies;

3° Deux peignes isolés faisant face aux bases des armatures et reliés aux conducteurs C et C′. Habituellement l'un de ces conducteurs porte une coulisse (*fig.* 83) que l'on peut faire glisser à l'aide d'un manche d'ébonite, de manière à amener les conducteurs en contact ou à les séparer.

Pour amorcer la machine, il convient de pousser la coulisse au contact. On touche l'une des armatures, *h* par exemple, avec un corps chargé négativement (soit une plaque d'ébonite frottée avec de la flanelle) et l'on est bientôt prévenu par un bruissement très accusé que la machine est amorcée. Si l'on ouvre alors la coulisse, des étincelles jaillissent entre les deux conducteurs. Elles sont essentiellement constituées par des aigrettes qui se changent en étincelles proprement dites quand on met les deux conducteurs en relation avec les armatures d'un condensateur de petite dimension BB′ (*fig.* 83).

Pendant qu'on amorce la machine, l'armature *h* électrisée négativement provoque un écoulement d'électricité positive par le peigne qui lui fait face, et conséquemment un écoulement d'électricité négative par le peigne le plus éloigné. Ces électricités inverses entraînées par le mouvement du plateau viennent se présenter aux pointes des armatures et réagissent sur elles : ainsi la région positive du plateau arrivant devant *h′* fera

chappant, une électricité opposée. Voulant analyser cette action, M. Armstrong puisa la vapeur dans une chaudière par l'intermédiaire d'un large tube de verre qui se terminait par un robinet isolé. Tant que la vapeur n'avait point d'issue, rien n'était électrisé; mais quand on la laissait sortir, elle prenait l'électricité positive, et le robinet conservait la négative; d'ailleurs la chaudière restait à l'état naturel. Il est évident dès lors que la séparation des deux fluides se fait non dans l'intérieur de l'appareil pendant l'ébullition, mais au point où la vapeur sort en frottant contre les parois du robinet. M. Armstrong eut l'idée de transformer cette chaudière en machine électrique; mais, avant de montrer comment il y réussit, il faut compléter l'étude du phénomène.

Nous venons déjà de remarquer que c'est au moment où elle sort par l'orifice d'échappement que la vapeur s'électrise; mais elle ne le fait pas toujours. Faraday (1), l'ayant surchauffée de manière qu'elle fût sèche, vit disparaître toute électrisation. En la faisant passer, au contraire, avant sa sortie, dans une boîte contenant de l'étoupe mouillée, elle se chargeait de gouttelettes liquides, et alors l'électricité était très abondante. On est donc porté à croire que ce sont les gouttes d'eau et non pas la vapeur qui s'électrisent en frottant contre les parois du bec.

Cette conclusion est confirmée par de nombreuses expériences. Un jet d'air sec qui s'élance dans l'atmosphère ne s'électrise point; mais s'il est humide ou qu'il contienne des poussières, le bec et le jet prennent tous deux des fluides opposés. Quand l'eau de la chaudière est distillée, le bec devient négatif et le jet de vapeur positif; avec de l'eau ordinaire, il ne se produit rien. En dissolvant des sels en proportions très faibles dans l'eau pure, on détruit également l'action; mais on la reproduit si, au lieu de matières conductrices, on met dans la chaudière des essences, des huiles ou des corps gras, et dans ce cas le partage de l'électricité se fait d'une manière inverse, la vapeur est négative et la chaudière

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. X, p. 88.

nons de décrire en réunissant sur un même bâti deux machines, comme Poggendorff l'a imaginé le premier (¹) : il y a alors deux plateaux fixes au centre, un plateau mobile de part et d'autre et quatre peignes communiquant deux à deux; la *fig.* 83 représente la disposition des machines doubles construites par Ruhmkorff.

INFLUENCE DU CONDUCTEUR DIAMÉTRAL. — Il est évident que la puissance de la machine de Holtz diminue par l'écartement des conducteurs des peignes : dès qu'ils sont séparés l'un de l'autre, leur influence réciproque diminue et le jeu de la machine est surtout entretenu par l'influence directe des armatures sur les peignes. Or la déperdition s'exerce sur les armatures, et parfois la machine cesse de fonctionner. On remédie en partie à cet inconvénient en ajoutant aux machines un conducteur non interrompu, placé suivant un diamètre du plateau mobile, terminé par deux peignes et incliné de 30° environ sur le diamètre des peignes principaux (²). Ce conducteur diamétral agit pour suppléer à l'insuffisance des autres peignes et maintenir l'électrisation contraire des deux moitiés du plateau mobile à la plus haute tension possible, lorsque la machine fonctionne.

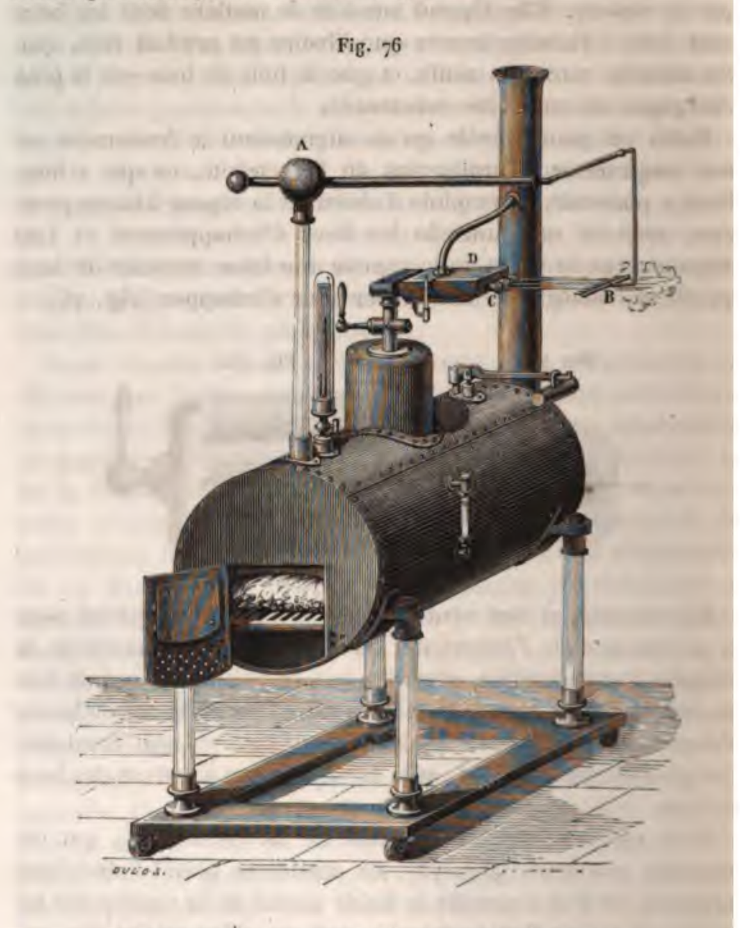
Dans les machines qui ne présentent pas de conducteur diamétral, il peut arriver, quand on éloigne trop les conducteurs, que les peignes ne fournissent plus assez d'électricité pour renverser le signe de l'électrisation du plateau; la machine se désamorce alors peu à peu par un jeu inverse de celui que nous avons décrit ci-dessus et, pour l'amorcer de nouveau, il faut fermer la coulisse des conducteurs et mettre encore une fois l'inducteur électrisé en contact avec l'une des armatures. Dans certains cas, il suffit de refermer la coulisse sans se servir de l'inducteur, et, en continuant à faire tourner le plateau, la machine fonctionne de nouveau, mais ses pôles sont renversés.

(¹) *Annales de Poggendorff*, t. CXLI, p. 161, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXIII, p. 335.

(²) *Annales de Poggendorff*, t. CXXXVI, p. 171, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXIII, p. 332.

quelque temps, par suite de la grande quantité de vapeur d'eau qu'elle répand dans l'atmosphère.

Fig. 76



MACHINES FONCTIONNANT PAR INFLUENCE.

ÉLECTROPHORE. — Volta ([1]) a inventé, pour remplacer la machine électrique à peu de frais, un appareil dont la théorie a été longtemps incomplète : c'est l'électrophore (*fig.* 77). On

([1]) *Collezione dell' Opere di Volta*, t. I, p. 105.

tricité positive, les deux autres B et D de l'électricité négative. Après un demi-tour les deux plateaux P, P′ sont électrisés en sens contraire sur leurs deux moitiés, comme on le voit dans le diagramme ci-joint (*fig.* 85). dans lequel le plateau supérieur P′ a été figuré plus petit, et les peignes inférieurs ont été écartés au delà du bord du plateau inférieur, pour rendre l'image plus nette. On reconnaît sans peine sur ce diagramme que, grâce au sens du mouvement, chaque plateau agit sur les peignes qui font face à l'autre, de façon à y maintenir le signe de l'électrisation indiquée par la figure. Quand on ouvre la coulisse, des étincelles doivent donc jaillir entre les deux conducteurs. On ajoute quelquefois à cette machine un cinquième peigne en communication avec le sol; son rôle est analogue à celui du conducteur diamétral des machines de première espèce.

Fig. 85.

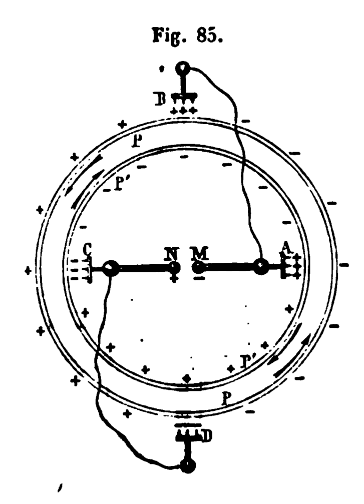
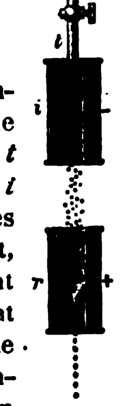


Fig. 86.



MACHINE ÉLECTRIQUE A ÉCOULEMENT. — Sir W. Thomson a imaginé une autre espèce de machine électrique fonctionnant par l'écoulement de l'eau. Un tube *t* (*fig.* 86) laisse écouler de l'eau à travers un cylindre *i* isolé, électrisé négativement : les gouttes liquides s'électrisent positivement par influence; en tombant, elles rencontrent un second cylindre *r*, et lui cèdent leur électricité; enfin elles coulent au dehors à l'état neutre : le potentiel du cylindre *r* s'élève donc de plus en plus. En réunissant deux appareils semblables, mais de telle sorte que l'inducteur *i* de l'un communique au récepteur *r′* de l'autre, chaque récepteur maintiendra l'électrisation de l'inducteur opposé et la machine

composition sur le gâteau et sur le plateau EF. On voit dès lors qu'il est utile de laisser le moule en rapport avec le sol.

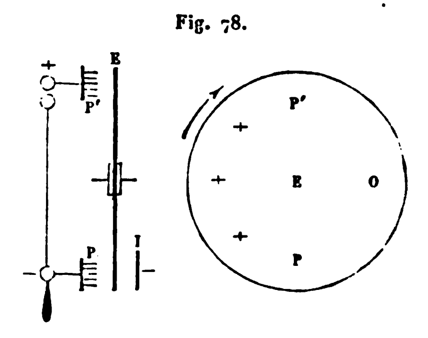
On touche maintenant le plateau EF pour enlever l'électricité négative. Cette nouvelle action amène encore une nouvelle distribution, une nouvelle décomposition des fluides et encore de l'électricité positive à la base du moule. Il y a donc là, comme on le voit, une série de phénomènes qui se continueraient indéfiniment si les contacts étaient successifs, et, pour arriver tout de suite à la limite de charge, il faudra à la fois toucher le plateau et le moule.

Cela étant fait, on soulève le plateau; en détruisant l'influence qu'il exerçait sur les parties inférieures, on rend libre une partie des électricités qui y étaient condensées, et l'on voit apparaître de l'électricité négative sur le moule. On voit combien ces actions sont compliquées et combien il est nécessaire de maintenir le moule en relation avec le sol. Cette nécessité avait été reconnue depuis longtemps sans qu'on en eût donné l'explication.

Il y a encore dans l'électrophore une circonstance digne de remarque et qui lui a fait donner son nom : il garde son électricité pendant des mois entiers.

MACHINES DE BERTSCH ET DE M. CARRÉ. — La machine de Bertsch est d'invention récente : elle agit comme un électro-

Fig. 78.



phore continu. Elle est formée (*fig.* 78) d'un plateau E en caoutchouc durci qui tourne sans frottement devant deux

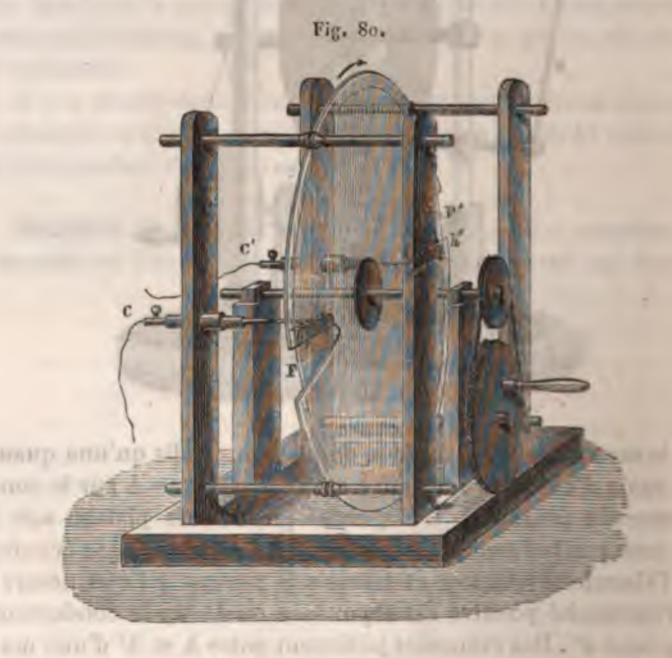
nime suffit à maintenir les conducteurs chargés pendant une durée indéfinie.

La *fig.* 87 montre la disposition que sir W. Thomson a donnée à cette curieuse machine. Les bouteilles de Leyde *b* et *b'* ont pour objet de donner aux deux conducteurs une capacité considérable.

La machine de M. Bertsch fonctionne de plus en plus mal à mesure que l'électricité de l'inducteur I se perd dans l'atmosphère; M. Carré a imaginé une machine analogue (*fig.* 79) dans laquelle cet inconvénient n'existe pas : l'inducteur A est un petit plateau de caoutchouc durci qui frotte contre des coussins C et par suite se maintient toujours électrisé. On communique au plateau E un mouvement de rotation rapide à l'aide d'un volant qu'on tourne à la main, et d'une petite poulie placée sur l'axe de E et réunie par un cordon sans fin avec la circonférence du volant. La machine de M. Carré fonctionne à peu près aussi bien que celles que nous allons maintenant décrire.

MACHINE DE HOLTZ DE PREMIÈRE ESPÈCE. — La machine de Bertsch n'est qu'une simplification d'une machine antérieure en

Fig. 80.



date et beaucoup plus parfaite, la machine de Holtz. La *fig.* 80 la représente sous la forme la moins complexe.

Plus généralement, si l'unité d'électricité se déplace d'un point où le potentiel est V_1 en un autre où le potentiel est V_2, le travail effectué par les forces électriques a pour expression

$$\mathfrak{T} = \int_{V_1}^{V_2} - dV = V_1 - V_2;$$

il est indépendant de la forme de la trajectoire parcourue par le point. Si, en particulier, l'unité d'électricité est transportée d'un point à un autre d'une même surface de niveau,

$$V_1 - V_2 = 0,$$

et le travail total correspondant au déplacement est nul, quelle que soit la trajectoire sur la surface de niveau ou à l'extérieur de cette surface.

Énergie électrique. — Considérons un système de points A, A',..., possédant des charges électriques m, m',..., et proposons-nous d'évaluer le travail des forces électriques quand on imprime au système une déformation quelconque infiniment petite.

Soient, en particulier, deux points A et A', électrisés positivement, dont la distance r devient $r + dr$. La force qui s'exerce entre les deux points est dirigée suivant la ligne des centres et a pour valeur absolue $\frac{mm'}{r^2}$; elle tend à produire une augmentation de la distance r; le travail effectué par cette force, pour un accroissement dr positif, est lui-même positif et, quels que soient les déplacements absolus de A et de A', il est exprimé par

$$\frac{mm'}{r^2} dr = -d\,\frac{mm'}{r};$$

il est d'ailleurs facile de voir que cette expression est générale. Le travail élémentaire total dT pour une déformation infiniment petite quelconque est la somme de tous les termes analogues fournis par le système considéré.

Pour former cette somme, nous nous occuperons en premier lieu des termes qui contiennent la masse électrique du point A.

écouler de l'électricité négative de la pointe de l'armature et laissera celle-ci chargée positivement. Cette armature à son tour provoquera un écoulement d'électricité négative du peigne qui lui fait face, par suite un écoulement d'électricité positive du peigne opposé. Grâce à ces réactions réciproques, l'électrisation des armatures, par suite celle des deux moitiés du plateau mobile, augmente à chaque tour jusqu'à une limite qui dépend des pertes de toute espèce auxquelles l'appareil est soumis. On peut alors ouvrir la coulisse; l'électrisation inverse des deux armatures suffit à produire l'écoulement de l'électricité des peignes et le courant d'étincelles qui en est la conséquence.

Fig. 82.

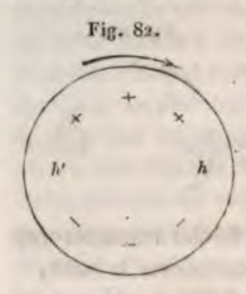
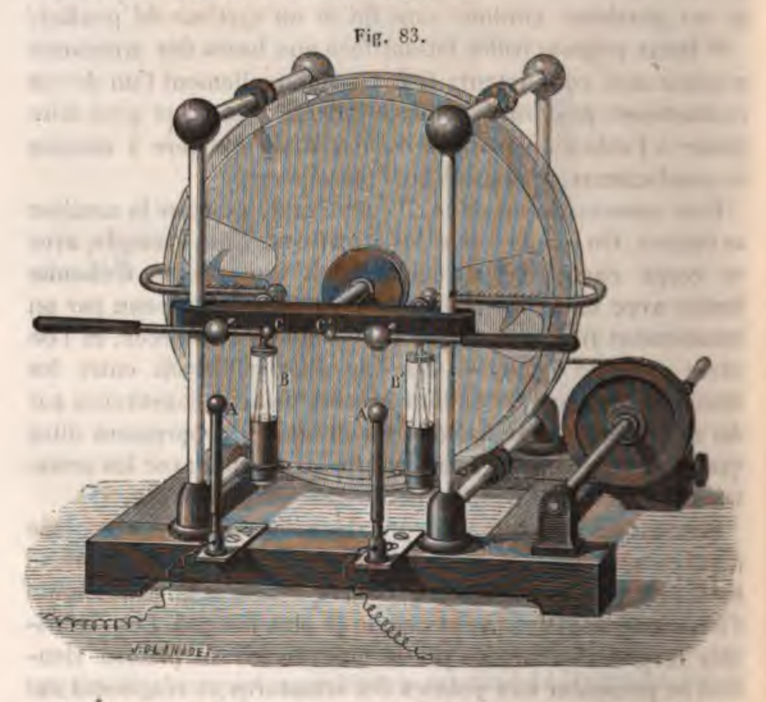


Fig. 83.



On peut augmenter la puissance de l'appareil que nous ve-

potentiel est nul, et le terme correspondant de W disparaît. Il en est de même du terme fourni par un conducteur primitivement à l'état neutre, c'est-à-dire dont la charge est algébriquement nulle.

Considérons en particulier le cas d'un corps A_1 dont le potentiel est V_1 et la charge M_1, et d'une série de corps A_2, A_3, ... au potentiel zéro. On a alors

$$(4) \qquad W = \tfrac{1}{2} M_1 V_1.$$

Les autres corps du système ne modifient l'énergie totale qu'en faisant varier la capacité de A_1 et par suite sa charge M_1. C'est en particulier le cas des condensateurs dont une armature est en relation avec le sol.

Pour un condensateur fermé, dont l'armature extérieure est en communication avec le sol, nous avons démontré que la charge M_1 de l'armature intérieure A_1, en communication avec la source au potentiel V_1, est

$$(5) \qquad M_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{e} V_1,$$

et l'on a, par conséquent,

$$(6) \qquad W = \frac{1}{8\pi} \frac{S}{e} V_1^2.$$

Pour un potentiel donné, l'énergie électrique est proportionnelle à la surface du condensateur et en raison inverse de l'épaisseur de la couche isolante. On a de même

$$(5) \qquad W = 2\pi \frac{e}{S} M_1^2.$$

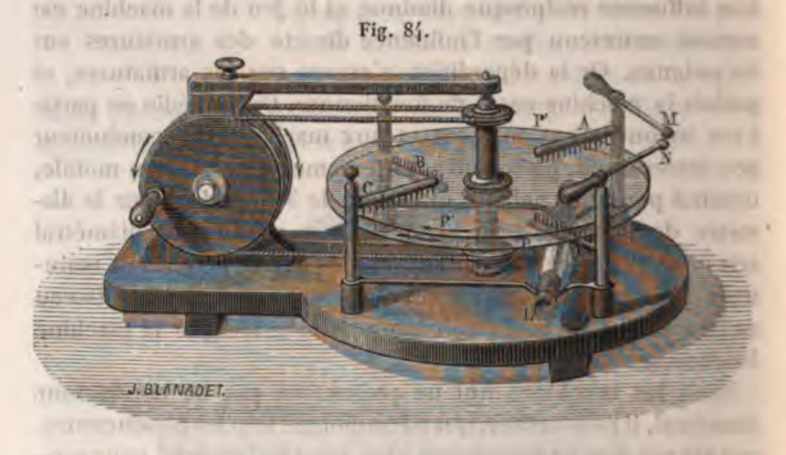
Pour une charge fixe de l'armature interne du condensateur, l'énergie électrique est proportionnelle à l'épaisseur de la lame isolante, et en raison inverse de la surface de l'armature.

D'une manière générale, on peut exprimer l'énergie électrique W, en fonction des potentiels seuls ou des charges seules, en remplaçant dans l'expression (3) soit les charges,

Nous n'insisterons pas sur l'explication de ces phénomènes, non plus que sur les nombreuses singularités du jeu de la machine.

MACHINE DE HOLTZ DE DEUXIÈME ESPÈCE. — M. Holtz a disposé de très curieuses machines formées de deux plateaux de verre non munis de fenêtres et qu'un double cordon sans fin, passant sur une poulie à double gorge, anime de rapides mouvements de rotation de sens contraire. Quatre peignes conducteurs A, B, C, D sont placés, deux au-dessus du plateau supérieur, deux

Fig. 84.



au-dessous du plateau inférieur; les peignes inférieurs B et D sont sur un diamètre qui est perpendiculaire à celui des peignes supérieurs A et C; enfin chaque peigne supérieur communique avec l'un des peignes inférieurs et chaque système de deux peignes avec un conducteur isolé. Les deux conducteurs M et N peuvent être éloignés ou rapprochés jusqu'au contact par un jeu de coulisse, comme dans la machine de première espèce.

Pour amorcer la machine, on ferme la coulisse, on place un corps électrisé en face de l'un des peignes, puis on ouvre la coulisse et on obtient un courant d'étincelles.

Pendant qu'on amorce la machine, les quatre peignes fonctionnent: deux d'entre eux A et C versent sur les plateaux de l'élec-

tricité positive, les deux autres B et D de l'électricité négative. Après un demi-tour les deux plateaux P, P′ sont électrisés en sens contraire sur leurs deux moitiés, comme on le voit dans le diagramme ci-joint (*fig.* 85), dans lequel le plateau supérieur P′ a été figuré plus petit, et les peignes inférieurs ont été écartés au delà du bord du plateau inférieur, pour rendre l'image plus nette. On reconnaît sans peine sur ce diagramme que, grâce au sens du mouvement, chaque plateau agit sur les peignes qui font face à l'autre, de façon à y maintenir le signe de l'électrisation indiquée par la figure. Quand on ouvre la coulisse, des étincelles doivent donc jaillir entre les deux conducteurs. On ajoute quelquefois à cette machine un cinquième peigne en communication avec le sol; son rôle est analogue à celui du conducteur diamétral des machines de première espèce.

Fig. 85.



Fig. 86.

MACHINE ÉLECTRIQUE A ÉCOULEMENT. — Sir W. Thomson a imaginé une autre espèce de machine électrique fonctionnant par l'écoulement de l'eau. Un tube *t* (*fig.* 86) laisse écouler de l'eau à travers un cylindre *i* isolé, électrisé négativement : les gouttes liquides s'électrisent positivement par influence; en tombant, elles rencontrent un second cylindre *r*, et lui cèdent leur électricité; enfin elles coulent au dehors à l'état neutre : le potentiel du cylindre *r* s'élève donc de plus en plus. En réunissant deux appareils semblables, mais de telle sorte que l'inducteur *i* de l'un communique au récepteur *r*′ de l'autre, chaque récepteur maintiendra l'électrisation de l'inducteur opposé et la machine

soit les potentiels, par leurs valeurs

$$M_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots,$$
$$V_1 = K_{11}M_1 + K_{12}M_2 + \ldots,$$

et l'on reconnaît ainsi : 1° *que l'énergie électrique d'un système est une fonction homogène du second degré des potentiels de tous les corps du système;* 2° *que cette énergie est une fonction homogène du second degré des charges de tous les corps du système.*

FORCE EXERCÉE SUR UN CORPS ÉLECTRISÉ. — La variation de l'énergie électrique d'un système de corps qui éprouve une modification quelconque est égale au travail effectué par les forces électriques et de signe contraire. Supposons d'abord que la variation de l'énergie W résulte du déplacement des masses matérielles qui portent les charges électriques, et considérons en particulier le cas d'un corps susceptible de se mouvoir dans un champ électrique et dans une direction déterminée. Soient δx un déplacement infiniment petit effectué dans cette direction, F la force évaluée dans la direction du mouvement. Le travail élémentaire de cette force est $F\delta x$, et la variation correspondante de l'énergie δW;

$$F\delta x = -\delta W,$$
$$F = -\frac{\delta W}{\delta x}.$$

Quand on sait évaluer δW, on en déduit F.

Prenons pour exemple l'aiguille de l'électromètre à quadrants de Sir W. Thomson. Quand elle se déplace d'un angle α, très-petit à partir de la position symétrique, le travail élémentaire des forces agissant sur l'aiguille peut être représenté par $H\alpha$, H étant le moment par rapport à l'axe de rotation des forces auxquelles l'aiguille est soumise (¹).

(¹) Donnons, en effet, au couple un bras de levier égal à 1, ayant [illegible] ses extrémités sur l'axe de rotation. Les forces du couple sont [illegible]ment égales à H, l'une, appliquée au point de rotation, [illegible] l'autre, appliqué à la distance 1, produit un travail $H\alpha$

Pour évaluer, d'autre part, la variation de l'énergie électrique

$$(1) \qquad W = \tfrac{1}{2}(M_0 V_0 + MV + M'V')$$

du système formé par l'aiguille au potentiel V_0 et les deux paires de secteurs aux potentiels V et V', nous remplacerons dans l'expression (1) de W les charges par leurs valeurs en fonction des potentiels

$$(2) \qquad \begin{cases} M_0 = C_{11}V_0 + C_{12}V + C_{13}V', \\ M \ = C_{12}V_0 + C_{22}V + C_{23}V', \\ M' = C_{13}V_0 + C_{23}V + C_{33}V'; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} W = \tfrac{1}{2}(C_{11}V_0^2 + C_{22}V^2 + C_{33}V'^2) \\ \qquad + C_{12}VV_0 + C_{13}V'V_0 + C_{23}VV'. \end{cases}$$

Les potentiels V_0, V, V' sont constants, et par suite la variation de W ne dépend que de celle des coefficients d'induction. Comme l'aiguille est très-large, on reconnaît aisément que la rotation α ne modifie ni le coefficient d'induction C_{11} de l'aiguille sur elle-même, ni celui C_{23} des deux couples de secteurs l'un sur l'autre. En effet : 1° C_{11} est, par définition, la charge que prend l'aiguille au potentiel 1 dans les secteurs au potentiel 0, et comme les secteurs enveloppent complètement l'aiguille, cette charge est la même dans toutes les positions que l'aiguille peut prendre en tournant autour du point de suspension; 2° C_{23} est la charge de la paire de secteurs 1 au potentiel zéro quand l'autre paire est au potentiel 1 et l'aiguille au potentiel zéro : une petite rotation de l'aiguille ne peut modifier la distribution électrique, si ce n'est dans une région de la paire de secteurs 2 et de l'aiguille trop éloignée des secteurs 1 pour modifier d'une manière appréciable leur charge C_{23}. On a donc simplement

$$\delta W = \tfrac{1}{2}(V^2\delta C_{22} + V'_2\delta C_{33}) + V_0(V\delta C_{12} + V'\delta C_{13}).$$

D'ailleurs, à cause de la symétrie,

$$\delta C_{22} = -\delta C_{33},$$
$$\delta C_{12} = -\delta C_{13}.$$

Les surfaces de l'aiguille qui sont en regard de chaque qua-

CHAPITRE XII.

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

Signification mécanique du potentiel. — Énergie électrique. — Force exercée sur un corps électrisé. — Décharges électriques. — Expériences de M. Riess. — Lois des températures. — Lois des quantités de chaleur. — Cascades.

SIGNIFICATION MÉCANIQUE DU POTENTIEL. — Considérons l'unité d'électricité placée en un point P de l'espace où le potentiel est V. Elle est soumise à une force F dont les composantes sont respectivement

$$X = -\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

Quand cette masse se déplace de sorte que les coordonnées du point P prennent les accroissements dx, dy, dz, le travail élémentaire de la force F a pour expression

$$(1) \qquad d\mathfrak{T} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,dV.$$

Si le point P s'éloigne jusqu'à l'infini, c'est-à-dire jusqu'à ce que le potentiel V soit nul, le travail total effectué par les forces électriques sera

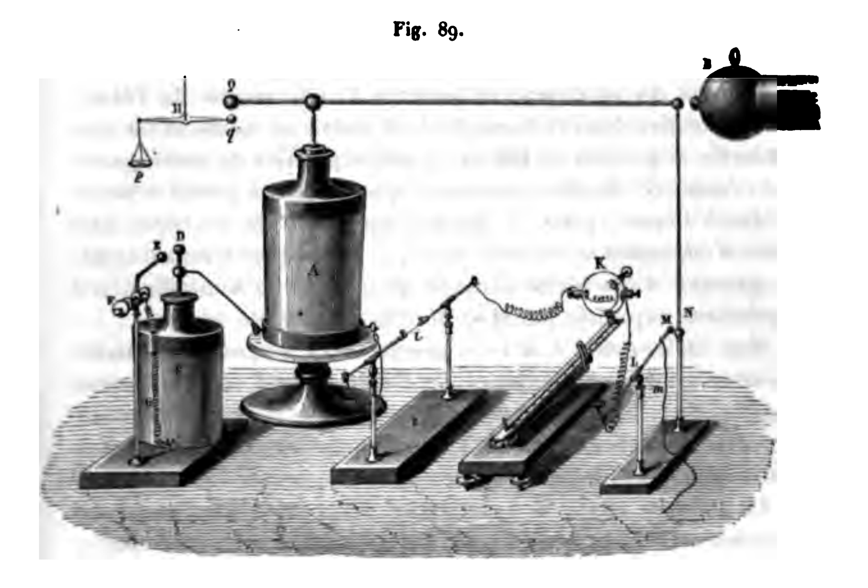
$$(2) \qquad \mathfrak{T} = \int_V^0 -\,dV = V.$$

Ainsi le potentiel en un point est *le travail effectué par les forces électriques sur l'unité d'électricité supposée placée en ce point, quand celle-ci s'éloigne jusqu'à l'infini.* On peut dire aussi que c'est *le travail qu'il faut dépenser pour amener l'unité d'électricité depuis l'infini jusqu'au point* P. Ce travail est indépendant du chemin suivant lequel le déplacement est effectué.

ralement très-petit, $T - t'$ sera sensiblement égal à l'élévation de température $T - t = \theta$ que le fil a éprouvée par l'effet de la décharge.

D'autre part, l'échauffement de l'air amène le niveau du

Fig. 89.



liquide de M en N, et il est clair que, toutes choses égales d'ailleurs, $t' - t$ est proportionnel à MN; on peut donc écrire

$$T - t' = \theta = \frac{p_1 c_1}{pc} \alpha \overline{MN}.$$

α est un facteur qu'il est facile de calculer et qui dépend de la sensibilité du thermomètre, de l'inclinaison qu'on lui donne et enfin de la pression et de la température initiales. Mais, quand ces causes de variation restent les mêmes, on voit qu'il n'est pas nécessaire de calculer α, et qu'on peut prendre $\frac{MN}{pc}$ pour la mesure de l'échauffement θ d'un fil quelconque en fonction d'une unité arbitraire, mais constante.

III. Il faut enfin savoir mesurer la quantité d'électricité qui est accumulée sur la batterie A (*fig.* 89), et qui produit l'élé-

Dans ceux-ci on peut mettre m en facteur, et la somme partielle correspondante est

$$-md\sum\frac{m'}{r}=-md\mathrm{V},$$

V étant le potentiel en A. On aura de même, pour la somme des termes contenant m', $m'd\mathrm{V}'$, ...

Mais il évident qu'en formant toutes ces sommes individuelles on prend chaque terme élémentaire, tel que $\frac{mm'}{r^2}dr$, deux fois, une fois avec m, une fois avec m'. La quantité $d\mathrm{T}$ est donc seulement la demi-somme des produits $-md\mathrm{V}$,

$$d\mathrm{T}=-\tfrac{1}{2}(md\mathrm{V}+m'd\mathrm{V}'+\ldots).$$

Posons $d\mathrm{T}=-d\mathrm{W}$. La fonction W aura pour expression, à une constante près,

$$\mathrm{W}=\tfrac{1}{2}(m\mathrm{V}+m'\mathrm{V}'+\ldots);$$

on fait, par convention, la constante égale à zéro.

Si, au lieu de considérer n points, on considère n conducteurs, A_1, A_2, ayant respectivement les charges M_1, M_2, ... et les potentiels V_1, V_2, ..., on remarquera que le potentiel est constant dans chacun d'eux et que, par suite, on peut mettre V_1 en facteur dans tous les termes qui se rapportent à un même corps A_1. Le multiplicateur de V_1 est la somme des charges de tous les éléments de surface dont le corps se compose, c'est-à-dire sa charge totale M_1. On a donc

$$(3)\qquad \mathrm{W}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{M}_1\mathrm{V}_1+\mathrm{M}_2\mathrm{V}_2+\ldots)=\tfrac{1}{2}\Sigma\,\mathrm{MV}.$$

La fonction W s'appelle l'énergie électrique du système. Elle représente *le travail qu'effectueraient les forces électriques, si tous les corps du système revenaient au potentiel zéro*, ou *le travail qu'il faudrait faire à l'encontre de ces forces pour porter le corps* A_1 *du potentiel* o *au potentiel* V_1, *le corps* A_2 *du potentiel* o *au potentiel* V_2, *etc., dans la situation qu'ils occupent.*

Quand un corps est en communication avec le sol, son

ment on déterminera l'élévation de température θ que la décharge de cette batterie déterminera dans le fil d'un thermomètre électrique. Voici comment les expériences étaient disposées (*fig.* 89).

L'extérieur de la batterie A communique, d'une part, à la bouteille électrométrique C, destinée à la fois à mesurer la charge et à répandre dans le sol l'électricité positive repoussée par A; d'autre part, avec une série d'appareils isolés, qui sont : 1° un excitateur universel I, dans lequel on pourra intercaler telle résistance t qu'on voudra; 2° le thermomètre électrique K; 3° un déchargeur compose d'une tige métallique LM qu'on fait tomber, en la tirant par un cordon de soie m, sur le conducteur N, qui communique avec la machine électrique B, et avec l'armature intérieure de la batterie. Grâce à cette disposition, on charge peu à peu cette batterie, on compte le nombre M des étincelles qui se produisent en ED, ensuite on fait agir le levier MN; la décharge a lieu, on mesure le mouvement du thermomètre et l'on peut calculer θ.

Disons maintenant comment θ varie quand on change la charge et les diverses circonstances des expériences.

LOIS DES TEMPÉRATURES. — 1° La série des conducteurs que doit traverser la décharge étant quelconque, mais invariable, et le fil de platine du thermomètre étant lui-même quelconque, mais fixe, on mesure son échauffement θ, d'abord quand on donne la même charge M à diverses batteries dont la surface S est différente. M. Riess a trouvé que θ est proportionnel à M^2 et en raison inverse de S :

$$\theta = a\frac{M^2}{S}.$$

2° a est un coefficient qui dépend à la fois de la résistance du circuit total et de celle du fil K : laissons la première constante et faisons varier le fil. A cet effet, M. Riess prenait deux fils de platine, plaçait l'un en K, l'autre en t, et mesurait l'échauffement θ du premier; puis il les changeait de place, ce qui ne faisait pas varier le circuit total, et il déterminait θ' pour le second fil, après avoir rendu à la même batterie la

soit les potentiels, par leurs valeurs

$$M_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots,$$
$$V_1 = K_{11}M_1 + K_{12}M_2 + \ldots,$$

et l'on reconnaît ainsi : 1° *que l'énergie électrique d'un système est une fonction homogène du second degré des potentiels de tous les corps du système;* 2° *que cette énergie est une fonction homogène du second degré des charges de tous les corps du système.*

FORCE EXERCÉE SUR UN CORPS ÉLECTRISÉ. — La variation de l'énergie électrique d'un système de corps qui éprouve une modification quelconque est égale au travail effectué par les forces électriques et de signe contraire. Supposons d'abord que la variation de l'énergie W résulte du déplacement des masses matérielles qui portent les charges électriques, et considérons en particulier le cas d'un corps susceptible de se mouvoir dans un champ électrique et dans une direction déterminée. Soient δx un déplacement infiniment petit effectué dans cette direction, F la force évaluée dans la direction du mouvement. Le travail élémentaire de cette force est $F\delta x$, et la variation correspondante de l'énergie δW;

$$F\delta x = -\delta W,$$
$$F = -\frac{\delta W}{\delta x}.$$

Quand on sait évaluer δW, on en déduit F.

Prenons pour exemple l'aiguille de l'électromètre à quadrants de Sir W. Thomson. Quand elle se déplace d'un angle α, très-petit à partir de la position symétrique, le travail élémentaire des forces agissant sur l'aiguille peut être représenté par $H\alpha$, H étant le moment par rapport à l'axe de rotation des forces auxquelles l'aiguille est soumise [1].

---

[1] Donnons, en effet, au couple un bras de levier égal à 1, ayant l'une de ses extrémités sur l'axe de rotation. Les forces du couple sont numériquement égales à H, l'une, appliquée au point de rotation, effectue un travail nul: l'autre, appliqué à la distance 1, produit un travail $H\alpha$.

momètre; elle est égale au produit du poids $\frac{\pi}{4} d^2 l\rho$ de ce fil par sa chaleur spécifique C et par son élévation de température θ :

$$q = \frac{\pi}{4} d^2 l \rho C \frac{m}{R d^4} \frac{M^2}{S} = \frac{\pi}{4} \rho C m \frac{1}{R} \frac{l}{d^2} \frac{M^2}{S}.$$

En remarquant que $\frac{l}{d^2}$ est proportionnel à la résistance r du fil considéré, et en réunissant tous les coefficients numériques en un seul égal à K, on a

$$(9) \qquad q = K \frac{r}{R} \frac{M^2}{S}.$$

Cette quantité de chaleur est dégagée pendant le temps très-court de la décharge. Elle est très-grande, parce que V et par suite M sont très-grands.

Le coefficient K ne pourrait varier qu'avec la nature des diverses substances employées; mais, si tous les conducteurs qui composent le circuit sont formés d'un même métal, on aura pour chacun d'eux

$$q_1 = K \frac{r_1}{R} \frac{M^2}{S}, \quad q^2 = K \frac{r_2}{R} \frac{M^2}{S}, \quad \ldots,$$

et la somme de ces quantités, ou la chaleur totale développée dans le circuit, sera

$$(10) \qquad Q = \frac{K}{R} (r_1 + r_2 + \ldots) \frac{M^2}{S} = K \frac{M^2}{S}.$$

Elle sera indépendante de la résistance du circuit et ne variera qu'avec la charge et la surface de la batterie.

Quand une batterie est formée de bouteilles égales, sa surface S est proportionnelle au nombre de bouteilles, et la quantité de chaleur Q, développée par une charge fixe M, est d'autant plus faible que le nombre des bouteilles est plus grand.

Mais si, au lieu de charger diverses batteries avec le même nombre d'étincelles, on les charge au même potentiel, les choses ne se passent plus de la même manière. En effet, le potentiel est proportionnel à $\frac{M}{S}$, et par conséquent la quantité de

drant varient par la rotation proportionnellement à l'angle α

$$\delta C_{22} = \quad p\alpha,$$
$$\delta C_{12} = -q\alpha.$$

C_{22}, C_{12} sont les charges de l'aiguille et d'une paire de quadrants lorsque cette dernière est au potentiel 1, l'autre paire de quadrants et l'aiguille elle-même au potentiel zéro. Or, le système ainsi formé est un condensateur, et quand la surface de l'aiguille recouverte par le quadrant au potentiel 1 augmente par suite de la rotation α, les charges contraires de l'aiguille et du quadrant croissent de petites quantités égales, proportionnelles à α, donc $p = q$,

$$\delta C_{22} = -\delta C_{12} = p\alpha.$$

Par suite

$$\delta W = \tfrac{1}{2} p\alpha [V^2 - V'^2 - 2V_0(V - V')]$$
$$= p\alpha\left(V_0 - \frac{V + V'}{2}\right)(V' - V).$$

Mais

$$\delta W = -H\alpha,$$
$$H = p\left(V_0 - \frac{V + V'}{2}\right)(V - V').$$

C'est la formule dont nous avons annoncé la démonstration p. 222.

DÉCHARGES ÉLECTRIQUES. — Ce n'est pas seulement par le déplacement des masses matérielles que peut varier l'énergie électrique d'un système : elle est aussi modifiée par l'écoulement de l'électricité d'un corps sur un autre.

Dans le premier cas, les corps déplacés acquièrent une force vive sensible, équivalente au travail dépensé, c'est-à-dire à l'abaissement de l'énergie électrique.

Dans le second, et sous la condition expresse que l'écoulement de l'électricité ne soit accompagné d'aucun effet mécanique proprement dit, la diminution de l'énergie électrique a pour équivalent la production d'une certaine quantité de chaleur, et, conformément aux principes qui seront exposés ultérieurement (voir *Théorie mécanique de la chaleur*, t. II,

CHAPITRE XIII.

DÉCHARGE DISRUPTIVE.

Effets généraux des décharges électriques. — Fusion et volatilisation des métaux. — Inflammation des corps combustibles et des mélanges détonants. — Décompositions chimiques produites par la décharge. — Effets mécaniques des décharges électriques. — Effets physiologiques.
De la décharge dans les gaz. — Aigrettes. — Étincelles. — Influence de la pression. — Cas des gaz très-raréfiés. — Spectre de l'étincelle. — Chaleur développée par l'étincelle. — Sa température. — Différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle. — Non-conductibilité du vide. — Durée de l'étincelle.

EFFETS GÉNÉRAUX DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES.

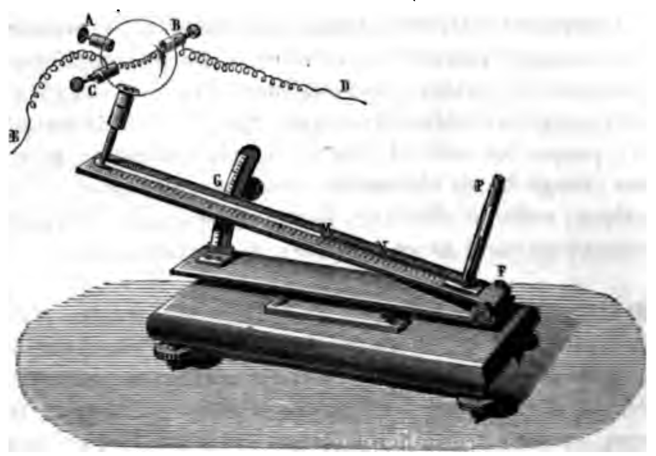
Après avoir mesuré, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, l'énergie totale d'une décharge qui se transforme intégralement en chaleur à travers des conducteurs, il nous reste à décrire, et à étudier, tout au moins qualitativement, les effets variés que la décharge électrique peut produire. Beaucoup d'entre eux sont encore trop mal connus pour qu'on puisse essayer avec quelque profit d'en faire une théorie générale; nous nous bornerons à classer les faits principaux, sans nous préoccuper outre mesure d'établir entre eux un lien logique définitif.

FUSION ET VOLATILISATION DES MÉTAUX. — Quand le circuit conducteur ne comprend, outre l'excitateur, qu'un fil court et mince ou une feuille métallique de très faible épaisseur, l'étincelle devient très bruyante, et la chaleur dégagée dans le fil ou la feuille peut suffire pour la fondre ou la volatiliser. On répète à cet égard dans les Cours les expériences suivantes. Des fils métalliques de diverse nature et de très faible

avec une tige de verre graduée MNP, dans laquelle est une colonne d'un liquide coloré; son support peut se mouvoir autour d'une charnière F et se fixer par une vis G, ce qui permet d'incliner plus ou moins la tige; le ballon porte deux tubulures opposées B et C, que l'on peut fermer par des bou-



Fig. 88.



chons métalliques rodés et entre lesquels on dispose un fil de platine BC enroulé en spirale, terminé aux deux poupées B et C, et à travers lequel on fait passer la décharge.

Cette décharge échauffe le fil et le porte de t à T. Comme elle est pour ainsi dire instantanée, le fil se refroidit aussitôt qu'elle a passé et se met en équilibre de température avec l'air du ballon, qui s'échauffe de t à t'.

Cet air, à son tour, finit par céder sa chaleur au ballon; mais, comme ce dernier effet est très-lent, on admet qu'il est négligeable dans les premiers moments. Alors, si l'on désigne par p, p_1, c, c_1 les poids et les chaleurs spécifiques du fil et de l'air, on a

$$pc(T - t') = p_1 c_1 (t' - t),$$

équation qui permettra de calculer $T - t'$ quand on connaîtra l'échauffement du ballon ou $t' - t$; et, comme $t' - t$ est géné-

CHAPITRE XIII.

DÉCHARGE DISRUPTIVE.

Effets généraux des décharges électriques. — Fusion et volatilisation des métaux. — Inflammation des corps combustibles et des mélanges détonants. — Décompositions chimiques produites par la décharge. — Effets mécaniques des décharges électriques. — Effets physiologiques. De la décharge dans les gaz. — Aigrettes. — Étincelles. — Influence de la pression. — Cas des gaz très-raréfiés. — Spectre de l'étincelle. — Chaleur développée par l'étincelle. — Sa température. — Différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle. — Non-conductibilité du vide. — Durée de l'étincelle.

EFFETS GÉNÉRAUX DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES.

Après avoir mesuré, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, l'énergie totale d'une décharge qui se transforme intégralement en chaleur à travers des conducteurs, il nous reste à décrire, et à étudier, tout au moins qualitativement, les effets variés que la décharge électrique peut produire. Beaucoup d'entre eux sont encore trop mal connus pour qu'on puisse essayer avec quelque profit d'en faire une théorie générale; nous nous bornerons à classer les faits principaux, sans nous préoccuper outre mesure d'établir entre eux un lien logique définitif.

FUSION ET VOLATILISATION DES MÉTAUX. — Quand le circuit conducteur ne comprend, outre l'excitateur, qu'un fil court et mince ou une feuille métallique de très faible épaisseur, l'étincelle devient très bruyante, et la chaleur dégagée dans le fil ou la feuille peut suffire pour la fondre ou la volatiliser. On répète à cet égard dans les Cours les expériences suivantes. Des fils métalliques de diverse nature et de très faible

vation de température θ en s'écoulant dans le fil. A cet effet, on isole la batterie, on met son armature extérieure en communication avec l'intérieur d'une bouteille électrométrique de Lane C, qui est posée sur un sol conducteur et dont les deux armatures aboutissent aux boutons égaux E et D; ceux-ci peuvent être placés à une distance convenue et invariable au moyen d'une vis micrométrique F.

Pendant qu'on charge la batterie A, elle envoie de l'électricité positive dans la bouteille C; il arrive un moment où une étincelle se produit en ED par la recomposition de deux quantités égales de fluides contraires, que M. Riess prend comme égales à l'unité; puis, la charge continuant de se faire, une série d'étincelles se succèdent, et, si M est leur nombre total, la quantité d'électricité positive qu'a reçue la bouteille C est également exprimée par M en fonction de l'unité adoptée.

Mais la bouteille C a reçu précisément autant d'électricité positive qu'il s'est condensé de fluide négatif sur l'armature externe de la batterie A; donc M représente la charge négative de cette batterie, et aussi sa charge positive, puisque toutes deux sont sensiblement égales.

La quantité totale M d'électricité accumulée sur l'armature intérieure de la batterie s'étale sur sa surface S en une couche uniforme dont la densité est $\frac{M}{S}$; le potentiel V est proportionnel à la même quantité. C'est ce que M. Riess a montré directement au moyen d'un électromètre à poids H, formé par un fléau de balance isolé, chargé d'un poids p et maintenu sous le conducteur Q. Au moment où la tension atteint une certaine limite sur le conducteur Q et sur l'extrémité q du bras de levier, la force répulsive qui se produit entre eux devient égale au poids p et fait baisser le fléau; et, comme cette force est proportionnelle au carré du potentiel qui règne à cet instant sur l'armature, V est proportionnelle à $\sqrt{p}$. Or on trouve que le potentiel ainsi mesuré est proportionnel à $\frac{M}{S}$, comme on l'avait prévu.

On voit donc : 1° comment on pourra mesurer en unités arbitraires la charge M et le potentiel V de la batterie; 2° com-

CHAPITRE XIII.

DÉCHARGE DISRUPTIVE.

Effets généraux des décharges électriques. — Fusion et volatilisation des métaux. — Inflammation des corps combustibles et des mélanges détonants. — Décompositions chimiques produites par la décharge. — Effets mécaniques des décharges électriques. — Effets physiologiques. De la décharge dans les gaz. — Aigrettes. — Étincelles. — Influence de la pression. — Cas des gaz très-raréfiés. — Spectre de l'étincelle. — Chaleur développée par l'étincelle. — Sa température. — Différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle. — Non-conductibilité du vide. — Durée de l'étincelle.

EFFETS GÉNÉRAUX DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES.

Après avoir mesuré, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, l'énergie totale d'une décharge qui se transforme intégralement en chaleur à travers des conducteurs, il nous reste à décrire, et à étudier, tout au moins qualitativement, les effets variés que la décharge électrique peut produire. Beaucoup d'entre eux sont encore trop mal connus pour qu'on puisse essayer avec quelque profit d'en faire une théorie générale; nous nous bornerons à classer les faits principaux, sans nous préoccuper outre mesure d'établir entre eux un lien logique définitif.

FUSION ET VOLATILISATION DES MÉTAUX. — Quand le circuit conducteur ne comprend, outre l'excitateur, qu'un fil court et mince ou une feuille métallique de très faible épaisseur, l'étincelle devient très bruyante, et la chaleur dégagée dans le fil ou la feuille peut suffire pour la fondre ou la volatiliser. On répète à cet égard dans les Cours les expériences suivantes. Des fils métalliques de diverse nature et de très faible

même charge que précédemment. Il trouva que θ et θ' sont indépendants de la longueur et en raison inverse de la quatrième puissance du diamètre d des fils échauffés; d'où il suit que a est égal à $\frac{d^4}{b}$ et que l'on a

$$\theta = \frac{b}{d^4}\frac{M^2}{S}.$$

3° M. Riess ayant toujours placé dans son thermomètre des fils de platine, on ne peut induire de ces expériences si b change, toutes choses égales d'ailleurs, avec la conductibilité du métal.

4° Mais b dépend du circuit total qui joint les deux armatures. Mesurons θ et calculons b quand la résistance de ce circuit est quelconque et égale à R, puis ajoutons extérieurement en i, entre les branches de l'excitateur, un fil dont la longueur, le diamètre et la conductibilité soient λ, δ et c; sa résistance est $\frac{4\lambda}{\pi\delta^2 c}$ et celle du circuit devient R' :

$$R' = R + \frac{4\lambda}{\pi\delta^2 c} = R\left(1 + \frac{4}{\pi R}\frac{\lambda}{\delta^2}\right) = R\left(1 + \frac{p\lambda}{\delta^2}\right);$$

elle a augmenté dans le rapport de $1 + \frac{p\lambda}{\delta^2}$ à 1. D'un autre côté, b s'est changé en b', et l'expérience prouve que l'on a

$$\frac{b'}{b} = \frac{1 + \frac{p\lambda}{\delta^2}}{1} = \frac{R}{R'}.$$

Par conséquent, le coefficient b est en raison inverse de la résistance totale du circuit ou égal à $\frac{m}{R}$, m étant une nouvelle constante; on a donc

$$(8) \qquad \theta = \frac{m}{Rd^4}\frac{M^2}{S}.$$

Lois des quantités de chaleur. — On peut maintenant calculer la quantité de chaleur q développée dans le fil du ther-

CHAPITRE XIII.

DÉCHARGE DISRUPTIVE.

Effets généraux des décharges électriques. — Fusion et volatilisation des métaux. — Inflammation des corps combustibles et des mélanges détonants. — Décompositions chimiques produites par la décharge. — Effets mécaniques des décharges électriques. — Effets physiologiques.
De la décharge dans les gaz. — Aigrettes. — Étincelles. — Influence de la pression. — Cas des gaz très-raréfiés. — Spectre de l'étincelle. — Chaleur développée par l'étincelle. — Sa température. — Différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle. — Non-conductibilité du vide. — Durée de l'étincelle.

EFFETS GÉNÉRAUX DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES.

Après avoir mesuré, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, l'énergie totale d'une décharge qui se transforme intégralement en chaleur à travers des conducteurs, il nous reste à décrire, et à étudier, tout au moins qualitativement, les effets variés que la décharge électrique peut produire. Beaucoup d'entre eux sont encore trop mal connus pour qu'on puisse essayer avec quelque profit d'en faire une théorie générale; nous nous bornerons à classer les faits principaux, sans nous préoccuper outre mesure d'établir entre eux un lien logique définitif.

FUSION ET VOLATILISATION DES MÉTAUX. — Quand le circuit conducteur ne comprend, outre l'excitateur, qu'un fil court et mince ou une feuille métallique de très faible épaisseur, l'étincelle devient très bruyante, et la chaleur dégagée dans le fil ou la feuille peut suffire pour la fondre ou la volatiliser. On répète à cet égard dans les Cours les expériences suivantes. Des fils métalliques de diverse nature et de très faible

chaleur produite Q est proportionnelle à SV^2, c'est-à-dire à la surface totale, ou, ce qui revient au même, au nombre des bouteilles.

La valeur du coefficient K n'a pu être fixée par M. Riess, puisque, dans ces expériences, toutes les quantités sont évaluées en unités arbitraires. La théorie permet d'aller plus loin. Nous avons en effet, pour équivalent mécanique de la décharge (5 *bis*),

$$W = 2\pi e \frac{M^2}{S}.$$

Son équivalent calorifique est

$$(11) \qquad Q = \frac{W}{E} = 2\pi \frac{e}{E} \frac{M^2}{S}.$$

Cette équation, identifiée avec l'équation (10), donne

$$(12) \qquad K = 2\pi \frac{e}{E}.$$

e est l'épaisseur de la lame isolante, E le nombre qui exprime l'équivalent mécanique de la chaleur ([1]).

Il faut toutefois observer que la formule théorique n'a été démontrée que pour le cas d'un condensateur à lame d'air. La valeur de K serait différente pour les condensateurs ordinaires, à cause du pouvoir inducteur spécifique de la lame isolante.

CASCADES. — M. Riess a fait aussi des expériences sur les batteries chargées en cascade.

Soient n bouteilles égales $A_1, A_2, \ldots, A_n$, disposées de telle sorte que l'armature interne A_1 de la première soit en relation avec une source au potentiel V, son armature interne en relation avec l'armature interne de A_2, etc., enfin l'armature externe de la dernière bouteille A_n en communication avec le sol. On dit qu'un tel système forme une *cascade*. Désignons par V_1 le potentiel commun à l'armature interne de A^2 et à l'armature externe de A_1, et de même par V_2, V_3 les potentiels successifs des $n - 1$ conducteurs intermédiaires, formés cha-

([1]) *Voir* t. II, 2e fascicule.

CHAPITRE XIII.

DÉCHARGE DISRUPTIVE.

Effets généraux des décharges électriques. — Fusion et volatilisation des métaux. — Inflammation des corps combustibles et des mélanges détonants. — Décompositions chimiques produites par la décharge. — Effets mécaniques des décharges électriques. — Effets physiologiques.
De la décharge dans les gaz. — Aigrettes. — Étincelles. — Influence de la pression. — Cas des gaz très-raréfiés. — Spectre de l'étincelle. — Chaleur développée par l'étincelle. — Sa température. — Différence de potentiel nécessaire pour produire l'étincelle. — Non-conductibilité du vide. — Durée de l'étincelle.

EFFETS GÉNÉRAUX DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES.

Après avoir mesuré, comme nous l'avons fait dans le Chapitre précédent, l'énergie totale d'une décharge qui se transforme intégralement en chaleur à travers des conducteurs, il nous reste à décrire, et à étudier, tout au moins qualitativement, les effets variés que la décharge électrique peut produire. Beaucoup d'entre eux sont encore trop mal connus pour qu'on puisse essayer avec quelque profit d'en faire une théorie générale; nous nous bornerons à classer les faits principaux, sans nous préoccuper outre mesure d'établir entre eux un lien logique définitif.

FUSION ET VOLATILISATION DES MÉTAUX. — Quand le circuit conducteur ne comprend, outre l'excitateur, qu'un fil court et mince ou une feuille métallique de très faible épaisseur, l'étincelle devient très bruyante, et la chaleur dégagée dans le fil ou la feuille peut suffire pour la fondre ou la volatiliser. On répète à cet égard dans les Cours les expériences suivantes. Des fils métalliques de diverse nature et de très faible

Lorsqu'on dispose d'un potentiel donné V, l'énergie varie en raison inverse du nombre des bouteilles; mais, pour une charge déterminée, l'énergie est au contraire proportionnelle au nombre des bouteilles.

Ces résultats, ainsi que tous ceux qui précèdent, ont été trouvés expérimentalement par M. Riess, longtemps avant qu'on les eût déduits de la théorie du potentiel.

---

si la batterie était chargée à la manière ordinaire; mais, pour une charge M donnée, elle est n^2 fois plus forte. Suivant le cas, on préférera donc la charge en quantité (pour un potentiel donné) ou la charge en tension (pour une quantité donnée d'électricité).

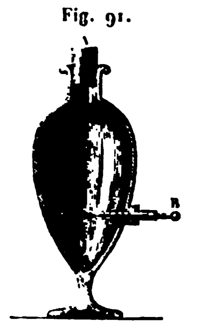
Nombre de tours de la machine.	Longueur de fil fondu.	Longueur calculée pour 10 tours.
90	550	6,9.
80	420	6,6
60	240	6,6
55	200	6,6
50	170	6,8
40	110	6,9

De cette loi résulte un procédé commode pour la comparaison approximative et rapide des décharges électriques.

INFLAMMATION DES CORPS COMBUSTIBLES ET DES MÉLANGES DÉTONANTS. — Quand l'étincelle jaillit à travers un corps solide ou liquide, combustible ou détonant, elle peut en déterminer l'inflammation. Ainsi l'on enflamme de l'éther, de l'essence de térébenthine, on fait détoner de la poudre de guerre, de la dynamite, etc. Cette propriété de l'étincelle paraît être une simple conséquence de l'élévation de température qu'elle produit sur son trajet : on sait les nombreuses applications qu'elle a reçues en pyrotechnie.

L'étincelle produit encore l'inflammation des mélanges gazeux détonants qu'elle traverse. On le montre dans les Cours à l'aide du pistolet de Volta. C'est un vase métallique dans lequel pénètre une tige isolée BC (*fig.* 91) qu'on électrise de manière à faire jaillir une étincelle entre cette tige et la paroi métallique en communication avec le sol par la main de l'expérimentateur. On a introduit dans le vase une certaine quantité d'hydrogène, de façon à chasser une partie de l'air dont il était primitivement rempli et à former avec l'autre un mélange détonant. C'est l'inflammation de ce mélange gazeux qui projette au loin le bouchon A au moment de la décharge.

Fig. 91.



Gay-Lussac utilisa cette expérience pour l'analyse des mélanges gazeux : son eudiomètre à eau n'est en effet qu'un pistolet de Volta modifié, de manière à permettre de recueillir et de mesurer le résidu gazeux de la décharge.

diamètre sont tendus sur un carton blanc; on fait traverser successivement chacun d'eux par des décharges égales obtenues, par exemple, à l'aide d'une même batterie chargée par le même nombre de tours d'une machine électrique. Les fils les plus résistants peuvent être volatilisés, tandis que d'autres plus conducteurs ne le sont pas : une trace noire dentelée marque sur le papier la place où était tendu le fil.

On peut encore placer une feuille à dorure sur une carte découpée qui représente le portrait de Franklin : on dépose cette carte sur une lame de verre ou sur un ruban de soie et l'on presse les trois surfaces l'une sur l'autre à l'aide de l'appareil représenté par la *fig.* 90. Au passage de la décharge la feuille

Fig. 90.



d'or se volatilisé, passe à travers les découpures et imprime le portrait sur le verre ou sur la soie.

Les expériences de Van Marum ([1]) et de M. Mascart ([2]) ont établi qu'il y a proportionnalité à peu près exacte entre l'énergie d'une décharge et la longueur d'un fil de nature et de diamètre donnés qu'elle est susceptible de fondre. Le Tableau suivant de l'une des expériences de M. Mascart indique d'une part les longueurs d'un fil de cuivre fondues par la décharge d'une batterie, d'autre part le nombre de tours imprimés à la machine pour charger la batterie : ce nombre est proportionnel à la quantité d'électricité mise en jeu par la décharge. On voit que les longueurs sont proportionnelles aux carrés des nombres de tours.

([1]) Première continuation des expériences, etc., p. 8.

([2]) *Traité d'électricité statique*, t. II, p. 327.

Nombre de tours de la machine.	Longueur de fil fondu.	Longueur calculée pour 10 tours.
90	550	6,9.
80	420	6,6
60	240	6,6
55	200	6,6
50	170	6,8
40	110	6,9

De cette loi résulte un procédé commode pour la comparaison approximative et rapide des décharges électriques.

INFLAMMATION DES CORPS COMBUSTIBLES ET DES MÉLANGES DÉTONANTS. — Quand l'étincelle jaillit à travers un corps solide ou liquide, combustible ou détonant, elle peut en déterminer l'inflammation. Ainsi l'on enflamme de l'éther, de l'essence de térébenthine, on fait détoner de la poudre de guerre, de la dynamite, etc. Cette propriété de l'étincelle paraît être une simple conséquence de l'élévation de température qu'elle produit sur son trajet : on sait les nombreuses applications qu'elle a reçues en pyrotechnie.

L'étincelle produit encore l'inflammation des mélanges gazeux détonants qu'elle traverse. On le montre dans les Cours à l'aide du pistolet de Volta. C'est un vase métallique dans lequel pénètre une tige isolée BC (*fig.* 91) qu'on électrise de manière à faire jaillir une étincelle entre cette tige et la paroi métallique en communication avec le sol par la main de l'expérimentateur. On a introduit dans le vase une certaine quantité d'hydrogène, de façon à chasser une partie de l'air dont il était primitivement rempli et à former avec l'autre un mélange détonant. C'est l'inflammation de ce mélange gazeux qui projette au loin le bouchon A au moment de la décharge.

Fig. 91.



Gay-Lussac utilisa cette expérience pour l'analyse des mélanges gazeux : son eudiomètre à eau n'est en effet qu'un pistolet de Volta modifié, de manière à permettre de recueillir et de mesurer le résidu gazeux de la décharge.

DÉCOMPOSITIONS CHIMIQUES PRODUITES PAR LA DÉCHARGE. — 1. Certains corps composés, l'ammoniaque par exemple, sont détruits par une élévation de température atteignant le rouge; mais, comme ces corps sont formés avec dégagement de chaleur, ils ne peuvent être détruits qu'en absorbant une quantité de chaleur égale : il en résulte qu'une étincelle électrique unique ne poura détruire qu'un poids de gaz extrêmement minime. Pour décomposer quelques centimètres cubes de gaz, il faudra un nombre d'étincelles considérable.

Quelques composés gazeux éprouvent par l'action d'une série d'étincelles une décomposition partielle, qu'on peut ne pas observer quand on se borne à les faire passer dans un tube chauffé au rouge. Mais si, dans l'axe du tube chaud, on établit un tube métallique traversé par un rapide courant d'eau froide, on constate la dissociation du composé gazeux. M. Sainte-Claire Deville, auquel on doit cette disposition ingénieuse, a voulu imiter ainsi les alternatives de chaud et de froid auxquelles doivent se trouver soumises les molécules gazeuses portées à l'incandescence par le passage de l'étincelle, puis subitement refroidies au contact des parois du vase et du gaz froid ambiant. Dans les deux expériences, les gaz dissociés à très haute température échappent à la recombinaison par la rapidité de leur refroidissement.

2. On ne saurait affirmer toutefois que l'action de l'étincelle dans les cas qui précèdent se réduise absolument à l'élévation de température qu'elle provoque. Certains corps détruits par la chaleur se produisent sous l'influence de la décharge, principalement quand elle est diffuse et qu'elle ne donne lieu qu'à de faibles échauffements. Ainsi la décharge électrique obscure transforme l'oxygène en ozone : elle produit les acides persulfurique [1] et perazotique [2], engendre les divers composés oxygénés de l'iode [3], enfin elle permet d'obtenir un

[1] Berthelot, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 23.

[2] Chappuis et Hautefeuille, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 81.

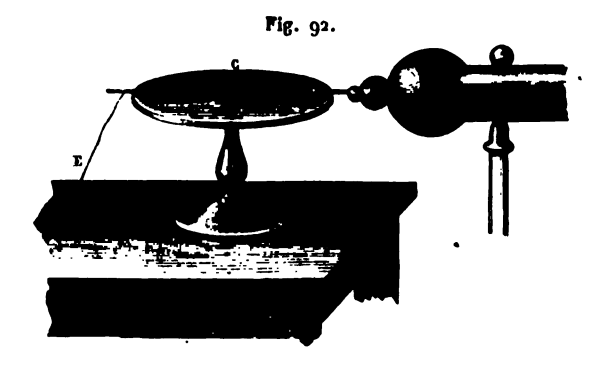
[3] Ogier, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV, p. 157.

assez grand nombre de composés organiques qu'on ne sait pas préparer d'une autre façon. La manière dont l'étincelle agit dans ce cas est absolument inconnue.

III. Quand une décharge électrique traverse un liquide conducteur, elle en provoque l'*électrolyse*. On désigne sous ce nom un mode spécial de décomposition produit par les courants et qui sera étudié en son lieu avec tous les développements qu'il comporte. Il suffit pour le moment de savoir que le métal d'un sel électrolysé se porte seul à l'électrode négative, les autres éléments à l'électrode positive.

Pour montrer l'électrolyse produite par la décharge, on peut, par exemple, disposer sur une lame de verre deux feuilles de papier humide B et D (*fig.* 92), l'une imprégnée de sulfate de

Fig. 92.



potasse et de teinture de tournesol rouge, l'autre du même sel et de teinture de tournesol bleue; on fait communiquer le conducteur de la machine électrique avec B et on relie B à D par un fil métallique C, ou simplement on taille les deux feuilles B et D en pointe du côté où elles se regardent; enfin on fait communiquer D avec le sol. Le papier B bleuit à l'extrémité voisine de D, D rougit à l'extrémité voisine de B; le potassium s'est donc porté au pôle négatif, où il a décomposé l'eau pour former de la potasse; l'acide s'est porté au pôle positif avec l'oxygène.

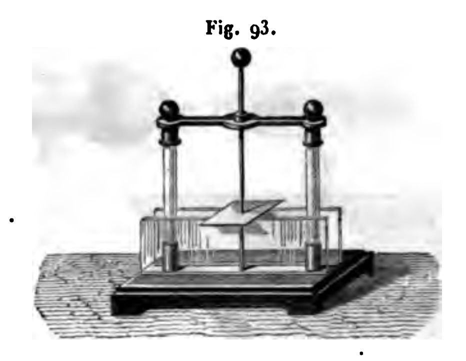
On peut aussi employer un papier imprégné d'iodure de potassium et d'amidon. Ce papier bleuit au pôle positif et l'iode

est mis en liberté. Cette disposition des expériences est due à Faraday (1).

La chaleur nécessaire à la décomposition électrolytique des sels est empruntée à l'énergie de la décharge; comme cette chaleur est en général très grande et l'énergie d'une décharge unique très minime, il en faut un nombre extrêmement grand pour mettre en liberté une quantité de métal appréciable.

EFFETS MÉCANIQUES DES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES. — 1° *Cas des solides.* — Quand une décharge électrique traverse un corps isolant, elle le brise ou le déchire. Par exemple, séparons l'un de l'autre deux conducteurs aigus par une lame de verre bien sèche (*fig.* 93), en ayant soin de déposer une goutte d'huile

Fig. 93.



sur les pointes, ou mieux de les mastiquer dans deux cylindres de résine collés sur les deux faces du verre, afin d'empêcher la décharge latérale; faisons communiquer les deux conducteurs avec les armatures d'une batterie ou même avec les deux pôles d'une machine de Holtz munie de son condensateur; il

(1) *Experimental researches*, t. I, p. 127. — Longtemps avant Faraday, Paets van Troostwyck et Deiman avaient constaté que l'eau se décompose quand on y fait passer des étincelles entre deux fils d'or ou de platine, distants de quelques millimètres, et Pearson (*Phil. Trans.*, 1797) avait reconnu qu'il se dégage dans cette expérience un gaz tonnant.

Wollaston (*Phil. Trans.*, 1801), et après lui Faraday, imaginèrent de mettre en relation deux points voisins du liquide, l'un avec la machine électrique, l'autre avec le sol, comme nous l'avons indiqué.

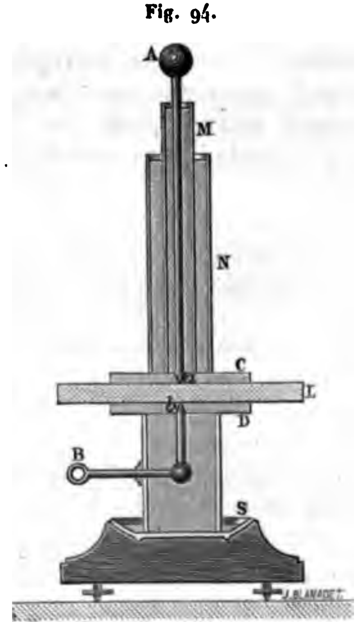
se produit dans le verre un trou extrêmement mince que l'on distingue cependant très bien, grâce à la réflexion irrégulière de la lumière sur ses bords ([1]).

De même une carte placée entre deux pointes peu éloignées est percée et le trou a les bords relevés sur les deux faces, comme si la matière de la carte avait été soulevée et repoussée dans les deux sens à la fois. Le trou est toujours plus rapproché de la pointe négative que de la pointe positive, mais il est au milieu de leur intervalle dans l'air raréfié.

On peut admettre que la décharge est précédée d'une polari-

([1]) MM. Terquem et Trannin (*Journal de Physique*, t. IV, p. 120) terminent les deux tiges conductrices du perce-verre par des points engagés dans des

Fig. 94.



lames de verre L, L', entre lesquelles on dispose la lame à percer, recouverte d'huile d'olive sur ses deux faces. Les tiges elles-mêmes sont entourées de tubes de verre remplis d'un mélange de cire et de résine fondue qui adhère au verre, de sorte que l'appareil se monte et se démonte sans difficulté et peut servir un nombre de fois indéfini (*fig.* 94).

sation du corps diélectrique et ne se produit que lorsque la tension à la surface des corpuscules conducteurs (*voir* p. 177) est suffisante pour vaincre la résistance de l'espace mauvais conducteur intermoléculaire : aussi la décharge ne traverse-t-elle pas une lame de verre trop épaisse. Quand elle passe, on peut attribuer la déchirure produite soit à la pression électrique exercée sur le milieu interposé par l'électricité inverse de deux corpuscules conducteurs en regard, et alors l'action de la décharge serait purement mécanique; ou bien encore on peut admettre que le milieu, étant très résistant, s'échauffe beaucoup aux points traversés par la décharge, et alors la rupture serait une conséquence de la mauvaise conductibilité calorifique du corps isolant.

2° *Cas des liquides*. — Quand la décharge traverse un liquide mauvais conducteur, l'étincelle ne se produit parfois qu'au bout de quelque temps; la secousse imprimée au liquide peut être assez forte pour le projeter de tous côtés et briser le vase. On obtient également cette rupture en faisant passer la décharge au sein du liquide à travers un fil court et assez fin pour être volatilisé.

Une expérience curieuse, et qui montre bien la grande résistance opposée par les liquides au passage de l'électricité, consiste à faire passer l'étincelle entre deux boules, dont l'une A est placée dans l'air, et l'autre B immergée à une très faible profondeur dans un liquide mauvais conducteur. L'étincelle fait la presque totalité de son trajet dans l'air : elle part de A presque horizontalement, de B presque verticalement. Ce phénomène curieux a été désigné, par suite d'une analogie assez vague, sous le non de *réfraction de l'étincelle*.

On peut immerger les deux boules A et B à une très faible profondeur, et alors l'étincelle part normalement des deux boules vers la surface du liquide, la traverse et effectue son trajet dans l'air au voisinage immédiat de la surface.

EFFET PHYSIOLOGIQUE DES DÉCHARGES. — Les décharges électriques produisent sur l'organisme des effets plus ou moins intenses suivant leur nature et la différence de potentiel qui les produit. Un corps électrisé que l'on approche de la joue donne

la sensation du frôlement d'une toile d'araignée. Les petites étincelles produisent l'effet d'une piqûre, celles qui sont plus fortes produisent une commotion plus ou moins violente, mais dont il est impossible de donner une idée précise; il faut l'avoir sentie. Si elle est faible, ce n'est qu'un choc instantané; plus forte, elle laisse des douleurs et un engourdissement prolongé; et, quand elle provient de larges batteries chargées par de puissantes machines, elle foudroie les animaux de la plus grande taille. Ce qui est remarquable, c'est qu'elle contracte les muscles, quoi qu'on fasse pour l'empêcher, et cela donne lieu à une expérience curieuse. On place une pièce de monnaie sur l'une des armatures d'un condensateur à plateau chargé, et l'on se met en communication avec l'autre armature; quand on approche les doigts pour saisir la pièce, ils reçoivent l'étincelle avant de la toucher et se contractent sans pouvoir la prendre.

Quand un grand nombre de personnes se tiennent par les mains pour former une chaîne et que la première et la dernière touchent les armatures d'un condensateur, la décharge traverse toute la série, et chacune reçoit la commotion. Toutefois cette commotion est plus faible au milieu qu'aux extrémités, et cela tient à ce que toutes les personnes communiquant au sol, une partie des fluides se réunit par la terre en passant par les pieds. Si tout le monde était isolé, chacun éprouverait un effet égal.

Dès le moment où l'on a connu ces effets, on a cherché dans l'électricité un remède contre les paralysies; ces tentatives n'ont point été stériles, mais aujourd'hui c'est l'électricité des piles et non celle des batteries que l'on applique à ce traitement: nous aurons l'occasion d'y revenir.

Quant à la manière dont se produisent les actions physiologiques de l'électricité, on peut dire que leur mécanisme intime est aussi complétement inconnu que celui des contractions musculaires développées par l'action de la volonté.

DE LA DÉCHARGE DANS LES GAZ.

La décharge électrique présente, dans les gaz, des formes très différentes, suivant la nature et la pression du gaz et la

valeur de la tension aux points des électrodes entre lesquels jaillit l'étincelle.

1° *Aigrettes*. — Un corps quelconque fortement électrisé paraît environné d'une lueur diffuse, quand on l'observe dans l'obscurité absolue. On peut exagérer cette lueur en activant la déperdition; par exemple, quand le conducteur est en communication permanente avec une bonne machine et se termine par une pointe aiguë, les lueurs électriques prennent au voisinage de la pointe une intensité toute particulière; la pointe paraît surmontée d'une aigrette lumineuse dont la forme diffère suivant que la pointe laisse échapper de l'électricité positive ou négative. L'aigrette positive est brillante et ramifiée; l'aigrette négative, plus pâle, se réduit à une lueur ovoïde séparée de la pointe par un petit intervalle obscur. Telles sont du moins les apparences que l'on observe dans l'air à la pression normale; elles sont moins nettes dans d'autres gaz, et les deux sortes d'aigrettes peuvent devenir alors difficiles à distinguer.

On manifeste parfois la différence d'aspect des deux sortes d'aigrettes en plaçant pendant un instant un plateau isolant de résine ou de caoutchouc durci à peu de distance de la pointe. Pour étudier l'électrisation superficielle produite sur le plateau, on y projette, à l'aide d'un soufflet, un mélange de soufre et de minium en poudre. Ces corps s'électrisent en sens inverse par leur frottement; le soufre prend l'électricité négative et dessine en traits jaunes les plages positives du plateau; le minium électrisé positivement s'attache aux points chargés d'électricité négative. On reconnaît ainsi que l'aigrette positive est caractérisée par une étoile jaune plus ou moins ramifiée, entourée d'un cercle rouge diffus, tandis que l'aigrette négative fournit une tache centrale rouge entourée à quelque distance d'un cercle jaune.

On donne parfois dans les cours une forme plus complexe à cette expérience des *figures de Lichtenberg* (1). On promène sur un gâteau de résine le bouton terminal d'une bouteille de

(1) Lichtenberg, *De nova methodo naturam ac motum fluidi electrici investigandi* (*Novi Comment. Soc. reg. Gœtting.*, t. VIII, p. 168; 1777).

Leyde, de façon à tracer un caractère que l'on rend ensuite visible en projetant à la surface du gâteau le mélange du soufre et du minium. Le trait est ramifié et jaune si l'armature de la bouteille communiquant à la boule est positive ; il est rouge et formé de cercles détachés les uns des autres si elle est négative : dans les deux cas, on observe le résultat de la juxtaposition et de la pénétration partielle d'une série d'aigrettes.

La production des aigrettes est le plus souvent accompagnée d'un bruissement particulier qui révèle la discontinuité du phénomène. Observée dans un miroir tournant, l'aigrette se décompose en effet en aigrettes élémentaires qui se superposent physiologiquement, par suite de la persistance des impressions lumineuses : il suffit même de balancer rapidement la tête par un mouvement de droite à gauche pour reconnaître sa discontinuité.

Étincelle. — Quand deux pointes ou deux petites boules chargées en sens contraire sont rapprochées à une faible distance, et que l'on entretient leur électrisation, comme cela a lieu, par exemple, dans la machine de Holtz, les aigrettes qui partent des deux boules se réunissent en un ovoïde lumineux diffus, dans lequel les caractères particuliers des deux sortes d'aigrettes sont encore reconnaissables ; mais, à mesure que la distance diminue, les lueurs deviennent plus brillantes et mieux définies, et l'on finit par n'apercevoir entre les deux conducteurs qu'un trait lumineux large et uniforme, d'un blanc éblouissant. Le passage de la première forme de décharge à la seconde se fait ainsi d'une manière continue, comme on l'observe très bien à l'aide de la machine de Holtz, quand elle n'est pas munie de son condensateur.

Si l'on ajoute le condensateur, on n'observe plus à toute distance que l'étincelle proprement dite ; rectiligne et d'un blanc vif quand les électrodes sont voisines, elle devient sinueuse quand la distance explosive est plus considérable. Les différences de potentiel nécessaires pour produire la décharge n'ont pas sensiblement changé ; mais, la capacité des conducteurs entre lesquels jaillit l'étincelle étant plus grande, les étincelles sont plus rares et transportent une plus grande

quantité d'électricité; on n'observe si l'on veut qu'une seule branche d'aigrette à la fois, mais sa température est plus élevée et par conséquent son éclat plus considérable.

INFLUENCE DE LA PRESSION. — On peut aussi obtenir la transformation de l'aigrette en étincelle, ou réciproquement, en faisant varier la pression du gaz entre les deux boules sans modifier leur distance. On y parvient à l'aide de *l'œuf électrique*. C'est un ballon de forme ellipsoïdale (*fig.* 95) muni de garnitures métalliques dont l'une, creuse et munie d'un robinet, permet de faire le vide dans l'appareil, tandis que l'autre livre passage, à travers une boîte à cuirs, à la tige mobile A. Quand on met les deux armatures en relation avec les deux pôles d'une machine de Holtz, munie de son condensateur, on voit à la pression ordinaire une série d'étincelles jaillir entre A et B. Si l'on diminue la pression, les étincelles deviennent plus fréquentes et bientôt les aigrettes apparaissent au voisinage des deux boules, dont l'intervalle est rempli d'une lueur ovoïde. Ce phénomène est très net vers la pression de $0^m,05$ à $0^m,06$ de mercure. Quand la pression descend encore au-dessous, les aigrettes elles-mêmes disparaissent et font place à de simples lueurs qui environnent les deux pôles et paraissent séparées par un intervalle totalement obscur.


Fig. 95.



En résumé, la diminution de pression du gaz produit un effet analogue à celui d'une diminution de capacité des électrodes: la charge qu'elles peuvent conserver diminue, par suite les décharges qu'elles produisent à une distance invariable deviennent plus nombreuses et moins nourries. Ces appa-

rences sont une confirmation de ce que nous savions déjà sur les lois de la déperdition dans les gaz raréfiés (*voir* p. 63), d'après les expériences de Matteucci, par exemple.

CAS DES GAZ TRÈS RARÉFIÉS. — Cependant des phénomènes tout particuliers apparaissent quand les gaz sont extrêmement raréfiés; ils ont été observés par MM. Hittorf (¹) et Goldstein (²) et étudiés particulièrement par M. Crookes (³), qui a donné à ces expériences un éclat tout particulier.

Nous supposerons, par exemple, que l'on opère avec un œuf électrique dans lequel la pression a été réduite à quelques millioniémes d'atmosphère; alors l'intérieur de l'appareil demeure presque entièrement obscur, si ce n'est aux points opposés à l'électrode négative : là se développe une phosphorescence remarquable du verre, dont on peut déterminer la forme et l'étendue en menant les trajectoires orthogonales de l'électrode négative. Si l'on donne à celle-ci la forme d'un miroir sphérique concave, ces trajectoires forment un faisceau conique de droites qui coupe la paroi suivant un cercle : la tache phosphorescente demeure immobile, soit qu'on attache le pôle positif en *b*, *c*, *d* [(*fig.* 96) à droite. La figure de gauche montre ce qui se produit quand le gaz est à une pression voisine de la pression atmosphérique]. Quand l'électrode a la forme d'un miroir cylindrique (*fig.* 97), le faisceau de droites présente une arête d'intersection et diverge au delà en une sorte de conoïde rendu visible par la phosphorescence de la paroi. Enfin si, sur le trajet du faisceau, on interpose un obstacle conducteur, tel qu'une croix d'aluminium *b* (*fig.* 98), on en voit l'ombre *cd* se dessiner sur la paroi opposée au milieu de la lueur phosphorescente. Ces phénomènes, que M. Crookes a attribués à un état spécial du gaz, et dont l'explication, encore inconnue, touche sans doute aux propriétés les plus intimes de l'élec-

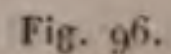
(¹) HITTORFF, *Ann. de Pogg.*, t. CXXXVI, 1869; *Ann. de Wiedemann*, t. VII, 1880.

(²) GOLDSTEIN, *Untersuchungen über die electrische Entladung in Gasen*; Berlin, 1880.

(³) CROOKES, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XIX, p. 195; *Proceedings of the Royal Society*, XXVIII, p. 103, 347; *Philosophical Transactions*, t. VI, p. 11 (1879); *Journal de Physique*, t. IX, p. 30, 37 et 164.

tricité, ne se produisent qu'avec de très fortes tensions : M. Crookes les réalise à l'aide d'une puissante bobine d'induction, mais on peut aussi les obtenir à l'aide de la machine électrique, dans des conditions évidemment plus simples.

Les foyers des trajectoires qui développent la phosphores-


Fig. 96.



cence dans ces expériences sont aussi des foyers calorifiques. M. Crookes a pu y fondre le verre et même le platine.

On peut aussi obtenir, par la décharge dans les gaz raréfiés, des effets mécaniques remarquables, mais pour lesquels il n'est pas nécessaire d'abaisser autant la pression. Un moulinet à ailettes non conductrices (*fig.* 99) tourne comme si ses palettes subissaient le choc d'un fluide matériel issu du pôle négatif; en renversant le sens des décharges, on renverse aussi le signe de

la rotation. On peut encore donner à l'électrode négative elle-

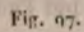


Fig. 97.



même la forme d'un moulinet (*fig.* 100); elle éprouve un mou

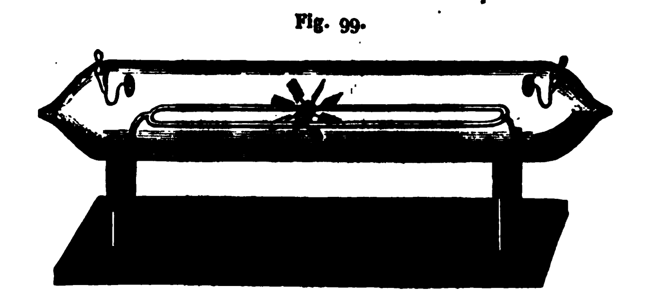
Fig. 98.



vement de recul qui rappelle celui du tourniquet électrique.

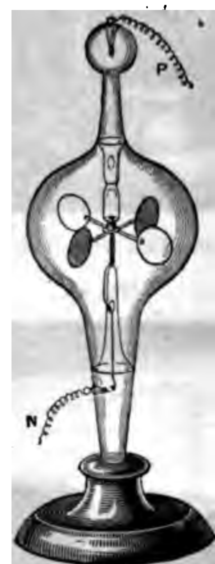
Les trajectoires actives obéissent à l'influence de la main et peuvent aussi être déviées par l'aimant. Nous reviendrons plus

Fig. 99.



tard sur ce dernier phénomène, quand nous aurons étudié l'ac-

Fig. 100.



tion des aimants sur les courants et des courants entre eux.

Le vide absolu paraît absolument dénué de conductibilité et les phénomènes étudiés par M. Crookes s'affaiblissent et

tendent à disparaître quand la raréfaction est poussée au delà d'une certaine limite.

COULEUR DE L'ÉTINCELLE. — L'éclat de l'étincelle, plutôt que sa couleur, change quand on fait varier la pression du gaz; mais, si l'on remplace un gaz par un autre, la couleur de l'étincelle se modifie. D'après Faraday [1], les couleurs dominantes de l'étincelle sont les suivantes :

Air..............	Blanche un peu bleue.
Azote............	Bleue ou pourpre. Son remarquable.
Hydrogène........	Cramoisie.
Acide carbonique..	Verte, très-irrégulière.
Oxyde de carbone..	Rouge ou verte.
Chlore...........	Verte.

La couleur vire toujours au blanc quand la pression s'accroît.

Analysée au spectroscope, la lumière de l'étincelle présente deux sortes de raies, les unes, caractéristiques du gaz, s'observent d'autant mieux que la pression est plus faible et donnent les colorations observées par Faraday; les autres caractérisent le métal des électrodes et s'aperçoivent surtout quand le gaz est à une haute pression : l'étincelle entraîne donc avec elle des vapeurs empruntées à la matière des électrodes. Nous reviendrons sur ce sujet à propos de l'analyse spectrale.

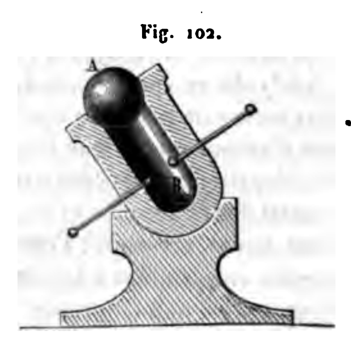
CHALEUR DÉVELOPPÉE PAR L'ÉTINCELLE. — On constate aisément qu'un gaz s'échauffe quand il est traversé par des décharges électriques. On répète à cet égard dans les cours les expériences du mortier électrique (*fig.* 101) et du thermomètre de Kinnersley (*fig.* 102). Le mortier électrique projette une bille par l'effet de la dilatation de l'air, quand on le fait traverser par une puissante décharge. Quant au thermomètre de Kinnersley, c'est un vase fermé A (*fig.* 102), contenant de l'eau et de l'air et dans lequel on fait passer une étincelle entre les boules situées toutes deux dans l'air; au moment de la décharge, le liquide est projeté par un tube communiquant B.

On peut réaliser des mesures en modifiant rationnellement

le thermomètre de Kinnersley, comme l'a fait M. Villari (¹). On lui donne alors la forme d'un ballon contenant les deux électrodes : celles-ci sont disposées de telle sorte qu'on peut faire varier à volonté et mesurer leur distance à l'aide d'un véritable micromètre à étincelles. Le ballon se termine par un

Fig. 101.

Fig. 102.



tube vertical capillaire plongeant dans de l'acide sulfurique qui se maintient soulevé à une certaine hauteur dans le tube. A chaque étincelle qui passe, la pression du gaz augmente, et le liquide baisse dans le tube d'une quantité proportionnelle à la quantité de chaleur dégagée.

M. E. Wiedemann (²) a mesuré la chaleur développée par l'étincelle dans un gaz plus ou moins raréfié; à cet effet, il entoure d'un calorimètre un tube traversé par les décharges d'une machine de Töpler (³), d'un débit extrêmement considé-

(¹) *Journal de Physique*, t. IX, p. 5; 1880.

(²) *Annales de Chimie et de Physique*, 5ᵉ série, t. XXI, p. 419; 1880.

(³) Les machines de Töpler sont analogues à la machine de Holtz. *Voir* le Mémoire original de M. Wiedemann.

rable. L'un des pôles de la machine communique au sol ainsi que l'une des électrodes du tube à décharge et l'autre électrode reçoit à volonté de la machine de l'électricité positive ou négative : on peut aussi introduire dans le circuit une interruption extérieure au tube et constituée par un micromètre à étincelles dont les deux boules sont plus ou moins écartées, suivant le besoin.

M. E. Wiedemann a ainsi reconnu que, lorsque la pression diminue, les quantités de chaleur développées par minute diminuent d'abord pour croître ensuite, tandis que le nombre des étincelles augmente d'abord pour décroître ensuite. En somme, la chaleur dégagée varie en sens inverse du nombre des décharges correspondant à une même quantité d'électricité fournie par la machine, mais pas exactement en raison inverse de ce nombre, comme le voudrait la théorie (¹). Les lois de la variation ne sont pas les mêmes suivant que la machine fournit de l'électricité positive ou négative, et la chaleur dégagée se partage inégalement entre les électrodes et l'espace occupé par le gaz dans le tube capillaire qui les sépare.

TEMPÉRATURE DE L'ÉTINCELLE. — Il est impossible d'évaluer directement cet élément; on peut toutefois, d'après les déterminations calorimétriques, trouver un maximum de cette température, en admettant que toute la chaleur de l'étincelle est employée à produire une élévation de la température du gaz et que la durée de l'étincelle est assez courte pour qu'il n'y ait pendant son passage aucune perte de chaleur par rayonnement, etc. On doit à M. E. Wiedemann quelques mesures absolues de ce genre : il a trouvé que les étincelles positives de la machine de Töpler produisaient une élévation de température de + 1977° d'un gaz à la pression de $15^{mm},5$, contenu

(¹) Soit V le potentiel que produirait la quantité d'électricité considérée, le potentiel correspondant à une décharge est $\frac{V}{n}$; la quantité de chaleur correspondante est proportionnelle à $\left(\frac{V}{n}\right)^2$ ou, pour les n décharges, à $n\left(\frac{V}{n}\right)^2$ ou à $\frac{V^2}{n}$.

dans un tube de $0^{mm},78$ de diamètre; elles ne produisaient plus qu'une élévation de 1148° pour une pression de $5^{mm},1$ ([1]). Dans des tubes larges, la température de l'étincelle pourrait, d'après M. Hasselberg ([2]), M. Hittorff ([3]) et M. Wiedemann lui-même, descendre au-dessous de 100°.

Toutefois, ces déterminations supposent que tous les points de la masse gazeuse traversés par l'étincelle sont échauffés par elle, c'est-à-dire que la masse entière du gaz contribue au transport de l'électricité. Il pourrait se faire qu'il n'en fût pas ainsi, qu'un petit nombre de filaments gazeux, si l'on peut ainsi s'exprimer, servissent seuls au transport de l'électricité, et alors la température déterminée par les expériences ne serait plus qu'une moyenne dénuée de signification.

Différence de potentiel nécessaire pour produire une étincelle. — A la pression ordinaire et pour une même différence de potentiel, l' tincelle jaillit à une distance plus grande entre deux pointes qu'entre deux boules. En général, pour chaque forme particulière attribuée aux électrodes, il y a une relation particulière entre la valeur de la distance explosive et la différence de potentiel qui produit la décharge : l'expérience seule peut déterminer cette relation.

On constate aisément que les distances explosives correspondant à une même différence de potentiel varient suivant la forme et les dimensions des électrodes, à l'aide de l'excitateur universel représenté (*fig.* 103) avec toutes ses pièces accessoires. Cet appareil est extrêmement commode, grâce à la multiplicité des mouvements dont il est susceptible par les charnières *a*, *a'*, les vis F, F' et les coulisses C, C'. L'une des tiges B'C' est divisée en millimètres, ce qui permet de graduer l'écart donné aux électrodes et de le mesurer avec une précision suffisante, dans le cas particulier où les tiges CB, C'B' sont horizontales.

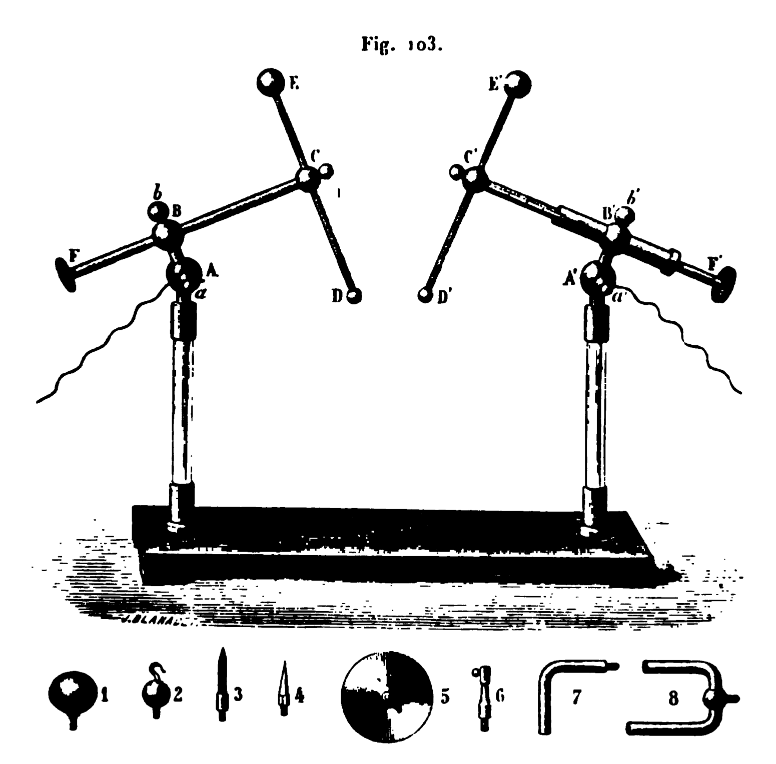
([1]) Le nombre des décharges fournies par la machine était de 60000 par minute environ pour la pression de $15^{mm},5$, et de 144000 pour la pression de $5^{mm},1$.

([2]) Hasselberg, *Beiblätter zu den Annalen der Physik*, t. IV, p. 132; 1880.

([3]) Hittorff, *Wied. Ann.*, 2ᵉ série, t. VII, p. 578; 1879.

Les expériences de M. Harris (¹), celles de M. Riess (²) et de M. Knochenhauer (³) sur la décharge des batteries opérée entre deux boules ont établi qu'entre certaines limites la distance explosive est proportionnelle à la charge du condensateur et

Fig. 103.



en raison inverse du nombre des bouteilles, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la différence de potentiel des deux armatures.

Voici le Tableau de l'une des expériences de M. Riess.

(¹) HARRIS, *Phil. Trans.*, p. 225; 1834.

(²) RIESS, *Reibungs-Electricität*, t. Iᵉʳ, p. 377.

(³) KNOCHENHAUER, *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XVII p. 78.

DISTANCE explosive.	CHARGE.							
	Deux bouteilles.		Trois bouteilles.		Quatre bouteilles		Cinq bouteilles.	
	Observ.	Calculé.	Observ.	Calculé.	Observ.	Calculé.	Observ.	Calculé.
1...........	»	»	3	2,5	3,5	3,3	4,3	4,2
2...........	3,0	3,3	5,5	5,0	7	6,7	8,5	8,3
3...........	4,6	5,0	8	7,5	10,1	10	12,5	12,5
4...........	6,4	6,7	10,3	10	13,5	13,3	16	16,7
5...........	7,5	8,3	»	»	16	16,7	»	»

La charge était mesurée par le nombre d'étincelles d'une bouteille de Lane interposée dans le circuit; les électrodes étaient deux boules ayant pour diamètre, l'une positive, $12^{mm},76$, l'autre négative, 9^{mm}. La distance explosive a varié de $1^{mm},12$ à $5.1^{mm},12 = 5^{mm},60$.

La loi qui résulte des expériences précédentes n'est d'ailleurs pas absolue. Sir William Thomson ([1]), employant des différences de potentiel V très faibles, a mesuré les distances explosives d correspondantes entre deux plateaux légèrement bombés au centre; il a trouvé que le rapport $\frac{V}{d}$ décroît quand d augmente et ne devient sensiblement constant que pour des valeurs de d supérieures à 1^{mm}. Pour de très grandes distances explosives, $\frac{V}{d}$ varie de nouveau, et il semble, d'après les expériences de M. Gaugain ([2]) et de M. Mascart ([3]), que d tend vers l'infini pour une valeur finie de la différence de potentiel V. D'après M. Mascart, cette valeur n'excéderait guère 25 à 30 fois celle qui correspond à des étincelles de 1^{mm}. La pression électrique correspondante, à la surface de deux électrodes sphériques de 22^{mm}, serait d'environ $0^{atm},03$.

([1]) W. Thomson, *Reprint of papers*, p. 267.

([2]) Gaugain, *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. VIII, p. 75. *Voir* encore le travail de MM. Wiedemann et Ruhlmann (*Pogg. Ann.*, CXLV, p. 235 et 364), et *Journal de Physique*, t. I, p. 259.

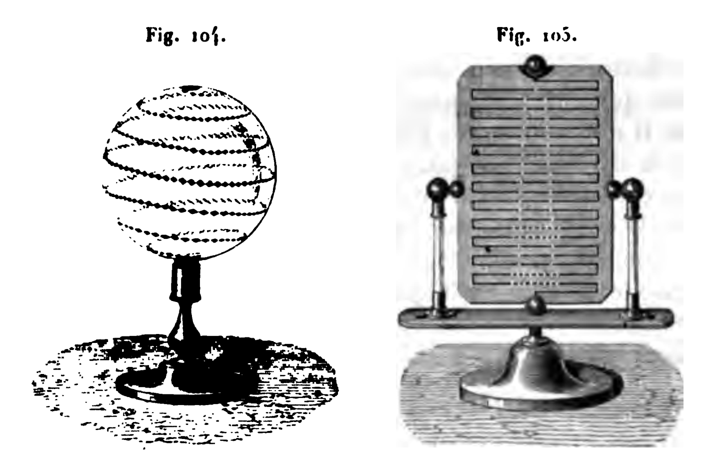
([3]) Mascart, *Traité d'électricité statique*, t. II, p. 90.

Harris ([1]), Masson ([2]), MM. Knochenhauer ([3]), G. Wiedemann et Ruhlmann ([4]) ont étudié l'influence de la variation de pression et constaté qu'entre certaines limites la différence de potentiel correspondant à une distance explosive constante est proportionnelle à la pression du gaz. Toutefois, quand la pression diminue beaucoup, la différence de potentiel diminue moins rapidement que ne l'indiquerait cette loi.

Pour des pressions supérieures à la pression atmosphérique et de plus en plus grandes, la distance explosive correspondant à une différence de potentiel donnée diminue constamment; cette propriété, signalée par Dœbereiner ([5]), a été vérifiée par M. Cailletet ([6]).

Tubes étincelants. — Au lieu de pratiquer une interruption unique sur le circuit d'une décharge, on peut en produire plu-

Fig. 104. Fig. 105.



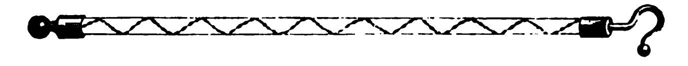
sieurs, et alors la somme des longueurs que franchit l'étincelle dans l'air se trouve notablement augmentée. Quand les con-

---

([1]) Harris, *loc. cit.*
([2]) Masson, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXX, p. 41.
([3]) Knochenhauer, *Pogg. Ann.*, t. LVIII, p. 219.
([4]) Wiedemann et Ruhlmann, *loc. cit.*
([5]) Dæbereiner, *Schweiger's Journal*, t. LXII, p. 89.
([6]) Cailletet, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 1282.

ducteurs sont très voisins et les interruptions nombreuses, l'expérience est susceptible d'une forme très brillante et aussi très ancienne, consistant à placer bout à bout et à une très faible distance, à la surface intérieure d'un tube, d'un ballon ou

Fig. 106.



sur une plaque de verre (*fig.* 104, 105, 106), de petites lames d'étain taillées en pointe et formant des dessins variés. A chaque décharge toutes les interruptions s'illuminent à la fois, et l'ensemble des points éclairés reproduit dans l'obscurité l'objet que l'on a voulu représenter.

NON-CONDUCTIBILITÉ DU VIDE. — Nous avons vu que la différence de potentiel nécessaire pour produire une décharge à une distance donnée diminue avec la pression : on pourrait croire que ces deux quantités tendent en même temps vers zéro. Il n'en est rien et, pour une assez grande raréfaction du gaz, la différence de potentiel passe par un minimum, puis augmente de nouveau; quand le vide est aussi parfait que possible, la décharge refuse absolument de le traverser. C'est ce que l'on montre à l'aide de tubes dans lesquels on a d'abord poussé le vide aussi loin que possible au moyen de la pompe à mercure, après les avoir remplis d'acide carbonique : on répète plusieurs fois cette opération, enfin on absorbe les dernières traces d'acide avec un fragment de potasse introduit d'avance dans le tube et que l'on chauffe fortement après la fermeture. On peut aussi, comme le fait M. Alvergniat, chauffer le tube jusqu'au ramollissement du verre, tandis qu'on y fait le vide avec la pompe à mercure. L'étincelle ne passe pas dans un tube T ainsi préparé, où les deux électrodes ne sont distantes que de $0^{mm},5$, et peut cependant franchir en p, dans l'air, un intervalle de 15 à 20^{cm} (*fig.* 107).

Morren (¹) a déterminé pour divers gaz la pression corres-

(¹) MORREN, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV, p. 735.

pondante à la moindre résistance au passage des décharges électriques et l'a évaluée comme il suit :

	mm
Hydrogène	2,8
Acide carbonique	0,08
Azote	0,1
Oxyde de carbone	1,6
Oxygène	0,6

Ces nombres ne peuvent qu'indiquer l'ordre de grandeur des pressions dont il s'agit : elles paraissent dépendre du diamètre des tubes où l'on opère (¹).

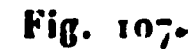
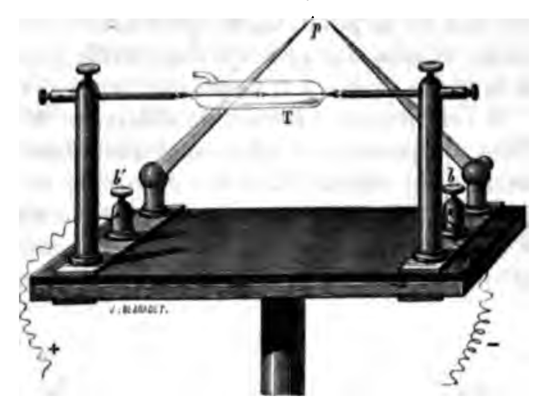


Fig. 107.



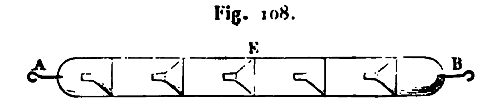
SOUPAPES ÉLECTRIQUES. — La forme des électrodes influe sur la valeur de la distance explosive, et, dans le cas de deux électrodes de forme et de dimensions différentes, le sens dans lequel passe la décharge influe aussi : on peut donc régler la distance de deux électrodes A et B de telle sorte que, quand l'électrode A est positive, la décharge passe, tandis qu'elle ne passe pas quand A est négative. C'est ce qu'a fait Faraday en munissant l'excitateur d'une fourche F terminée par deux boules dont l'une A est plus grande que la seconde *a*; l'autre branche porte de même deux boules identiques à la première, mais la

(¹) Schultz, *Pogg. Ann.*, t. CXXXV, p. 249. — *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XVI, p. 479.

petite boule de chaque fourche se trouve opposée à la grande boule de l'autre. La décharge passe toujours entre les boules de telle sorte que la plus petite soit l'électrode positive. On peut remplacer la petite boule par une pointe, mais à la condition de produire une interruption en un autre point du circuit, de façon à avoir à la fois une étincelle à travers cette interruption et une étincelle dans l'excitateur; dans ces conditions, l'expérience réussit mieux entre une boule et une pointe qu'entre deux boules.

M. Gaugain (¹) s'est servi de cette propriété pour installer un appareil qu'il a désigné sous le nom de *soupape électrique*. C'est essentiellement un œuf électrique dont une des boules a été vernie sauf en un point, tandis que l'autre est nue. Dans ces conditions, et pour une pression convenable, les décharges passent de la boule vernie à la boule nue, mais non en sens contraire, et cela dans des limites de différence de potentiel très étendues. On produit des effets analogues dans les tubes dits *de Geissler*, en effilant l'une des électrodes et terminant l'autre par un petit disque perpendiculaire à l'axe du tube (²), ou même en cloisonnant un tube, muni d'électrodes A, B identiques (*fig.* 108), à l'aide de tubes E en entonnoir, soudés

Fig. 108.



à son intérieur et présentant tous leurs pointes du même côté: dans ce dernier cas, la décharge passe plus facilement à travers les tubes de la pointe à la base des entonnoirs que dans la direction opposée.

DURÉE DE L'ÉTINCELLE. — La durée et même la nature de l'étincelle dépendent de la résistance interpolaire. 1° Quand cette résistance est très grande, par exemple quand on interpose une

(¹) GAUGAIN, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XL, p. 540.

(²) POGGENDORFF, *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XII, p. 482.

colonne d'eau dans le circuit d'une batterie, la décharge est intermittente, comme on peut s'en convaincre à l'aide d'un miroir tournant dans lequel on regarde l'image de la décharge : les premières étincelles sont d'abord équidistantes, puis elles s'écartent de plus en plus. 2° Quand on diminue la résistance, les étincelles se rapprochent et enfin la décharge devient continue; pour une certaine résistance, sa durée est minimum. 3° Quand on emploie des résistances très faibles, la décharge devient oscillante, c'est-à-dire qu'elle part alternativement des deux électrodes; on voit dans le miroir tournant deux rangées parallèles de points lumineux, séparées par un intervalle relativement obscur : les points supérieurs et inférieurs ne coïncident pas. La résistance limite au-dessous de laquelle commence la décharge oscillante ne paraît pas dépendre de la distance explosive, c'est-à-dire de la différence des potentiels, mais seulement de la capacité de la batterie : elle est en raison inverse de la racine carrée de cette capacité. Ces divers résultats sont dus à M. Feddersen (¹).

Quand la décharge est continue, sa durée est toujours extrêmement faible. MM. Cazin et Lucas (²) ont étudié les diverses circonstances qui la font varier. A cet effet, ils observaient la lueur de l'étincelle à travers un disque de mica sur lequel se trouvent cent quatre-vingts traits transparents : ce disque tourne derrière un disque opaque fixe, portant seulement six traits transparents qui forment vernier avec les traits du disque mobile. Un trait transparent arrive à chaque rotation successive en coïncidence avec l'un quelconque des traits du vernier, et produit six coïncidences; les cent quatre-vingts traits en produisent 1080 à chaque rotation. En donnant au disque une vitesse suffisante on peut obtenir un nombre de coïncidences extrêmement grand, soit par exemple 100000 par seconde. Une lueur dont la durée est inférieure à $\frac{1}{100000}$ de seconde n'éclairera en général aucune coïncidence, et pourra en éclairer une au plus; si elle est

(¹) Feddersen, *Pogg. Ann.*, t. CIII, p. 69, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LIV, p. 435, et t. LXIX, p. 178.

(²) Lucas et Cazin, *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXVI, p. 4..

comprise entre $\frac{1}{100000}$ et $\frac{2}{100000}$ de seconde, elle en éclairera une et parfois deux, et ainsi de suite. Le Calcul des probabilités permet de lever l'indétermination à la condition de faire un grand nombre d'observations successives : c'est ce qu'ont fait MM. Lucas et Cazin; on consultera leur Mémoire avec profit. Les durées qu'ils ont observées dans des conditions très variées sont comprises entre 7 et 90 millioniėmes de seconde.

CHAPITRE XIV.

SOURCES DIVERSES D'ÉLECTRICITÉ. ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE.

Sources diverses d'électricité. — Pression. — Division des corps. — Clivage. — Chaleur. — Contact. — Actions chimiques.
Électricité atmosphérique. — Méthodes employées pour l'observation de l'électricité atmosphérique. — Phénomènes qu'on observe par un ciel serein. — Électricité des nuages. — Orages. — Éclair. — Tonnerre. — Influence des nuages orageux sur le sol. — Choc en retour. — Effets de la foudre : I. Sur les corps conducteurs; II. Sur les isolants. — Foudre globulaire. — Paratonnerres.

SOURCES DIVERSES D'ÉLECTRICITÉ.

Jusqu'ici, c'est en frottant deux corps l'un contre l'autre que nous les avons électrisés; quand nous avons eu recours à des phénomènes d'influence, comme dans la machine de Holtz par exemple, nous avons toujours supposé implicitement que l'inducteur, nécessaire à la mise en train de l'appareil, devait son électricité au frottement : cependant on connaît d'autres sources d'électricité, et les plus importantes au point de vue pratique et industriel ne font intervenir aucun frottement pour la production de l'électricité qu'elles mettent en œuvre. C'est dans une autre partie de cet Ouvrage que viendra naturellement l'étude de ces dernières : nous nous bornerons à signaler ici quelques sources d'électricité peu connues, qui n'ont donné lieu à aucune application importante, et dont la théorie est encore à trouver. Nous nous dispenserons d'y revenir par la suite.

PRESSION. — DIVISION DES CORPS. — CLIVAGE. — Toutes les actions mécaniques peuvent développer de l'électricité.

I. Libes, ayant préparé un plateau de bois recouvert de

taffetas, déposa et pressa sur sa surface un disque de métal isolé; il le souleva ensuite en prenant soin de ne point le frotter et le trouva chargé négativement; ce disque eût été positif, si on l'avait frotté sur le même plateau de taffetas.

Tous les corps que l'on comprime sur d'autres substances s'électrisent, avec d'autant plus d'énergie que la pression a été plus forte, et prennent des quantités d'électricité égales et contraires; seulement, il faut que la séparation des deux corps soit rapide pour que l'électricité se conserve, et d'autant plus rapide qu'ils sont meilleurs conducteurs. Par des procédés que nous n'étudierons point, M. Becquerel (1) a reconnu cette propriété même dans les métaux.

Les corps cristallisés, et en particulier le spath d'Islande, s'électrisent très-bien quand on les comprime entre les doigts; et ce qu'il y a de remarquable, c'est que ce dernier cristal conserve pendant des semaines entières l'électricité qu'il a reçue par ce procédé. Haüy (2) en a profité pour construire un électroscope qui n'est qu'une simple aiguille horizontalement placée sur un pivot, portant un morceau de spath à une extrémité et un contre-poids à l'autre. L'électricité que le cristal reçoit par la compression et qu'il garde ensuite très longtemps est positive.

II. Quand on racle avec un couteau un corps isolant comme le soufre, la résine, la cire, etc., on détache des fragments qu'on peut faire tomber sur un électroscope et qui sont positifs.

III. On colle sur les deux faces d'une lame épaisse de mica deux manches en mastic, puis, après avoir séché le tout, on clive le mica en exerçant une traction sur les manches, et les deux lames ainsi séparées sont l'une positive, l'autre négative, sur leurs faces en regard. On peut répéter la même expérience en clivant de nouveau chacun des fragments obtenus par la première séparation, et on reproduit le même effet avec le même sens de distribution.

C'est au même genre d'action que l'on peut rapporter les

---

(1) Becquerel, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXII, p. 5.

(2) Haüy, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. V, p. 95.

effets que l'on observe en séparant vivement deux corps différents qui ont été primitivement réunis. Par exemple, on coule du soufre dans un verre conique et l'on y implante une tige de verre pendant qu'il est encore liquide. Quand il est solidifié et refroidi, on enlève le soufre du verre en le tirant par la tige qui y est implantée, et on le trouve positif pendant que le verre est négatif. Tous ces faits semblent établir qu'on électrise les molécules en présence, quand on les dérange de leur équilibre primitif.

CHALEUR. — Certains cristaux prennent une électricité polaire, quand on élève leur température. Nous étudierons spécialement la tourmaline [1].

On suspend horizontalement une aiguille de tourmaline sous une cloche reposant sur un plan métallique; quand elle est à la température ordinaire, l'aiguille n'est point électrique, mais, aussitôt que l'on met une lampe à alcool sous la cloche, le cristal s'échauffe peu à peu, et pendant tout ce temps l'une de ses extrémités est positive et l'autre est négative, ce dont on s'assure en approchant de ses deux bouts un bâton de résine frotté. Ce phénomène se continue pendant tout le temps que la température s'élève; mais, quand elle est devenue stationnaire, il n'y a plus aucun signe électrique. Alors on enlève la lampe et on laisse graduellement refroidir l'appareil; aussitôt que la température baisse, la tourmaline redevient électrique, présente encore deux pôles à ses extrémités, mais celle qui était positive pendant le réchauffement devient négative pendant le refroidissement.

Nous aurons dans la suite à signaler d'autres phénomènes électriques, et bien plus importants, déterminés par la chaleur à la surface de contact de deux métaux; leur étude serait ici hors de sa place.

CONTACT. — ACTIONS CHIMIQUES. — En général, quand deux corps sont en contact, il se produit entre eux une différence de

---

[1] Les propriétés de la tourmaline ont été indiquées d'abord par Lemery (*Histoire de l'Académie des Sciences*, 1717, p. 7), puis étudiées par Œpinus (1756), Corton (1759), etc.

potentiel déterminée, très faible par rapport à celles que nous avons mesurées jusqu'ici, mais dont on peut constater l'existence en faisant usage soit de l'électroscope condensateur de Volta, soit des électromètres beaucoup plus précis que nous avons décrits. C'est à Volta que l'on doit la première observation de ces forces électromotrices de contact, que nous avons déjà invoquées pour expliquer le jeu des machines électriques.

Quand, parmi les substances en contact dans un circuit conducteur, il y a des liquides et des solides, les surfaces de contact des deux sortes de corps peuvent être le siége d'actions chimiques qui développent de la chaleur. Chacune de ces surfaces est alors le siége d'une dépense d'énergie, et comme, en même temps, il s'y développe de l'électricité, on est naturellement conduit à attribuer la production de celle-ci à l'action chimique. Nous reviendrons longuement sur les forces électromotrices de contact et sur la production d'électricité qui accompagne les actions chimiques, quand nous nous occuperons des courants électriques, dans le quatrième Volume de cet Ouvrage.

ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE.

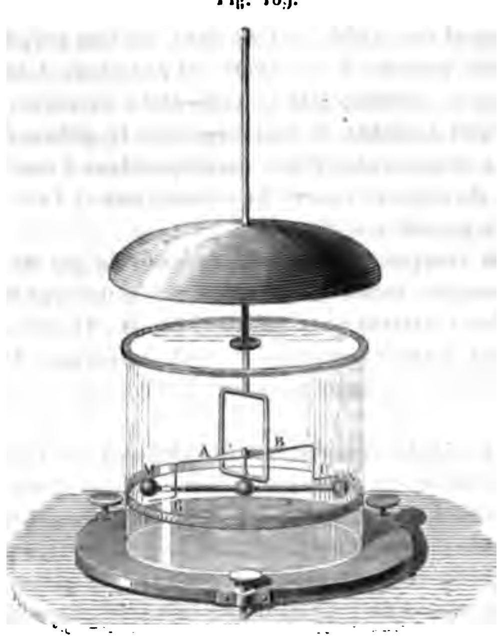
MÉTHODES EMPLOYÉES POUR L'OBSERVATION DE L'ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE. — Ce n'est point seulement pendant les orages qu'il y a de l'électricité dans l'atmosphère, il y en a dans tous les temps; pour le constater, on peut faire usage de tous les électroscopes connus, pourvu qu'ils soient sensibles. De Saussure employait l'électromètre à pailles, après l'avoir gradué par la méthode que nous avons fait connaître; on peut remplacer cet instrument par l'électroscope de Peltier (¹), dont nous allons donner la description.

Cet instrument reçoit l'électricité par une tige verticale qui la transmet dans une cage de verre, protégée par un toit, jusqu'à une aiguille horizontale suspendue sur un pivot (*fig.* 109). L'aiguille, qui est très mobile, est formée d'un fil GABD sur lequel est fixé un aimant AB; de cette façon, elle se place dans

(¹) PELTIER, *Annales de Chimie et de Physique*, 2ᵉ série, t. V, p. 72

le méridien magnétique. La tige qui porte le pivot se prolonge au-dessous et se termine par un fil métallique MN qui est mobile et qui porte deux boules M et N à ses extrémités; on le dirige dans le méridien magnétique. A ce moment, les extrémités G et D sont en contact avec M et N, et, quand on électrise l'instrument, l'aiguille GD est repoussée d'un angle qu'on mesure et duquel on déduit la quantité d'électricité

Fig. 109.



qu'elle a reçue. On peut graduer expérimentalement cet électroscope par le moyen que de Saussure employait. Au reste, on ne fait aujourd'hui guère usage de ces appareils imparfaits. On les remplace avec grand profit par les électromètres si précis et si délicats de sir W. Thomson.

Quand on a fait choix d'un électromètre, il reste à trouver un moyen de le mettre en équilibre électrique avec l'atmosphère. A cet effet, plusieurs dispositions peuvent être employées.

des électroscopes a appris qu'il y a en général une différence de potentiel entre un point quelconque de l'air et le sol. Cette différence est presque toujours positive et varie aussi rapidement et aussi fréquemment que les autres éléments météorologiques. Si l'on s'élève de plus en plus au-dessus du niveau du sol, cette différence devient de plus en plus accusée : cela signifie que les masses d'électricité positive qui produisent le potentiel de l'air sont en général plus écartées du sol que nos stations d'observation, et alors le niveau potentiel doit être d'autant plus élevé qu'on s'approche davantage de ces masses. On n'observe rien sous les toits, car ceux-ci peuvent être assimilés à des conducteurs en communication avec le sol; le potentiel dans l'intérieur des murs est donc égal à celui du sol, sauf le cas où des masses électriques isolées auraient été introduites artificiellement dans la cavité, ce qui n'a pas lieu en général. Enfin la grandeur des déviations électrométriques, comparées à celles qui se produiraient dans un laboratoire, où la pointe de l'électromètre serait placée à une distance connue d'une machine électrique en activité, indique que le potentiel de l'air diffère assez fortement de celui du sol, et que, par suite, les masses éloignées agissantes doivent être très-considérables.

L'observation des électromètres a lieu aujourd'hui d'une manière régulière dans un grand nombre d'Observatoires, à Bruxelles, à Kiew, à Munich, à Paris, etc. Voici quelques-uns des résultats généraux qu'on a déjà pu obtenir.

Immédiatement après le lever ou après le coucher du soleil, l'effet électroscopique croît d'abord avec une extrême rapidité, ensuite avec une grande lenteur jusqu'à un maximum; après quoi la déviation diminue peu à peu, jusqu'à atteindre un minimum qui précède le moment du coucher ou du lever suivant. Il y a donc par jour deux maxima et deux minima à des heures qui diffèrent un peu suivant les saisons, mais qui en moyenne sont réglées comme il suit :

1er minimum.	1er maximum.	2e minimum.	2e maximum.
2 h. du matin.	10 h. du matin.	2 h. après midi.	10 h. du soir.

On a remarqué qu'à 11^h du matin la déviation de l'instru-

Si l'on emploie, par exemple, l'électromètre à quadrants de Thomson, on établit une paire de secteurs en relation permanente avec le bec, l'autre avec le sol, et la déviation de l'aiguille mesure à chaque instant la différence de potentiel de l'air au point A et du potentiel du sol, c'est-à-dire, par définition, le potentiel en A. Un papier photographique déplacé par un mouvement d'horlogerie, normalement au plan d'oscillation de l'aiguille, reçoit l'impression de la tache lumineuse réfléchie par le miroir concave de l'électromètre, et fournit un tracé continu sur lequel on pourra étudier à loisir les variations de potentiel de l'air.

On peut établir en voyage des stations d'observation provisoire en installant au bout d'un mât une mèche que l'on enflamme et la mettant en communication avec le conducteur fixe de l'électromètre portatif de Thomson (p. 220). On fait une première lecture de l'appareil dans cette situation, une deuxième en mettant ce même conducteur au sol : la différence des deux lectures est proportionnelle à la différence de potentiel entre le conducteur et le sol.

On peut enfin, avec l'un quelconque des appareils précédents, obtenir des mesures isolées se rapportant à des stations plus ou moins éloignées du lieu de l'observation. Il suffit d'établir la communication de la station à l'électromètre par un fil isolé, tel qu'un fil télégraphique, ou même de lancer en l'air une sphère pleine (comme le faisait de Saussure), ou une flèche [comme l'ont proposé MM. Becquerel et Breschet ([1])]; cette sphère ou cette flèche communique, par une chaîne métallique, à une tige conductrice reliée à l'électromètre. Remarquons pourtant que, dans ces dernières expériences, l'indication de l'électromètre n'a plus de signification bien précise : la capacité du fil, dès qu'il est un peu long, est en effet trop considérable pour qu'on puisse regarder l'équilibre électrique comme établi à chaque instant dans toute la masse du conducteur.

PHÉNOMÈNES QU'ON OBSERVE PAR UN CIEL SEREIN. — L'usage

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 528.

sphère est très généralement positive; elle l'est aussi par les temps couverts et même pendant les pluies calmes, mais au moment des orages, des brouillards ou des pluies abondantes, on constate un résultat opposé. Nous avons à nous demander si, pendant les époques exceptionnelles, les causes qui produisent l'électricité atmosphérique changent de signe, ou bien si le potentiel de l'air demeure toujours positif dans les régions élevées et s'il y a seulement une perturbation dans la distribution des masses électriques inférieures qui suffirait à expliquer la production de potentiels négatifs dans certaines régions de l'air. C'est en effet ce qui a lieu, et nous allons être amenés à le prévoir en étudiant comment les nuages orageux se chargent.

La formation d'un nuage est due à la condensation de la vapeur renfermée dans un espace donné; dès qu'elle a eu lieu, l'espace occupé par la masse semi-conductrice du nuage peut être considéré, au moins d'une manière générale, comme rempli par un corps conducteur qui se trouve substitué à un isolant, l'air atmosphérique. Supposons d'abord qu'il n'y eût pas d'électricité dans l'air au point où s'est formé le nuage : celui-ci se charge par influence, et si la valeur moyenne du potentiel dans la région qu'il occupe est positive, il prendra aussi un potentiel positif : des quantités égales d'électricités contraires apparaîtront sur les deux faces du nuage, de l'électricité négative à la face supérieure, c'est-à-dire vers les potentiels croissants, de l'électricité positive à sa face inférieure. S'il y avait de l'électricité positive au lieu où s'est formé le nuage, les choses se passeraient à peu près de même, si ce n'est que son potentiel aurait une valeur positive plus forte et que la quantité d'électricité négative libre à sa face supérieure serait moindre que la quantité d'électricité positive à sa face inférieure.

Dans un cas comme dans l'autre, la déperdition de cette électricité dans l'air ambiant modifiera à chaque instant le potentiel du nuage; s'il se résout partiellement en pluie, les gouttes entraîneront en tombant une quantité plus ou moins forte d'électricité positive, le potentiel du nuage diminuera et pourra s'abaisser jusqu'à zéro. Il en sera de même si le nuage chassé par le vent se trouve momentanément en contact avec le flanc

ment est sensiblement la moyenne de toutes les déviations observées à chaque heure du jour, et, partant de cette remarque, on s'est contenté d'exécuter une observation à 11h. et de faire de mois en mois la somme des déviations trouvées.

Ces expériences ont donné un résultat tout à fait inattendu : c'est que les signes électroscopiques sont beaucoup moindres en été qu'en hiver, comme on le verra par le Tableau suivant, qui résume les observations faites à Bruxelles pendant l'année 1846 (1).

Janvier	562°	Juillet	33°
Février	276	Août	57
Mars	95	Septembre	62
Avril	94	Octobre	98
Mai	49	Novembre	274
Juin	39	Décembre	799

Il est d'ailleurs impossible d'attribuer à ces résultats aucune signification théorique, car les potentiels que l'on mesure dépendent à la fois de la grandeur absolue des masses électriques contenues dans l'atmosphère, de leur distance moyenne et de leur distribution. Quand l'air est saturé d'humidité, il devient un conducteur médiocre et le partage d'électricité entre les couches supérieures et inférieures de l'air ne peut être le même qui caractérise le temps très sec : on conçoit ainsi comment l'influence de l'heure du jour et de la saison peut se révéler par des observations électrométriques.

On a beaucoup discuté sur l'origine de l'électricité atmosphérique. Loin d'être résolue, on peut dire que la question n'est même pas susceptible d'être posée en ce moment d'une manière précise. Il faut d'abord étudier les lois de l'électricité atmosphérique : quand on les connaîtra, on en tirera sans doute parti pour faire sur les causes de ses variations autre chose que des hypothèses gratuites et plus ou moins invraisemblables.

Électricité des nuages. — Quand le ciel est serein, l'atmo-

(1) D'après Quetelet, *Annuaire météorologique de la France pour* 1850, p. 161.

un cerf-volant. Il le fit construire en toile; il lui avait donné une dimension considérable, et en 1753 il exécuta des expériences sans connaître celles que Franklin avait déjà faites. Les résultats furent extraordinaires, car on tira de la corde du cerf-volant, qui était mêlée de fils métalliques, des étincelles de 9 pieds de long, de plus de 1 pouce de large et qui faisaient autant de bruit qu'un coup de pistolet. On voit qu'à cette époque l'identité de la foudre avec l'électricité était dans la pensée de beaucoup de physiciens et qu'ils la démontrèrent presque au même moment.

Éclair. — Ces expériences prouvaient irrécusablement que l'éclair n'est que l'étincelle électrique et le tonnerre que le bruit de cette étincelle; mais, après cette assimilation faite en gros, il restait à expliquer toutes les circonstances offertes par l'éclair et le tonnerre; là se rencontrent quelques difficultés. La première que l'on ait soulevée vient de la forme de l'éclair : pourquoi est-il en zigzag? A cela on peut répondre que l'étincelle ordinaire a le même caractère, et que, n'ayant point expliqué cette forme pour l'électricité des machines, on n'a pas à chercher non plus à en rendre compte pour celle de l'atmosphère. La seule chose que l'on doive et puisse faire, c'est de constater ce caractère commun. Mais voici une autre difficulté. On peut mesurer la distance du nuage à l'observateur par l'intervalle qui s'écoule entre l'éclair et le tonnerre, et, en appréciant approximativement l'angle sous-tendu par les deux extrémités de l'éclair, on peut calculer à peu près son étendue. On trouve que souvent sa longueur atteint 5 à 6 lieues, et il paraît difficile au premier abord d'admettre une puissance électrique assez considérable pour donner lieu à une étincelle unique de pareille grandeur. Cette difficulté disparaît si l'on remarque qu'un nuage n'est point un conducteur métallique, mais une masse discontinue où l'électricité peut être très-inégalement distribuée et où peut se produire une série d'étincelles successives se continuant de l'une à l'autre, à peu près comme cela se voit avec les tubes étincelants. Dès lors cette immense longueur ne nous étonne plus, puisque c'est une suite d'étincelles et non plus une étincelle unique que nous

d'une montagne. Il suffira que le nuage, dont la charge est maintenant négative et distribuée principalement à sa face supérieure, s'abaisse dans une région où le potentiel soit moindre, pour que la distribution de l'électricité s'y trouve modifiée : l'électricité négative se répandra sur la surface entière du nuage, son potentiel deviendra négatif, la pluie qui s'en écoule sera elle-même négative et, même sans pluie, le nuage déterminera un abaissement de potentiel dans les régions voisines du lieu qu'il occupe, et ce potentiel pourra devenir négatif.

Il suffit donc d'avoir constaté l'existence normale de l'électricité positive dans les couches supérieures de l'atmosphère pour comprendre que les nuages supérieurs puissent la partager, et que d'autres nuages situés plus près de la terre, ou formés par la condensation des vapeurs dans le voisinage du sol, puissent être chargés d'une électricité contraire. Une fois que nous concevons ces nuages électrisés, nous arrivons aisément à l'explication des phénomènes produits pendant les orages.

ORAGES. — L'idée d'assimiler la foudre à l'électricité est aussi ancienne que la découverte de l'étincelle : on la trouve dans les ouvrages de presque tous les physiciens qui ont écrit sur l'électricité; mais si tout le monde acceptait cette opinion comme probable, personne avant Franklin ne songea à démontrer expérimentalement la réalité de cette assimilation. On sait par quel ingénieux artifice il réussit à conduire jusqu'au sol l'électricité des nuages orageux. Avant cette expérience célèbre du cerf-volant, qu'il exécuta en juin 1752, Franklin (¹) avait projeté d'établir des tiges isolées sur des édifices élevés; mais il ne réalisa pas cette pensée, et c'est Dalibard qui, la mettant à exécution, vit le premier, le 10 mai 1752, des étincelles jaillir d'un conducteur établi sur le toit d'une maison. On voit que, si Franklin avait imaginé la méthode, Dalibard le précéda de quelques jours dans le succès. Pendant le même temps, de Romas (²) était arrivé de son côté à la même idée d'employer

(¹) *Expériences sur l'électricité*, traduction française par Dalibard.

(²) *Mémoires des Savants étrangers*, t. II, p. 393, et t. III, p. 514.

par influence et attire à la surface du sol une électricité contraire à la sienne; on voit alors se produire tous les phénomènes connus de la répulsion électrique, et des aigrettes lumineuses se montrent sur les pointes métalliques. De nombreuses observations, les unes très-anciennes, les autres modernes, mettent ce résultat hors de doute. Nous allons en citer quelques exemples, puisés dans la Notice sur le tonnerre publiée en 1837 par Arago (¹).

Sénèque raconte qu'une étoile alla près de Syracuse se reposer sur le fer de la lance de Gylippe.

On lit dans Tite-Live que le javelot dont Lucius Atreus venait d'armer son fils, récemment enrôlé parmi les soldats, jeta des flammes pendant plus de deux heures sans être consumé.

César, dans ses *Commentaires* sur la guerre d'Afrique, raconte qu'après une nuit orageuse pendant laquelle il tomba beaucoup de grêle, le fer des javelots de la 5ᵉ légion parut en feu.

Plutarque raconte qu'au moment où la flotte de Lysandre sortait du port de Lampsaque pour attaquer la flotte athénienne, les deux feux que l'on appelle *Castor et Pollux* allèrent se placer des deux côtés de la galère de l'amiral lacédémonien; ceci présageait, dans les idées du temps, un heureux voyage.

On trouve dans l'histoire de Christophe Colomb, écrite par son fils, le récit d'une observation analogue. « Dans la nuit du samedi (octobre 1493), il tonnait et pleuvait très-fortement. *Saint Elme* se montra alors sur le mât de perroquet *avec sept cierges allumés*, c'est-à-dire qu'on aperçut ces feux que les matelots croient être le corps du saint. Aussitôt on entendit chanter sur le bâtiment force litanies et oraisons, car les gens de mer tiennent pour certain que le danger de la tempête est passé dès que saint Elme paraît. Il en sera de cette opinion ce que l'on voudra. »

On se fit pendant longtemps une opinion très-étrange de ces feux, que l'on regardait comme des objets matériels dont on pouvait aller se saisir. Pour montrer cette idée dans toute sa naïveté, il suffit de citer le passage suivant des *Mémoires* de Forbin :

(¹) *Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1837.

observons. Au reste, nous avons vu précédemment que la différence de potentiel nécessaire pour produire une étincelle n'augmente pas en proportion de la longueur dès que celle-ci dépasse une certaine valeur, et paraît au contraire tendre vers une limite finie qui peut fort bien être atteinte entre deux nuages électrisés.

TONNERRE. — Du moment qu'un éclair est formé d'étincelles électriques, le tonnerre en est le bruit. Mais il y a dans les deux faits que nous voulons assimiler une différence notable, car le bruit d'une étincelle est sec et ne se prolonge pas, tandis que celui du tonnerre se compose d'éclats successifs ordinairement suivis par un grondement qui se continue en s'affaiblissant et se termine en mourant sourdement. Cette différence n'est point caractéristique et l'on peut aisément l'expliquer. On conçoit, en effet, que le bruit de l'étincelle, quelle que soit la cause qui le produit, doit naître en chacun de ses points à la fois et arriver en même temps à l'oreille; de même le bruit d'un éclair prend naissance au même moment en chacune de ses parties, mais à des distances très-diverses de l'observateur, et il ne peut lui parvenir que successivement, après avoir mis des temps inégaux pour arriver des différents points de l'éclair à l'oreille. Il résulte de là que, si l'éclair était rectiligne, le tonnerre serait toujours un grondement dont l'intensité, maximum au commencement, décroîtrait continûment; mais, comme l'éclair est en zigzag, chaque portion rectiligne qui le compose envoie un son plus ou moins intense suivant sa direction, et le tonnerre se compose de bruits successifs inégalement forts; de là des éclats, des renforcements et des affaiblissements.

Le plus souvent, les éclairs partent entre les régions inégalement chargées des nuages orageux, et dans ce cas ils sont entièrement inoffensifs; mais il arrive quelquefois que la présence des nuages orageux dans l'air détermine sur les parties du sol qu'ils couvrent des phénomènes électriques de diverse nature que nous allons maintenant examiner.

INFLUENCE DES NUAGES ORAGEUX SUR LE SOL. — Quand l'atmosphère est fortement chargée à sa partie supérieure, elle agit

sur les corps mauvais conducteurs ou sur les animaux qui seraient isolés du sol; mais elle se fera avec grande énergie sur les terrains bons conducteurs, par conséquent sur les parties du sol qui sont humides, et sur les masses métalliques des édifices. Il est évident en outre qu'elle est la plus considérable possible sur les lieux les plus élevés, au sommet des clochers, des arbres ou des mâts. Il faut noter toutes ces circonstances quand on veut expliquer complètement les effets de la foudre.

Si l'on suppose maintenant que le nuage électrisé qui développe cette action, après avoir couvert une surface donnée, vienne à s'éloigner lentement, les effets qu'il avait apportés s'en vont avec lui sans être aperçus; mais s'il vient à être brusquement déchargé, soit en totalité, soit en partie, de l'électricité qu'il contenait, alors son action d'influence est subitement détruite ou au moins diminuée; conséquemment la partie du sol qui lui était opposée avec les animaux qui s'y trouvent retourne brusquement à l'état naturel, et ces derniers éprouvent des commotions électriques. On a vu des troupeaux entiers, des attelages de plusieurs chevaux, des groupes nombreux de personnes réunies, éprouver en même temps ce genre d'actions et y succomber tous à la fois, sans que l'on aperçût ensuite aucune blessure aux parties supérieures des corps foudroyés; mais souvent on en trouve à la plante des pieds, et l'on constate que les clous des chaussures sont arrachés et fondus. Ce phénomène se nomme le *choc en retour*.

Pendant tout le temps que dure cette influence électrique, un phénomène plus terrible encore est imminent : c'est la décharge entre la terre et le nuage, c'est-à-dire la foudre; c'est alors que le *tonnerre tombe* sous la forme d'un trait de feu qui n'est qu'une étincelle de grande dimension. Il est évident qu'il tombera de préférence sur les sommets des montagnes, des édifices ou des arbres, et qu'il choisira les corps les plus conducteurs, car c'est sur ces sommets et sur ces conducteurs que la décomposition par influence qui prépare le phénomène avait la plus grande intensité. Au contraire, les terrains secs, les lieux abrités, les corps isolés ne seront foudroyés que très-rarement, puisque la tension y est nécessairement

« Pendant la nuit (1696), il se forma tout à coup un temps très-noir accompagné d'éclairs et de tonnerres épouvantables. Dans la crainte d'une grande tempête dont nous étions menacés, je fis carguer toutes les voiles. Nous vîmes sur le vaisseau plus de trente feux *Saint-Elme*. Il y en avait un entre autres sur le haut de la girouette du grand mât qui avait *plus d'un pied et demi* de hauteur. J'envoyai un matelot *pour le descendre*. Quand cet homme fut en haut, il cria que ce feu faisait un bruit semblable à celui de la poudre qu'on allume après l'avoir mouillée. Je lui ordonnai d'enlever la girouette et de venir; mais à peine l'eût-il ôtée de place, que le feu la quitta et alla se poser sur le bout du mât, sans qu'il fût possible de l'en retirer. Il y resta assez longtemps, jusqu'à ce qu'il se consumât peu à peu. »

Des observations plus précises ne laissent aucun doute sur l'origine de ces phénomènes. Nous allons encore citer deux exemples :

Le 14 janvier 1824, à la suite d'un orage, M. Maxadorf ayant porté ses regards sur un chariot chargé de paille, qui se trouvait au-dessous d'un gros nuage noir, au milieu d'un champ, près de Cothen, observa que tous les brins de paille se redressaient et paraissaient en feu. Le fouet même du conducteur jetait une vive lumière. Ce phénomène disparut aussitôt que le vent eut emporté le nuage noir; il avait duré dix minutes.

Le 8 mai 1831, après le coucher du soleil, des officiers se promenaient tête nue pendant un orage sur la terrasse du fort Bab-Azoun à Alger. Chacun, en regardant son voisin, remarqua avec étonnement de petites aigrettes lumineuses aux extrémités de ses cheveux tout hérissés. Quand ces officiers levaient les mains, des aigrettes se formaient aussi au bout de leurs doigts.

CHOC EN RETOUR. — On peut donc considérer comme démontré que tout orage développe par influence sur la surface opposée du sol une électricité qui est contraire à la sienne et qui souvent peut y atteindre une tension considérable. Mais cette décomposition électrique ne doit pas s'exercer également en tous les points; elle sera très-faible et pour ainsi dire nulle

sur les corps mauvais conducteurs ou sur les animaux qui seraient isolés du sol; mais elle se fera avec grande énergie sur les terrains bons conducteurs, par conséquent sur les parties du sol qui sont humides, et sur les masses métalliques des édifices. Il est évident en outre qu'elle est la plus considérable possible sur les lieux les plus élevés, au sommet des clochers, des arbres ou des mâts. Il faut noter toutes ces circonstances quand on veut expliquer complètement les effets de la foudre.

Si l'on suppose maintenant que le nuage électrisé qui développe cette action, après avoir couvert une surface donnée, vienne à s'éloigner lentement, les effets qu'il avait apportés s'en vont avec lui sans être aperçus; mais s'il vient à être brusquement déchargé, soit en totalité, soit en partie, de l'électricité qu'il contenait, alors son action d'influence est subitement détruite ou au moins diminuée; conséquemment la partie du sol qui lui était opposée avec les animaux qui s'y trouvent retourne brusquement à l'état naturel, et ces derniers éprouvent des commotions électriques. On a vu des troupeaux entiers, des attelages de plusieurs chevaux, des groupes nombreux de personnes réunies, éprouver en même temps ce genre d'actions et y succomber tous à la fois, sans que l'on aperçût ensuite aucune blessure aux parties supérieures des corps foudroyés; mais souvent on en trouve à la plante des pieds, et l'on constate que les clous des chaussures sont arrachés et fondus. Ce phénomène se nomme le *choc en retour*.

Pendant tout le temps que dure cette influence électrique, un phénomène plus terrible encore est imminent : c'est la décharge entre la terre et le nuage, c'est-à-dire la foudre; c'est alors que le *tonnerre tombe* sous la forme d'un trait de feu qui n'est qu'une étincelle de grande dimension. Il est évident qu'il tombera de préférence sur les sommets des montagnes, des édifices ou des arbres, et qu'il choisira les corps les plus conducteurs, car c'est sur ces sommets et sur ces conducteurs que la décomposition par influence qui prépare le phénomène avait la plus grande intensité. Au contraire, les terrains secs, les lieux abrités, les corps isolés ne seront foudroyés que très-rarement, puisque la tension y est nécessairement

très faible. On sait que ces prévisions théoriques sont confirmées par toutes les observations.

EFFETS DE LA FOUDRE. — Puisque la foudre est une décharge électrique, tous les effets des batteries devront se produire sur les points foudroyés. Le premier et le plus grave est la mort des animaux frappés, et l'on trouve sur leurs cadavres des plaies profondes qui les sillonnent de la tête aux pieds; les autres sont : la fusion des corps métalliques, l'inflammation des combustibles, et des actions mécaniques remarquables sur les substances non conductrices. Comme une décharge foudroyante développe une énergie extrêmement supérieure à celle des décharges que nous produisons dans nos laboratoires, il y a beaucoup à apprendre en observant ses actions; car non seulement on y trouve une confirmation de ce que nous savons déjà, mais on a l'occasion de compléter l'étude des propriétés de l'électricité. C'est dans cette intention que nous allons citer de nombreux cas de foudre, que nous prendrons, comme les précédents, dans la *Notice sur le tonnerre*.

I. SUR LES CORPS CONDUCTEURS. — Quand la foudre rencontre des corps métalliques, elle les fond et les volatilise si leur section est petite; elle les suit sans interruption et sans occasionner de dégâts s'ils ont une masse assez grande et qu'ils soient en communication avec le sol : elle se dirige de préférence vers les corps conducteurs.

Aristote dit que l'on a vu le cuivre d'un bouclier fondu par le tonnerre, sans que le bois qu'il recouvrait fût endommagé. Suivant Pline, l'argent, l'or et le cuivre contenus dans un sac peuvent se fondre par la foudre sans que le sac soit brûlé, sans que la cire empreinte d'un cachet qui ferme le sac soit ramollie.

Le 20 avril 1807, le tonnerre tomba sur le moulin à vent de Great-Marton, dans le Lancashire; *une grosse chaîne en fer* qui servait à hisser le blé fut tellement échauffée et ramollie, que les anneaux se joignirent et qu'elle devint après le coup de foudre une véritable barre de fer.

Le 19 avril 1827, le paquebot *New-York*, de 520 tonneaux,

Franklin eut l'occasion d'examiner les effets d'un coup de tonnerre extraordinaire. En 1754, à Newbury, la foudre tomba sur un clocher terminé par une charpente en bois qui avait 21ᵐ de hauteur; cette pyramide fut rasée et dispersée au loin; mais, en arrivant à la base, la foudre rencontra un fil de fer qui réunissait le marteau d'une cloche aux rouages de la sonnerie située plus bas : elle le réduisit en fumée et le projeta contre les murs sous la forme d'une traînée noire. Ainsi, dans les parties supérieures, la tour en bois avait été détruite, et un simple fil de la grosseur d'une aiguille à tricoter avait suffi pour offrir ensuite un passage à la foudre et éviter tous dégâts; mais, au-dessous de l'horloge, la communication métallique venant à manquer, la foudre continua sa route dans la maçonnerie et les dégâts recommencèrent.

Près de Manchester, à Swinton, un petit bâtiment en briques servant à emmagasiner du charbon de terre, et terminé à sa partie supérieure par une citerne, était adossé contre une maison. Les murs avaient 3 pieds d'épaisseur et 11 de hauteur. Le 6 août 1809, à 2ʰ après midi, une explosion épouvantable se fit entendre; elle fut immédiatement suivie de torrents de pluie, et pendant quelques minutes une vapeur sulfureuse enveloppa la maison. Le mur extérieur du petit bâtiment fut *arraché* de ses fondations et *soulevé* en masse; l'explosion le porta verticalement, sans le *renverser*, à quelque distance de la place qu'il occupait d'abord; l'une de ses extrémités avait marché de 9 pieds, l'autre de 4. Le mur ainsi soulevé et transporté se composait, sans compter le mortier, de 7000 briques et pouvait peser environ 26 tonnes.

Ce qu'il y a de plus remarquable dans ces actions mécaniques, c'est qu'elles se produisent presque exclusivement aux points de réunion des métaux avec le bois ou la pierre. On trouve dans le récit d'un coup de tonnerre observé à Illes (Pyrénées-Orientales), en 1842, de très nombreux exemples de ce fait. Le tonnerre tomba dans une maison occupée par un serrurier-mécanicien : elle était remplie de masses de fer, de rouages de cuivre et d'outils de toute espèce; elle était, de plus, garnie sur sa façade de balcons, espagnolettes, gonds de fer, etc. C'est à travers chacune de ces pièces métalliques que

platine qui fut fondue vers l'extrémité sur une longueur de 0m,005 à 0m,006, et le métal s'affaissa d'un côté en coulant comme de la cire ramollie. La goutte se terminait par une surface arrondie très brillante.

On entend raconter tous les jours des effets extraordinaires qui montrent avec quelle précision singulière la foudre se dirige vers les parties métalliques et évite les étoffes isolantes. Pendant un temps orageux, une dame étend la main pour fermer une fenêtre, la foudre part et le bracelet que porte la dame disparaît si complètement qu'on n'en trouve plus aucun vestige. Une autre fois, suivant Bridone, pendant que Mme Douglas regardait par une fenêtre, la foudre frappa le fil de fer qui soutenait le bord de son chapeau, le fondit et brûla le chapeau sans atteindre la dame. A ces exemples on pourrait ajouter de nombreux récits de faits qui se produisent tous les jours et qui prouvent invariablement la même tendance du tonnerre à choisir, pour les frapper, les conducteurs métalliques. Nous ne citerons plus qu'une seule observation, mais elle est concluante.

En 1759, un détachement qui conduisait, du Fort-Royal à Saint-Pierre, le capitaine anglais Dibden, prisonnier de guerre, à la Martinique, s'arrêta pour se garantir de la pluie au pied du mur d'une petite chapelle. Un violent coup de tonnerre le surprit dans cette position et tua deux soldats; du même coup, la foudre ouvrit dans le mur, derrière les deux victimes, une ouverture d'environ 4 pieds de haut et de 3 pieds de large. Toute vérification faite, il se trouva qu'à la portion du mur démolie, sur laquelle les deux soldats foudroyés s'appuyaient, correspondait exactement à l'intérieur de la chapelle un ensemble de barres de fer massives destinées à supporter un tombeau. Ceux qui n'eurent pas le malheur de s'être ainsi placés fortuitement devant des pièces métalliques n'éprouvèrent aucun mal.

II. SUR LES CORPS ISOLANTS. — La foudre peut percer des trous dans les matières non conductrices, les briser en fragments et les disperser au loin; elle peut les fondre sur les points qu'elle frappe.

de sable au-dessous de laquelle il y a de l'eau. On suppose que le tonnerre tombant sur ces sables y fait un trou, et qu'il échauffe les parois du canal qu'il creuse jusqu'au point de les vitrifier et d'agglutiner contre elles, en les soudant, les portions de sable qui sont autour. Cette explication n'a été pendant longtemps qu'une simple conjecture, mais plusieurs faits sont venus la confirmer; je n'en citerai qu'un, dans lequel la nature a été prise sur le fait.

Le 17 juillet 1823, le tonnerre tomba sur un bouleau près du village de Rauschen (le long de la mer Baltique). Les habitants étant accourus virent, auprès de l'arbre, deux trous étroits et profonds; l'un d'eux, malgré la pluie, leur parut, au tact, à une température élevée. Le professeur Hagen, de Kœnigsberg, fit creuser avec soin autour de ces trous; l'un d'eux, celui qui fut trouvé chaud, n'offrit rien de particulier; le second, jusqu'à une profondeur d'un tiers de mètre, ne présenta non plus rien de remarquable, mais un peu plus bas commençait un tube vitrifié. La fragilité de ce tube ne permit de le retirer que par petits fragments de $0^m,04$ à $0^m,05$ de longueur. L'enduit vitré intérieur était très luisant, couleur gris de perle, et parsemé de points noirs dans toute son étendue.

FOUDRE GLOBULAIRE. — Quand on possède une théorie d'un phénomène, on est conduit trop fréquemment à vouloir y faire rentrer tous les faits particuliers qu'on observe et à passer sous silence les circonstances qui paraissent la contredire. C'est ce qui est arrivé pour l'électricité atmosphérique. Nous n'avons guère eu jusqu'à présent d'autre préoccupation que de montrer l'identité probable de la foudre avec l'étincelle, et nous l'avons confirmée par de nombreux exemples. Nous devons maintenant chercher avec la plus scrupuleuse attention si, à côté des faits précédents, il y en a quelques autres qui puissent signaler une différence entre les deux ordres de phénomènes que nous comparons, et c'est ce que l'on a cru trouver dans des exemples que l'on avait négligés, les croyant peu probables, jusqu'au moment où Arago appela l'attention sur les circonstances qu'ils accusent.

Tout le monde a entendu raconter que la foudre arrive

la foudre se fit plusieurs passages et, sans aucune exception, elle déchaussa toutes les parties scellées en projetant des éclats dans tous les sens.

La foudre tomba, en 1764, sur le clocher de Saint-Brindes, à Londres. C'est une flèche en pierres reliées par des crampons; les dernières assises sont massives et traversées par une tige de fer de 6m qui en forme l'axe et qui se termine par une croix. C'est sur cette tige que la foudre arriva d'abord. Elle la suivit jusqu'à sa base sans laisser aucune trace ni sur le métal, ni sur aucun point de la maçonnerie environnante; mais dès qu'un métal continu lui manqua, les dégâts commencèrent. La grosse pierre qui soutenait l'extrémité inférieure de la barre offrait des éclats et des fentes dirigées dans tous les sens; une très-large ouverture s'était formée du dedans en dehors de la flèche, et la descente se continua par bonds, de crampon en crampon. Sans se borner à ceux qui étaient à l'extérieur, la foudre se porta sur tous les morceaux de fer placés dans l'intérieur de la maçonnerie pour unir les pierres entre elles. A tous les scellements, les pierres furent fendues, pulvérisées, lancées au loin; partout ailleurs que ces points de suture, les dégâts étaient nuls ou sans gravité, comme si la foudre ne parvenait à s'échapper par les bouts des pièces métalliques qu'elle avait envahies qu'à l'aide d'un violent effort qui détruisait tout aux environs.

Ce n'est pas à des phénomènes de rupture que se bornent les effets de la foudre sur les corps peu conducteurs. Quand elle les frappe en des points qui ne sont pas dans le voisinage de métaux, elle laisse sur leur surface des traces fondues. C'est ce qui permet d'expliquer certains faits observés depuis longtemps. De Saussure dans les Alpes, Ramond au Pic du Midi, de Humboldt en Amérique, ont trouvé sur les rochers élevés des places vitrifiées où se voyaient des globules fondus; ils ont tous unanimement attribué ces apparences à l'action du tonnerre. C'est encore à la même origine que l'on rapporte la formation des fulgurites : ce sont des tubes vitrifiés qui s'enfoncent verticalement dans le sol; ils ont été découverts en 1711, en Silésie, par Hermann, et on les a retrouvés dans presque toutes les localités où le sol est couvert d'une couche

de sable au-dessous de laquelle il y a de l'eau. On suppose que le tonnerre tombant sur ces sables y fait un trou, et qu'il échauffe les parois du canal qu'il creuse jusqu'au point de les vitrifier et d'agglutiner contre elles, en les soudant, les portions de sable qui sont autour. Cette explication n'a été pendant longtemps qu'une simple conjecture, mais plusieurs faits sont venus la confirmer; je n'en citerai qu'un, dans lequel la nature a été prise sur le fait.

Le 17 juillet 1823, le tonnerre tomba sur un bouleau près du village de Rauschen (le long de la mer Baltique). Les habitants étant accourus virent, auprès de l'arbre, deux trous étroits et profonds; l'un d'eux, malgré la pluie, leur parut, au tact, à une température élevée. Le professeur Hagen, de Kœnigsberg, fit creuser avec soin autour de ces trous; l'un d'eux, celui qui fut trouvé chaud, n'offrit rien de particulier; le second, jusqu'à une profondeur d'un tiers de mètre, ne présenta non plus rien de remarquable, mais un peu plus bas commençait un tube vitrifié. La fragilité de ce tube ne permit de le retirer que par petits fragments de $0^m,04$ à $0^m,05$ de longueur. L'enduit vitré intérieur était très luisant, couleur gris de perle, et parsemé de points noirs dans toute son étendue.

FOUDRE GLOBULAIRE. — Quand on possède une théorie d'un phénomène, on est conduit trop fréquemment à vouloir y faire rentrer tous les faits particuliers qu'on observe et à passer sous silence les circonstances qui paraissent la contredire. C'est ce qui est arrivé pour l'électricité atmosphérique. Nous n'avons guère eu jusqu'à présent d'autre préoccupation que de montrer l'identité probable de la foudre avec l'étincelle, et nous l'avons confirmée par de nombreux exemples. Nous devons maintenant chercher avec la plus scrupuleuse attention si, à côté des faits précédents, il y en a quelques autres qui puissent signaler une différence entre les deux ordres de phénomènes que nous comparons, et c'est ce que l'on a cru trouver dans des exemples que l'on avait négligés, les croyant peu probables, jusqu'au moment où Arago appela l'attention sur les circonstances qu'ils accusent.

Tout le monde a entendu raconter que la foudre arrive

quelquefois sous la forme d'une boule de feu, marchant avec assez de lenteur pour qu'on en puisse reconnaître la forme et s'arrêtant quelquefois pendant plusieurs secondes dans un même lieu avant d'éclater pour produire tous les dégâts du tonnerre : c'est ce que l'on nomme la *foudre globulaire*. Les récits suivants paraissent confirmer ce fait.

I. En 1718, à Couesson, près de Brest, sur les décombres d'une église entièrement détruite par la foudre, on s'accordait à attribuer la catastrophe à trois globes de feu de 3½ pieds de diamètre chacun, qui, s'étant réunis, avaient pris leur direction vers l'église d'un cours très rapide.

II. En mars 1720, pendant l'orage le plus violent, un globe de feu tomba à terre près de Horn. Après avoir *rebondi*, ce globe alla frapper le dôme de la tour et y mit le feu.

III. Le 3 juillet 1725, un orage ayant fondu sur le territoire d'Aynho, dans le Northamptonshire, le tonnèrre tua un berger et cinq moutons. Au plus fort de la bourrasque, le révérend Jos. Wasse vit un globe de feu gros comme la lune et entendit le sifflement qu'il produisait dans l'atmosphère en passant au-dessus de son jardin. Une autre personne, située en plein champ, aperçut pendant le même orage un globe de feu gros comme la tête d'un homme qui éclata en quatre morceaux près de l'église.

IV. Un coup de foudre endommagea fortement une maison de Darking (Surrey), le 16 juillet 1750. Tous les témoins de l'événement déclarèrent qu'ils avaient vu dans l'air de *grosses boules de feu* autour de la maison foudroyée. En arrivant à terre ou sur les toits, ces boules se partagèrent en un nombre prodigieux de parties qui se dispersèrent dans toutes les directions possibles.

V. A la suite d'un violent orage observé près de Wakefield, le 1er mars 1774, lorsqu'il ne restait plus dans tout le ciel que deux nuages peu élevés au-dessus de l'horizon, Nicholson voyait à chaque instant des météores semblables à des étoiles filantes descendre du nuage supérieur au nuage inférieur.

Depuis l'époque où Arago signalait dans sa Notice ces singuliers phénomènes, on s'est occupé de les mieux observer, et voici quelques exemples récents qu'il est impossible de ré-

de l'air et qui, étant terminées en pointe, la laissent échapper sous forme d'auréole ou d'aigrette vers le nuage superposé qu'elles ramènent à l'état naturel. Il est clair, d'après cette théorie si simple, que l'effet permanent d'un paratonnerre est de diminuer l'intensité des manifestations électriques des nuages; c'est aussi ce que toutes les statistiques viennent prouver, et il n'est pas moins évident que, si une étincelle se forme entre l'édifice et la nuée, c'est sur le paratonnerre qui est le plus chargé d'électricité contraire qu'elle viendra aboutir. L'efficacité d'un paratonnerre est démontrée dans chaque lieu par la comparaison que l'on fait entre les nombres de coups de tonnerre qui ont frappé l'édifice avant et après l'établissement de la tige métallique, comparaison qui est dans tous les cas en faveur de la dernière période. On a agité la question de savoir jusqu'à quelle distance autour du paratonnerre s'étend la vertu préservatrice : on n'a sur ce point que des données vagues. Généralement on admet qu'elle se prolonge jusqu'à un rayon double de la hauteur.

Les détails de la construction de ces appareils ont été réglés par des instructions rédigées à plusieurs reprises par les corps savants [1]. Sans entrer à ce sujet dans aucun détail technique, nous dirons que la tige terminale doit être amincie en pointe, et, pour éviter l'oxydation qui se ferait à la longue si la pointe était en fer, on la fait en platine ou en cuivre. A la base de la tige on fixe le conducteur, qui est le plus souvent une barre de fer de $0^m,020$ de côté, que l'on fait régner d'une manière continue sur le faîte des édifices, en la soutenant de distance en distance par des tiges d'appui et en la faisant soigneusement communiquer avec toutes les pièces métalliques des édifices. Enfin elle arrive au sol, où elle plonge. Pour qu'un paratonnerre soit efficace, il doit être en communication parfaite avec la terre, et il faut pour cela qu'il se rende dans des puits profonds, qu'il s'y ramifie en plusieurs branches, qu'il soit toujours entouré d'eau et de corps conducteurs, comme la

---

[1] Instruction sur les paratonnerres, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXVI. — Supplément d'instruction, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLIII.

sation de chaleur. Ce globe s'approcha de ses pieds, comme un jeune chat qui vient jouer et se frotter aux jambes, suivant l'habitude de ces animaux : mais l'ouvrier écarta les pieds et par plusieurs mouvements de précaution, mais tous exécutés, suivant lui, très-doucement, il évita le contact du météore. Celui-ci paraît être resté plusieurs secondes autour des pieds de l'ouvrier assis qui l'examinait attentivement penché en avant et au dessus. Après avoir essayé quelques excursions dans divers sens, sans cependant quitter le milieu de la chambre, le globe de feu se leva verticalement à la hauteur de la tête de l'ouvrier qui, pour éviter d'être touché au visage et en même temps pour suivre des yeux le météore, se redressa en se renversant sur sa chaise. Arrivé à la hauteur d'environ 1^{m} au-dessus du pavé, le globe de feu s'allongea un peu et se dirigea obliquement vers un trou percé dans la cheminée environ à 1^{m} au-dessus de la tablette de cette cheminée.

» Ce trou avait servi à faire passer le tuyau d'un poêle qui pendant l'hiver avait servi à l'ouvrier; mais, suivant l'expression de ce dernier, le tonnerre ne pouvait le voir, car il était fermé par du papier qui avait été collé dessus. Le globe de feu alla droit à ce trou, décolla le papier sans l'endommager et remonta dans la cheminée; alors, suivant le dire du témoin, après avoir pris le temps de remonter dans la cheminée *du train dont il allait*, c'est-à-dire assez lentement, le tonnerre, arrivé au haut de la cheminée, qui était au moins à 20^{m} du sol de la cour, produisit une explosion épouvantable qui détruisit une partie du faîte de la cheminée et en projeta les débris dans la cour.... »

PARATONNERRES. — Malgré les quelques faits que nous venons de citer, mais que nous ne pouvons ni expliquer ni réaliser, nous sommes autorisés à maintenir que la cause qui produit le tonnerre est la même que celle qui produit les décharges électriques ordinaires. Dès lors, pour éviter la foudre, il faut fournir aux nuages de l'électricité contraire à celle dont ils sont chargés, et Franklin y a réussi en armant les édifices de tiges métalliques en communication avec le sol, tiges qui prennent à leur sommet une électrisation contraire à celle

est en relation avec les conduites de l'eau et du gaz de la ville et avec les tuyaux d'égouts : cette triple communication assure un écoulement facile à l'électricité, sans être l'origine d'aucun danger pour les personnes ; de plus, une disposition ingénieuse, fondée sur l'emploi des courants dérivés, permet de reconnaître à chaque instant, à l'aide d'un appareil accessoire très-simple, si chacun des trois systèmes de communication se maintient en bon état.

Le système de M. Melsens paraît offrir d'excellentes garanties; il ne peut tarder à être substitué en beaucoup d'endroits à la disposition classique des paratonnerres employés en France.

FIN DU TROISIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TROISIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes généraux de l'électricité.

CHAPITRE II.

Loi de Coulomb.

CHAPITRE III.

De la déperdition de l'électricité.

CHAPITRE IV.

Conséquences et vérification de la loi de Coulomb. Potentiel.

TABLE DES MATIÈRES

DU TROISIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

GRAVITATION UNIVERSELLE.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes généraux de l'électricité.

CHAPITRE VIII.

Condensateur à lame d'air.

CHAPITRE IX.

Corps isolants. — Pouvoir inducteur spécifique.

CHAPITRE V.

Électrométrie.

CHAPITRE XI.

Machines électriques.

CHAPITRE XII.

Énergie électrique.

CHAPITRE XIII.

Décharge disruptive.

CHAPITRE XIV.

Sources diverses d'électricité. — Électricité atmosphérique.

ERRATA.

TOME Ier. — 1er FASCICULE.

P. 25, ligne 7 en note, *au lieu de* AB.DF = AC.DE, *lire* AB.DE = AC.DF.

P. 26, ligne 28, *au lieu de* F′PQ = FAB, *lire* $F'.\overline{PQ} = F.\overline{AB}$.

P. 26, ligne 32, *au lieu de* en Q, F′ appliquée en B, *lire* en B, F′ appliquée en Q.

P. 27, lignes 26 et 27, *au lieu de* F, *lire* — F.

P. 27, ligne 29, *au lieu de* — F, *lire* F.

P. 34, ligne 16 en dénominateur, *au lieu de* v_0, *lire* v_0^2.

P. 52, remplacer les lignes 3, 4 et 5 par les suivantes :

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')V^2 = \frac{2mm'}{m+m'}(v \mp v')^2,$$

quantité toujours positive.

P. 52, ligne 8, *au lieu de* travail négatif égal à $\mp 2mm'vv'$, *lire* travail égal à $\frac{2mm'}{m+m'}(v \mp v')^2$.

P. 104, ligne 21, *au lieu de* sin EMB, *lire* sin MBE.

P. 221, ligne 4, supprimer le signe = dans le second membre de la formule.

P. 252, ligne 9, *au lieu de* P, *lire* A.

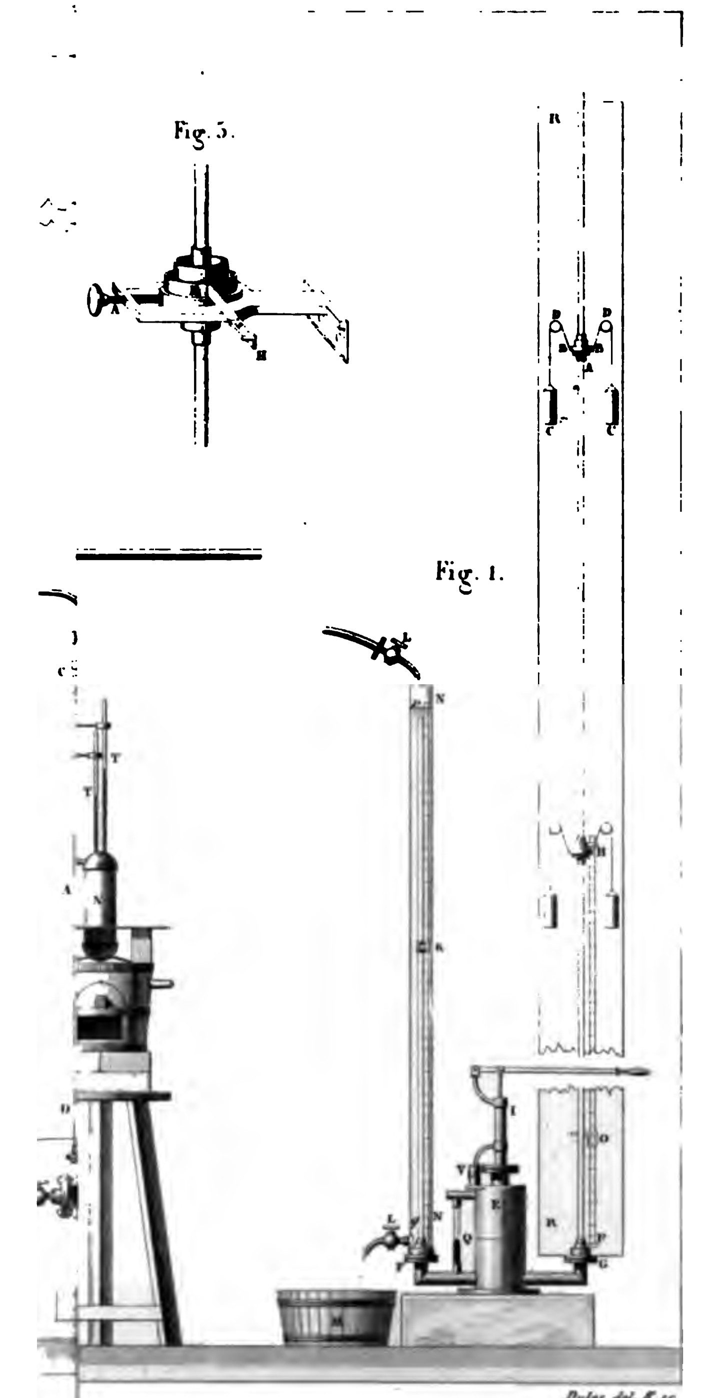
P. 252, ligne 10, *au lieu de* L, *lire* F.

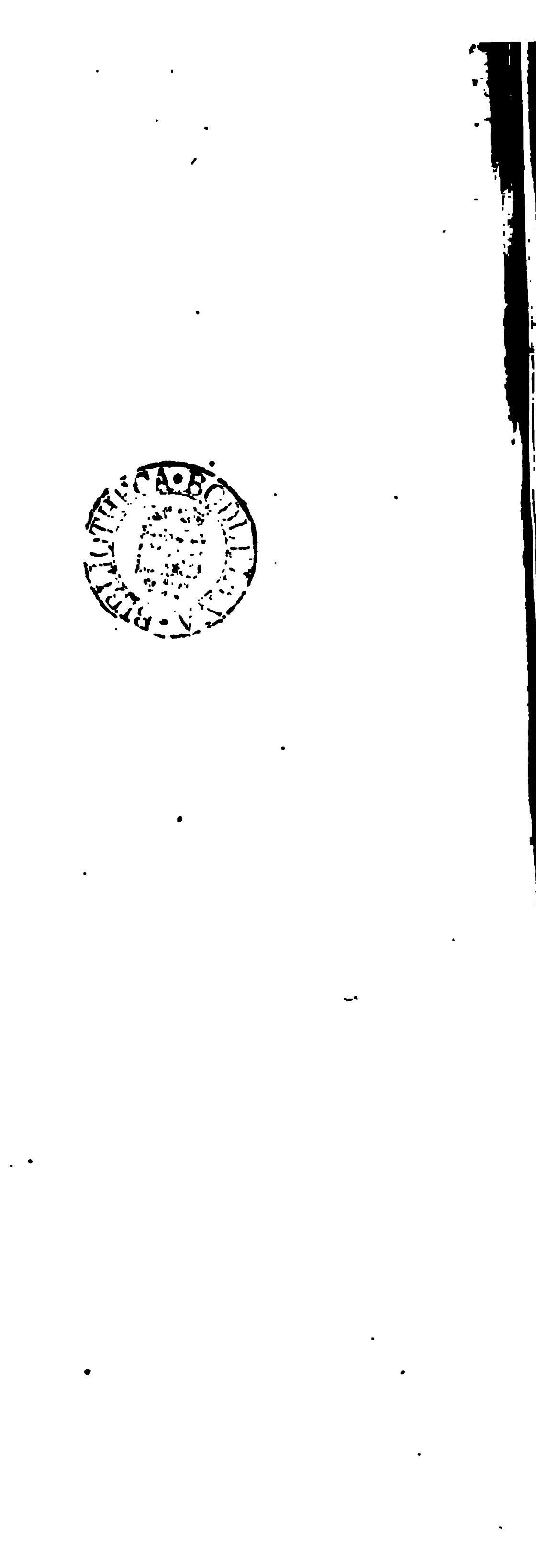
P. 257, ligne 4, *au lieu de* B, *lire* S′.

FIN DE LA TABLE DU TROISIÈME FASCICULE DU TOME PREMIER.

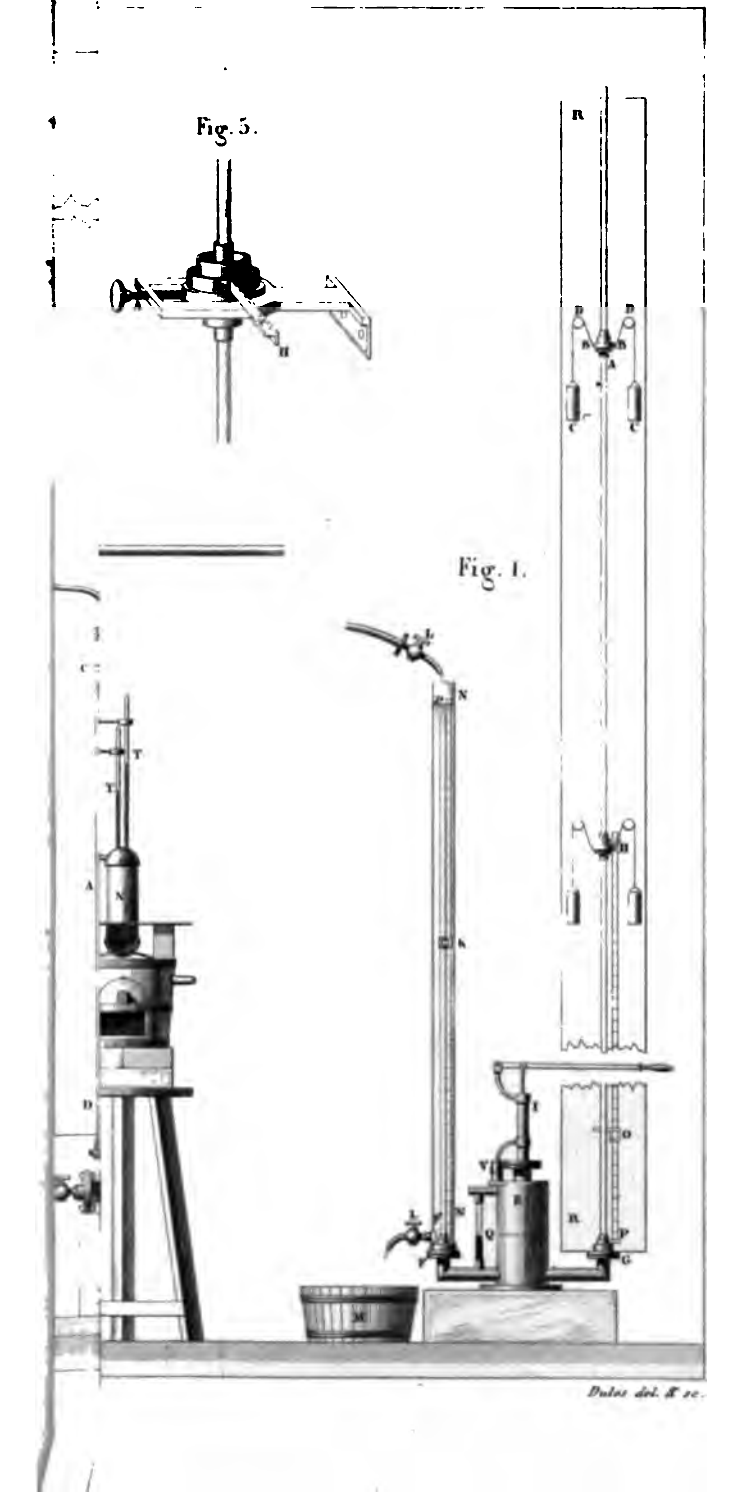
4676 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Augustins.




Fig. 3.
Fig. 1.
Dulos del. & sc.



Pl. I.



Dulos del. & sc.

